XXXIII
F
23
NAPOLI

XIII
F
23

BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIII
F
22

Google

ANDREÆ
TACQVET
E SOCIETATE IESV
OPTICA
TRIBVS LIBRIS
EXPOSITA.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

OPTICÆ

LIBER PRIMVS

DE APPARENTIIS RERVM SIMPLICIBVS AC DIRECTIS.

APparentias rerum ſimplices ac directas voco, quæ reflexioni, & refractioni non ſunt obnoxiæ. Eas hoc primo libro ita proſequar, vt, reiectis futilibus, quæ congeri plurima hìc ſolent, ea ſolùm afferam quæ aut noua ſint, aut cæteris meliora.

HYPOTHESES.

1. REs omnes aſpectabiles ſui ſpecies, ſiue imagines quaquauersùm diffundunt, quæ intra oculum receptæ, viſionis ſenſum determinant.

Conſtat illuſtri experimento, quod veteres ignorarunt; iam neſcit nemo. De quo plura in Dioptricâ.

2. Propagatio ſpecierum & luminis fit viâ rectâ, ſiue per lineas rectas, quas Radios appellamus.

Definitiones.

1. *Obiectum* voco, quidquid aſpectabile eſt.

2. *Triangulum Opticum* eſt, quo ſpecies lineæ (BC) ad oculum allabitur. Illius vertex (A) in oculo eſt, baſis eſt ipſa linea (BC), quæ cernitur. *Fig. 1.*

3. *Pyramis Optica*, eſt via, ſeu figura quâ corporum ſpecies ad oculum propagantur. Vertex illius (A) eſt in oculo, baſis eſt corporis viſi ſuperficies (BEFCG) oculo obuerſa. *Fig. 2.*

4. *Angulus viſorius*, ſiue *Opticus*, eſt Optici trianguli vel Opticæ Pyramidis acumen ipſum ad oculum pertingens. Atque hic eſt angulus ille, ſub quo res videri dicuntur, continetur que ſub radijs ab extremitatibus obiecti ad oculum emiſſis. Quia verò obiectorum magnitudines penes rectas lineas, ſeu diametros plerumque æſtimamus, potiùs ad angulum viſualem planum, quàm ad ſolidum ſolent Optici attendere.

Quæ porro de angulo viſuali iam definiui, nemo velim ita accipiat, quaſi nihil vltra dicendum de illo quærendumue ſuperſit. Veterum fit error ille, qui ſtructuram oculi ignorarunt. Nunc quando illa penitus perſpecta eſt, longè aliter ſentiendum. Oculi humani tres ſunt partes præcipuæ ad viſionem concurrentes, foramen rotundum quod pupillam dicimus; humor cryſtallinus figurâ conuexus; tunica, quam retinam dicunt, in oculi fundo expanſa. Per pupillam radij ſpecierum ingrediuntur, quos humor criſtallinus excipit & refringendo ordinat, atque ita ordinatos ad tunicam retinam tranſmittit; quâ excepti, diſtinctas in eâ obiectorum imagines depingunt; pro quarum magnitudine vel paruitate, diſtinctione vel confuſione, res magnæ vel paruæ, diſtinctæ vel confuſæ apparent. Quæ omnia in Dioptricâ, cum de viſionis artificio tractabitur, accuratè exponentur. Iam quia totum obiectum ad ſingula cryſtalli puncta radios emittit, manifeſtum eſt ab obiecto non vnam tantùm Pyramidem Opticam profluere, ſed plurimas, quarum vertices, ſiue apices ad diuerſa cryſtalli puncta terminentur, baſis verò ſit obiectum ipſum, ac proinde viſualem angulum ſupra definitum non vnum, ſed multiplicem eſſe. Nunc tamen, quando de ſimplicibus ac directis obiectorum apparentijs agimus, ex omnibus iſtis Pyramidibus anguliſque Opticis ſatis erit vnum illum ex-

pendere, cuius vertex ad medium cryſtallinæ ſuperficiei punctum terminatur, ibidemque refractis decuſſatiſque lateribus verſùs retinam tunicam denuò expanditur; pro magnitudine ſiquidem vel paruitate huius anguli vt in Dioptricâ oſtendam, obiecti imago magna vel parua in oculi fundo depingitur: atque etiam harum imaginum conſideratione ſeclusâ, experimentis [a] conſtat apparentes rerum magnitudines ad huius anguli magnitudinem proportionari.

[a] vide prop. 3.

PROPOSITIO I.

Quantitatem diſtantiæ ſecundùm ſe, viſus non percipit.

Conſtat experimentis quotidianis. Luna vel Sol aliquâ ſui parte poſt tectum latens, apparet tecto contiguus, quamuis ſciamus immenſùm diſtare. Pari modo cælum apparet horizonti incumbere, licet non ignoremus abeſſe longiſſimè, & turris ſupra ædificium humilius, atque oculo propinquius eminens videtur ipſi adhærere, vt ſi diſtare à ſe mutuò aliunde neſcias, & alia indicia *prop. ſequenti* adferenda deſint, id diiudicare nullâ ratione poſſis. Neque hoc ſolùm in obiectis remotioribus, ſed etiam in vicinis contingere, experientiâ quotidianâ reprehendimus. Liquet igitur magnitudinem diſtantiæ ratione ſui à viſu non percipi. Ratio eſt, quia diſtantiæ obiectorum ſunt lineæ rectæ per oculum ad obiecta ductæ; quæ neceſſariò apparent vt puncta; hoc eſt non apparent.

PROPOSITIO II.

Quomodo diſtantiam viſus percipiat.

Diſtantiam viſu percipimus potiſſimùm ex corporibus interiectis, vel infra oculum; vt terræ ſuperficie, vel lateraliter, vt muro aut ſerie domorum, vel ſupra, vt tabulato. Percipitur etiam diſtantia ex intenſione vel debilitate coloris, & diſtinctione vel confuſione quâ res cernitur. Ita fit vt tenebris ingruentibus, quæ prope ſunt, remota appareant, & turres ac montes per nebulam viſa longiùs, quàm cælo ſereno diſtare videantur.

Putauit Aguilonius [b] cũ alijs Opticis minores diſtantias à viſu ſemper etiã percipi ex axiũ Opticorum longitudine hunc in modum. Oculorum centra ſint A, B, eaq; connectens recta AB; axes optici AI, BP. Sunt autem axes optici rectæ lineæ ab oculorum centris eductæ. Obiectum exiſtat in C, ad quod colliment vterque oculus A, B. Aſſumit igitur Aguilonius vtrumq; axem ſemper dirigi in punctum C, id enim ſibi viſus erat demonſtraſſe *prop.* 12. *lib.* 2. Quo poſito, affirmat ab oculo A percipi longitudinem axis BC ex angulo CAB, longitudinem verò axis AC colligi ab oculo B ex quantitate anguli CBA.

[b] prop. 4. & 5. lib. 5. optic.

Fig. 3.

Verùm hæc demonſtratio, quòd falſo nitatur fundamento, eſt nulla. Neque enim, quod primus Gaſſendus animaduertit, dum quidpiam vtroque oculo intuemur, oculi vtriuſque axem eò dirigimus, ſed ſolùm vnius plerumque, altero quodammodo feriante. Sint enim oculorum centra in A, B, & ex aduerſo murus IL, in medio obiectum quodpiam C. Clauſo oculo ſiniſtro B, conſpiciens dextro A, obiectum C, notaui in pariete punctum illi reſpondens E. Deinde clauſo dextro A, intuens ſiniſtro B eundem apicem C notaui rurſum in pariete punctum illi reſpondens D, quod ſemper aliud eſt à priori. Aperto tandem oculo vtroque eundem apicem C conſpicatus, ſemper obſeruaui idem illi reſpondere punctum D, quod tum reſpondebat cùm oculo ſiniſtro B ſolo aſpicerem. Manifeſtum eſt igitur cùm oculo vtroque conſpicerem punctum C, non fuiſſe vtriuſque oculi axem directum in C, ſed oculi ſiniſtri tantùm. Si enim directus fuiſſet vterque, debebat C apparere non potiùs in D, quàm in E, ac proinde nec in D nec in E, ſed in puncto quodam intermedio O. Quare deſtructo fundamento corruere Aguilonij ratiocinium neceſſe eſt.

Fig. 4.

PRO-

PROPOSITIO III.

Quæ ſub æquali angulo videntur, apparent æqualia ; quæ ſub maiori, maiora ; minora ſub minori ; & qualis eſt angulorum opticorum, talis eſt & magnitudinum apparentium proportio.

ID veteres optici ad vnum omnes axiomatis loco habuêre, conſtatque experimentis manifeſtis & quotidianis. Sol quippe & Luna ſpectantur à nobis ſub angulo quoad ſenſum æquali, 30 videlicet minutorum quàm proximè, ſiue gradus dimidij, & apparent æquales, quamuis hanc illo ſciamus plus quàm centies eſſe minorem. Rurſum inter binas arborum ſeries BD, CE conſtituti, dum per earum terminos D, E cæli portionem FG intuemur, hæc æqualis apparet arborum intercapedini DE, vtpote ſub eodem conſpecta angulo FAG. Similiter obiecta foris exiſtentia, aut etiam cæli portio per feneſtræ patentis margines viſa, latitudini feneſtræ æqualia apparent, modò intuitu vno & latitudinem feneſtræ, & obiecta vltra eam poſita comprehendas. Infinitum ſit, experimenta omnia recenſere quibus eadem veritas explorari quotidie & à quocumque poteſt. Deinde quis ignorat delineationes ſcenographicas, quas vulgò perſpectiuas appellant, nobis apparere vt obiecta ipſa quæ repræſentant? Atqui illæ ſub iiſdem radijs anguliſque, quibus obiecta ipſa, ſpectantur. Poſtremò, vt alia omnia prætermittam, cùm anguli optici ſunt æquales, etiam ſpecies, ſeu imagines obiectorum in oculi fundo pinguntur æquales, & creſcente angulo, creſcunt illæ, decreſcente decreſcunt. Atqui iam eſt opticis peritioribus exploratum, prout ſpecies in oculo ſunt æquales, maiores vel minores, obiecta inter ſe apparere æqualia, maiora vel minora. Idem ergo pro variâ angulorum opticorum magnitudine continget. Fig. 5.

Immeritò igitur nonnulli recentiores, neſcio quibus ducti præiudicijs, angulos prædictos, vt fallaces, & ineptos ad apparentes rerum magnitudines determinandas reijciunt. Dicent, credo, obiecta non apparere æqualia, quamuis eodem vel æquali angulo conſpiciantur, quando viſus inæquales diſtantias percipit. Quæro igitur, an Sol prope horizontem poſitus maior appareat, cum terræ ſuperficies illum inter atque oculum interiecta cernitur, quàm dum manu vel pileo terræ conſpectu impedito ſpectatur ſolus? quiſquis voluerit experiri, æqualem vtroque caſu deprehendet. Pari modo ſupra montis altiſſimi verticem conſpectus Sol nequaquam apparet maior, quàm dum nullo corpore interiecto conſpicitur; & tamen primo caſu montis interpoſitio facit vt diſtātia longè videatur maior quàm altero. Quare falſum eſt diſtantiam maiorem ſenſu perceptam apparentes rerū magnitudines ſemper augere. Non affirmo tamen id nunquam accidere: imò aſſero manente eodem angulo viſuali, eâdemque ſpecie in oculi fundo, obiectum modò maius, modò minus apparere poſſe, tum videlicet, quando cum obiectis alijs atque alijs componitur. Sic ſpatium inter binas domorum vel arborum ſeries apparet longiſſimum, quia cum illius exiguâ latitudine comparatur, quæ ſimul eodem tempore viſui obiicitur. Quod ſi arbores longiùs diſtent, iam longitudo ſpatij apparebit minor, quia cum latitudine maiori componitur; multóque adhuc minor videbitur, ſi arboribus ſublatis, cælo vndique patente ac libero cernatur. Simili de cauſâ ſi fuerint binæ turres ducentos pedes altæ, quarum vna gracilis ſit, craſſa altera; quæ gracilior eſt, apparebit altior. Verùm hæc contra ſpecies perinde militant, ac contra angulos: quas vti propterea nemo reijcit, ita neque anguli erunt reijciendi.

Maneat igitur firmum ac ſtabile illud Opticæ pronunciatum: *quæ ſub æqualibus angulis ſpectantur, apparent æqualia; niſi quidpiam, quod rarò accidit, apparentiæ æqualitatem elidat.*

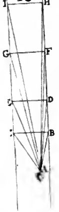
PROPOSITIO IV.

Amplitudo tota angulorum, ſub quibus diſtantiæ & altitudines ſpectari poſſunt, intra limites recti anguli continetur.

DAta ſit diſtantia ſeu altitudo infinita BZ, incipiens à perpendiculari AB, quæ ab oculo A in ipſam cadit, ducaturque ipſi parallela AF. Erit igitur angulus BAF rectus. Sumatur deinde ex BZ portio quantumuis magna BE, & ducatur AE quæ cadet in- Fig. 6.

minor eſt
ulo & al-

18

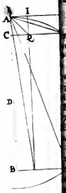


ćta-
n

icularis
CB vi-
roren-
ad BZ.
eſt, an-
o vide-

, eique
m DZ

as &



r BD
m 89.
, ſub
, BD
oooo,
ierſà,
89.
o) ab
DZ in
d. 89.

angu-
tan-
ne fa-
pona-
Ergo
quam
mpre-
is an-
ſquet
d erat



quan-

R O-

PROPOSITIO VII.

Nullius obiecti dimenſiones apparent eâ partium proportione, quâ ſunt.

CORporum dimenſiones ſunt tres, longitudo, latitudo, profunditas ſeu altitudo. Sit ergo *Fig.7.8.* corporis alicuius longitudo MN, cuius partes quæcumque ſint BC, CD, DE, EM. Oculus autem exiſtat in A, à quo ducantur rectæ AB, AC, AD, AE. Centro A per C deſcribatur arcus ICF, occurrens rectis AB, AD in F & I. Quoniam ſector AFC maior eſt triangulo ABC, ſector autem ACI minor triangulo ACD, maior erit proportio ſectoris AFC ad ſectorem ACI, quàm proportio trianguli ABC ad triangulum ACD, hoc eſt quàm *a per 1.6.* [a] rectæ BC ad rectam CD. Atqui proportio angulorum FAC, CAD eadem [b] eſt, quæ ſectorum. *b per 33.6.* Ergo etiam maior eſt proportio anguli FAC, ſeu BAC, ſub quo videtur BC, ad angulum CAD ſub quo CD, quàm ipſius BC ad CD. Ergo proportio ipſius BC ad CD apparet [c] maior, quàm ſit. *c per p.3. huius.* Eodem modo oſtendam proportionem rectæ CD ad DE apparere maiorem quàm ſit. Idemque de cæteris omnibus longitudinis datæ NM portionibus demonſtrabitur. Liquet ergo propoſitum.

PROPOSITIO VIII.

Circumferentia circuli eâ partium proportione apparet, quâ eſt, cùm viſus in centro, vel quouis circumferentiæ puncto exiſtit.

CIrcumferentiæ partes quæcumque ſint CD, DE, EF, FG, GH; oculus ſit in centro A, *Fig. 9.* à quo ducantur radij AC, AD, AE, AF, AH. Angulorum CAD, DAE &c. ſub quibus videntur arcus CD, DE, &c. eadem eſt proportio, [b] quæ arcuum CD, DE &c. *b per 33.6.* Ergo arcus prædicti eâdem inter ſe proportione [c] apparent oculo in A, quam reuerà habent. *c per p.3. huius.* Ponatur deinde oculus in peripheriæ puncto quouis B, ducanturque rectæ BC, BD, &c. Cùm rurſus eadem ſit proportio angulorum CBD, DBE &c. [d] quæ arcuum CD, DE &c. etiam *d per 33.6.* oculo poſito in B apparebunt arcus CD, DE &c. [e] eâ proportione quâ ſunt. Liquet ergo *e per p.3.* propoſitum.

PROPOSITIO IX.

In paruis diſtantijs minori proportione decreſcunt apparentes rerum magnitudines, quàm diſtantiæ.

SIt obiecti longitudo ſeu latitudo AB; nam penes dimenſiones in longum vel latum ſolemus rerum magnitudines æſtimare. *Fig.10.* Ex E puncto medio ipſius AB ducatur perpendicularis infinita, in quâ ſumatur diſtantia modica EF. Deſcribatur circulus per tria [o] puncta B, A, F perpendicularem ſecans in O, itemque alius centro F per A & B, ſecans perpendicularem infinitam in G. *o per 5.4.* Igitur angulus AGB ad circumferentiam dimidius [a] eſt anguli AFB ad centrum. Quare oculo poſito in G apparebit AB duplo [o] minor quàm in F. Iam quia FE *a per 20.3.* minor eſt quàm FO, ſeu FG, ſumatur FQ æqualis FE, eritque QE dupla ipſius FE, angu- *o per p.3.* lus autem AQB [b] maior angulo AGB: qui cùm oſtenſus ſit eſſe dimidius anguli AFB, erit *b per 21.1.* AQB plus quàm dimidius ipſius AFB. Ergo AB, oculo poſito in Q, nondum apparet duplo minor, quàm in F, licet diſtantia AQ dupla iam ſit diſtantiæ FE; ſed vt appareat duplo minor, adhuc remoueri debet oculus interuallo QG æquali ipſi EO, quod in paruâ oculi diſtantiâ omnino ſenſibile eſt, vt ex ipſo ſchematis conſpectu patet. Quare in modicis diſtantijs minori proportione decreſcunt apparentes rerum magnitudines, quàm diſtantiæ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO X.

In diſtantijs maioribus proportio decrementi apparentium magnitudinum non differt ſenſibiliter à proportione incrementi diſtantiæ.

Fig. 11. IIſdem poſitis quæ propoſ. præcedenti ſumatur in perpendiculari infinitâ diſtantia maior aliqua EF, & per tria puncta deſcribatur rurſum circulus occurrens perpendiculari in O. Centro deinde F per A & B alius deſcribatur circulus occurrens perpendiculari in G. Quia iterum angulus AGB duplo minor eſt angulo AFB, apparebit AB duplo minor in G, quàm in F. Diſtantia quoque GE quoad ſenſum eſt dupla diſtantiæ FE; quamuis enim in rigore Geometrico GF (hoc eſt FO) ſit maior quàm FE, adeóque GE maior duplâ FE; differentia tamen OE permodica eſt, auctâque diſtantiâ quodammodo euaneſcit, quod vel ipsâ ſchematis inſpectione liquet. In diſtantijs igitur maioribus abſque differentiâ perceptibili obiectum apparet minus eâdem proportione, quâ augetur diſtantia: quod erat demonſtrandum.

In demonſtratione egi tantùm de proportione duplâ; ſed ex illâ facile erit de alijs iudicium.

PROPOSITIO XI.

Oculo poſitione dato, reperire altitudinem, ex quâ data longitudo appareat æqualis minori longitudini datæ.

Fig. 12. & 13. STructuræ alicuius altitudinem repræſentet BR, & data Problematis ſint hæc

Diſtantia oculi pedum 12.
Altitudo coloſſi alicuius pedum 18.
Quantitas, quâ apparere debet, pedum 6.

Quæritur in quâ altitudine collocandus ſit coloſſus, vt ex datâ oculi diſtantiâ appareat pedum 6.

Conſtructio. Ex ſcalâ pedum, cuius conſtructionem & vſum vide in *Geometriæ Practicæ cap.* 4. accipe pedes 12 pro diſtantiâ oculi, quos ex B in A perpendiculariter conſtitue ad altitudinem BR, eritque oculus in A poſitione datus. Tum pedes 6 ex ſcalâ acceptos transfer ex B in C, ducaturque CA, erit CAB angulus ſub quo longitudo pedum 6 ab oculo in A ſpectatur de plano. Accipiatur deinde ex eâdem ſcalâ longitudo coloſſi FE pedum 18, ſupraque
a per 33 3. eam circuli conſtruatur [a] ſegmentum EFX capiens angulum N æqualem angulo CAB, & ex centro D ducatur DO perpendicularis ad FE. Interuallo DO duc SQ parallelam ad RB, & centro A interuallo radij DZ deſcribe arcum occurrentem parallelæ SQ in M. Rurſus centro M per A deſcribe circulum QPS, qui æqualis erit ipſi EFX. Hic abſcindet ex BR longitudinem KP parem datæ EF, quæ viſa ex A in altitudine BP apparebit æqualis datæ BC pedum 6. Scies autem quot pedum ſit altitudo BP, ſi acceptam circino ſcalæ applicaueris.

Demonſtr. Ducatur recta AM, & ex M recta MI perpendicularis ad BR, quæ par erit ipſi DO, cùm parallela SQ per conſtr. diſtet ab RB interuallo DO. Quoniam igitur radius MA, hoc eſt per conſtr. radius DZ, maior eſt quàm DO, hoc eſt quàm MI, patet circulum centro M per A deſcriptum, ſecare ipſam BR, ex eâque auferre (vt dixi) rectam PK. Deinde quia perpendiculares è centris MI, DO æquales ſunt in circulis æqualibus, ex 14.3. patet KP æqualem eſſe coloſſi datæ longitudini EP, & ex 26.3, æquales eſſe arcus KP, FE. Ergo angulus KAP, æqualis eſt angulo N, hoc eſt per conſtr. angulo CAB. Ergo PK longitudo coloſſi viſa ex A in altitudine BP apparet [b] æqualis ipſi BC pedum 6. Factum eſt igi-
b per p. 3. tur, quod petebatur.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Oculo poſitione dato altitudinem reperire, ex qua latitudo data appareat æqualis minori datæ latitudini.

DAta ſint
Diſtantia oculi pedum 10,
Latitudo pedum 14.
Latitudo minor pedum 6.

Fig. 14.

Quæritur quantâ altitudine opus ſit, vt latitudo pedum 14 appareat ex dato oculi ſitu pedum 6.

Conſtructio. Ex ſcalâ pedum ſume rectam BD pedum 6, ex cuius puncto quouis C duc perpendicularem CA pedum 10 pro oculi diſtantiâ, ducanturque rectæ AB, AD. Ex ſcalâ deinde ſume longitudinem X pedum 14, quæ poſita iu ſublimi ad horizontem parallela apparere debet æqualis BD pedum 6. Inter productas deinde AB, DA, aptetur recta EG æqualis ipſi X & parallela ad BD, cui AC producta occurrat in F. Tum centro A per F deſcribe circulum, qui ſecet DB productam in M. Erecta deinde ad horizontem perpendiculari infinita CZ, ex eâ ſume CI æqualem CM. Hæc eſt altitudo quæſita. Si enim per I duxeris HK parallelam ad BD & æqualem EG, ſiue X, ſic vt IH ſit æqualis FE, & IK æqualis FG; Dico HK (hoc eſt X) viſam ex A apparere æqualem rectæ BD pedum 6. Scies autem quot pedum ſit altitudo reperta CI, ſi eam ſcalæ applicaueris.

Demonſtr. Ducantur rectæ AH, AI, AK, AM. In triangulis AMC, AIC, quia latera AC, CM [a] æquantur lateribus AC, CI, & anguli [b] ACM, [c] ACI, ſunt recti, etiam baſes [d] AM, AI æquales erunt. Sed æquales ſunt AF, AM, vtpote ex centro ad circumferentiam. Ergo etiam AF ipſi AI æqualis eſt. Rurſum, quia rectus eſt angulus [i] BCA, nec non [o] BCI erit BC plano [r] IAC recta. Ergo cùm HI ſit [ſ] parallela ad BC, etiam HI [t] recta eſt plano IAC. Ergo rectus [u] eſt angulus HIA. Deinde, quia EF [x] eſt parallela ad BC, angulusque BCA rectus, etiam EFA [n] rectus erit. In triangulis igitur IAH, FAE cùm latera AI, AF ſupra oſtenderim æqualia eſſe, latera verò IH, FE æqualia ſint per conſtr. angulique HIA, EFA oſtenſi ſint recti, etiam angulus HAI angulo EAF, ſeu BAC [m] æqualis erit. Eodem modo oſtendam æquales eſſe KAI, DAC. Toti ergo KAH, BAD æquales erunt. Igitur HK, hoc eſt X, viſa ex A in altitudine CI æqualis apparet [p] longitudini BD pedum 6. Fecimus ergo quod petebatur.

a per cõſtr.
b per cõſtr.
c per cõſtr. & def. 3. 11.
d per 4. 1.
i per conſtr.
o per cõſtr. & def. 3. 11.
r per 4. 11.
ſ per conſtr.
t per 8. 11.
u per defin. 3. 11.
x per cõſtr.
n per 27. 1.
m per 4. 1.
p per p. 3.

PROPOSITIO XIII.

Oculo poſitione dato, reperire longitudinem quæ ex datâ altitudine appareat paruitatis datæ.

DAta ſint,
Diſtantia oculi pedum 30
Altitudo pedum 50
Paruitas data pedum 6.

Fig. 15.

Quæritur quanta requiratur longitudo ſtatuæ, quæ ex altitudine pedum 50 appareat pedum 6.

Conſtr. Duc infinitam BX; tum accipe ex ſcalâ pedes 6, quos transfer ex B in C; item pedes 50, quos transfer ex B in D pro altitudine datâ. Ex B verò perpendicularem excita BA æqualem 30 pedibus ſcalæ, qua referat oculi diſtantiam. Ductis deinde rectis AC, AD, cèntro A quadrantem deſcribe FP ſecantem rectas AC, AD in G & M. Arcui demum FG æqualem fac MN, & ex A per N ducta recta occurrat ipſi BX in E. Dico DE viſam ex A in altitudine datâ BD apparere pedum 6. Quanta porro ſit DE ſcies vbi ſcalæ applicaueris. a per 29. 3.

Demonſtr. eſt manifeſta, cùm enim arcus MN, GF æquales ſint, etiam [a] anguli DAE, BAC æquales erunt. Ergo oculo in A poſito DE æqualis [b] apparet ipſi BC, quæ per conſtr. eſt pedum 6. b per p. 3.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Oculo poſitione dato latitudinem reperire, quæ ex altitudine datâ appareat datæ paruitatis.

Fig. 14.

DAta ſint.
Diſtantia oculi pedum 30
Altitudo pedum 50
Paruitas data pedum $2\frac{1}{4}$

Quæritur quanta ſit oportet latitudo ſtatuæ, quæ iſtis datis appareat pedum $2\frac{1}{4}$.

Conſtructio. Ex ſcalâ pedum accipe rectam BD pedum $2\frac{1}{4}$, ex cuius puncto quouis C duc perpendicularem CA a æqualem partibus ſcalæ 30, pro diſtantiâ oculi, ducanturque ex A per B & D rectæ infinitæ AE, AG. Erigatur ex C perpendicularis ad horizontem infinita CZ, in quam transfer ex C in I partes ſcalæ 50 pro altitudine datâ. Ex CB productâ ſume CM æqualem ipſi CI. Centro A per M deſcribe arcum qui ſecet AC productam in F. Per F ducatur EG parallela ad BC. Hæc eſt latitudo ſtatuæ quæſita. Si enim per I ducatur HK parallela ad BC, ſic vt HI, EF, item KI, GF æquales ſint: Dico HK viſam ex A in altitudine datâ CI apparere æqualem ipſi BD pedum $2\frac{1}{4}$.

a in ſchemate incō modū fuiſſet proportiones datas exprimere.

Demonſtratio eadem quæ *prop.* 12.

Lemmata ad ſequentia.

Fig. 16.

Lemma. 1. Si inæqualium circulorum ſegmenta ADB, ACB eamdem habeant ſubtenſam, quod maioris eſt circuli, minorem capit angulum. *Intellige ſegmentum maioris circuli maius, & quod eo concluditur ex circulo minori.*

a per 32. 1.

Angulus enim ADB minor a eſt interno ACB.

Fig. 17.

Lemma. 2. Datæ ſint parallelæ BM, CN, quarum interuallum ſit PO, quod eſt vtrique perpendiculare. Hoc ſecet bifariam in Q perpendicularis LX. Extra parallelas autem detur punctum A. Dico circuli per tria puncta P, O, A tranſeuntis centrum eſſe in rectâ LS.

Ducatur enim OA, quam bifariam in Z ſecet perpendicularis ZS occurrens rectæ LX in S, ducanturque rectæ SA, SO, SP. Ex. 4. 1. patet æquales eſſe SA, SO, item SO, SP. Tres igitur SA, SO, SP æquales ſunt. Circulus igitur centro S, quod eſt in LX rectâ, tranſit per puncta P, O, A.

Lemma. 3. Iiſdem poſitis, oporteat centrum ipſum reperire in rectâ LS. Id verò iam habetur ex demonſtratione lemmatis 2.

PROPOSITIO XV.

Parallelorum interuallorum non ſemper, quod remotius eſt, apparet minus.

Fig. 18.

VIdetur hoc primo aſpectu paradoxum, cùm enim parallela interualla (hoc eſt perpendiculares BC, DE &c. inter binas parallelas BH, CI conſtitutæ) omnia inter ſe æqualia ſint, videntur debere ea quæ longiùs diſtant, minora apparere. Id quidem ita ſe habere, quando oculus exiſtit in A inter vtramque parallelarum, vel in earum alterutrâ, manifeſtum eſt, cùm angulus (DAE) interualli remotioris ſemper minor ſit angulo (BAC) interualli vicinioris.

Fig. 19.

At cùm oculus extra parallelas, ſed in eodem plano, ponitur, puta in A, longè aliter ſe res habet. Interuallum quippe BC, quod productum tranſit per oculum A, apparet inſtar puncti. Inde per aliquod ſpatium interualla remotiora apparent maiora vicinioribus, donec veniatur ad interuallum ex. gr. EF, quod omnium apparet maximum. Inde vero in infinitum procedendo versùs MN, interuallorum apparentiæ perpetuò decreſcunt. Speculatio igitur non iniucunda offertur, quam aliquot propoſitionibus proſequemur

PRO-

PROPOSITIO XVI.

Datæ ſint parallelæ BM, CN, & oculus in A extra eas, ſed in eodem plano. Oporteat inuenire interuallum, quod ex omnibus parallelis interuallis maximum appareat. *Fig. 19.*

AB oculo A duc ACB perpendicularem ad parallelas, & BC biſectâ in D, centro D per A circulus deſcribatur occurrens ipſi CN in F. Per F ducatur perpendicularis FE. Dico hanc apparere omnium maximam.

Ducatur inter BC (quæ inſtar puncti apparet) & EF, quæuis alia perpendicularis PO.
Deinde per D punctum biſectionis interualli BC duc perpendicularem infinitam ZS. Circuli per tria puncta P, O, A, tranſeuntis centrum eſt in perpendiculari ZS, puta in S, per lemma 2. & ex eodem lemmate colligitur circulum centro D per A & F iam antea deſcriptum
tranſire per interualli FE extremitatem alteram E. Iam quia angulus ADS rectus [b] eſt, erit *b per cõſtr.*
DA [c] minor quàm SA, ac proinde circulus AFE centro D deſcriptus per A, minor eſt circulo qui deſcriptus eſt centro S per A. Quare cùm æquales ſint ſubtenſæ EF, PO, erit an- *c per 19. 1.*
gulus EAF maior [d] angulo PAO. Sumatur deinde ad partem alteram interuallum aliud
quodcumque QR. Centrum circuli per puncta Q, R, A tranſeuntis rurſum [e] erit in perpen- *d per lem. 1.*
diculari SZ, puta in I. Quia verò rectus eſt, angulus ADI, iterum erit DA minor [m] quàm *e per lem. 2*
IA, adeoque DEFA circulus centro D deſcriptus per A, minor eſt circulo IQRA qui cen- *i per conſtr.*
tro I deſcribitur per A. Cùm igitur æquales ſint ſubtenſæ EF, QR, rurſum [n] angulus EAF *m per 19 1.*
maior erit angulo QAR. Igitur EF ſpectatur ex A ſub angulo maiori, quàm aliud quodli- *n per lem. 1.*
bet interuallum ad vtramlibet ipſius partem deſignabile. Ergo EF apparet omnium [o] maxi-
mum. Quod erat demonſtrandum. *o per p. 3.*

PROPOSITIO XVII.

Iiſdem poſitis & conſtructis quæ in præcedenti, interuallum, quod apparet maximum ſit EF; detur autem verſus Z aliud QR quantumuis remotum ab EF. Oporteat ad partem alteram reperire interuallum, quod ipſi QR æquale appareat. *Fig. 19.*

PEr tria puncta Q, R, oculi locum A, circulum deſcribe, cuius centrum in perpendiculari ZDS interualla parallela biſecante exiſtet per 2 lemma, idque in eodem lemmate exhibetur, puta in I. Accipe DS æqualem DI. Centro S per A circulum deſcribe, occurrentem ipſi CN in O. Dico interuallum OP tranſiens per O, apparere dato ad partem alteram QR æquale.

In triangulis enim IAD, SAD, cum anguli ad [a] D ſint recti, & DA, DI æquales ipſis DA, *a vide conſtr p. præc.*
DS; etiam IA, SA [b] æquales erunt. Quare circulus SAO (qui tranſit [c] etiam per P) centro S *b per 4. 1.*
deſcriptus, æquatur circulo IARQ deſcripto ex centro I. Cùm igitur æquales ſint ſubtenſæ *c per lem. 2.*
PO, QR, etiam anguli [o] PAO, QAR æquales erunt. Interualla igitur PO, QR viſa ex A *o per 26. & 29. 3.*
apparent [r] æqualia. Quod erat propoſitum.

Notatu dignum hic eſt varietatem omnem apparentiarum, quæ contingit in ſpatio infinito EMNF, exhiberi poſſe in ſpatio finito EFCB. *r per p. 3.*

PROPOSITIO XVIII.

Iiſdem poſitis, & conſtructis, quæ propoſ. 16. parallelæ SQ, TR ad vtramque partem oculi A producantur infinitè. *Fig. 20.*

D*ico*. 1. Interuallum parallelarum duobus locis, in EF, & XZ, apparere maximum.
Patet ex *prop. 16.* circulus enim centro D per A deſcriptus parallelas interſecat duobus locis, nimirum in EF, & XZ.

Dico. 2. Dato cuiuis interuallo QR diuerſo ab EF, & XZ, tria illi interualla alia (PO, IK, ST) apparere æqualia.

Nam

Corollarium.

Si media proportionalis inter BC, AC ponatur ex C in Q, apparebit AB in Q maior quàm in quouis alio puncto rectæ infinitæ CZ: minor tamen quàm in D.

PROPOSITIO XXII.

Iiſdem poſitis, dato puncto G quantumuis remoto à maximæ apparentiæ loco D, reperire ad partem alteram punctum. in quo AB apparet æquè magna ac in G. *Fig.* 23.

PEr tria puncta A, B, G a circulus deſcribatur, qui ſecabit rectam XC inter D & C, puncta in F. Dico BA in F & G apparere æqualem. a *per* 5.4.

Ductis enim rectis AF, BF, AG, BG, erunt anguli BFA, BGA in eodem circuli ſegmento b æquales. Ergo BA in F & G æquè c magna apparet. b *per* 21.3.

Notatu dignum eſt, varietatem omnem apparentiæ quæ contingit in lineâ infinitâ DX, reperiri in lineâ finitâ DC. c *per p.* 2.

PROPOSITIO XXIII.

Iiſdem poſitis & conſtructis quæ in duabus præcedentibus, ſi BA ſit perpendicularis ad XZ. *Fig.* 24.

D*ico.* 1. BA in duobus locis apparere maximam. Si enim accipiatur CQ æqualis CD, patet AB æquè magnam apparere in Q ac in D. Sed in D apparet d maxima. Ergo & in Q. d *per p.* 21.

Dico. 2. Si in infinitâ FX detur punctum quoduis G, in tribus alijs locis apparere AB æquè magnam ac in G. Apparebit enim æquè magna in puncto e aliquo F inter D & C. Quod ſi fiat CO æqualis CF, apparebit AB æquè magna in O ac in F, hoc eſt quàm in G. Rurſum ſi fiat CN æqualis CG, apparebit AB æquè magna in N quàm in G, hoc eſt æquè magna quàm F & O. In tribus igitur locis N, O, F, apparet AB æquè magna, quàm in dato loco G. e *per præc.*

PROPOSITIO XXIV.

Cur parallelæ longitudines oculo inter illas poſito, ſenſim coïre videantur.

SInt longitudines parallelæ CH, BN, interque illas oculus in A, per quem recta intelligatur educta AZ ipſis CH, BN, parallela. Inter parallelas ducantur perpendiculares DMK, FPL, HZN, item radij AD, AF, AH, AK, AL, AN. Quia angulus FAP minor eſt angulo DAM, interuallum FP minus apparet, quàm DM interuallum. Ergo punctum F apparet propinquius parallelæ AZ per oculum tranſeunti, cuius apparentia inuariabilis eſt, quàm punctum D. Eodem modo punctum H rectæ AZ apparet vicinius quàm punctum F: & ſic deinceps. Ergo linea CH quò longiùs producitur, eò apparet accedere magis ad rectam AZ. Quare cùm idem eodem modo probetur de lineâ BN, habetur ratio cur CH, BN ſenſim coïre videantur. *Fig.* 25.

PROPOSITIO XXV.

Plana horizontalia infra oculum poſita videntur in fine attolli, poſita ſupra oculum deprimi: & terminus eleuationis ac depreſſionis eſt recta linea per oculum horizonti parallela.

SIt oculus in A, & duo plana horizonti parallela, vel potiùs eorum longitudines, BN infra oculum, CH ſupra. Linea deinde per oculum horizonti parallela ſit AZ. Iam oſten- *Fig.* 25.

ſum eſt in præcedenti, lineas CH, BN, quò longiùs producuntur, eò videri propiùs accedere ad AZ, cuius apparentia inuariabilis eſt; quod fieri non poteſt, quin BN appareat aſcendere, CH deſcendere: cuius apparentis aſcenſus deſcenſuſque terminus eſt linea AZ.

Idem aliter ſic oſtenditur. Partes remotiores longitudinis BN poſitæ infra oculum, altioribus radijs ſuas ſpecies ad oculum emittunt: nam radius VA altior eſt radio KA, & LA quam VA, & ſic deinceps. Contrà longitudinis CH ſupra oculum conſtitutæ partes remotiores ad oculum penetrant radijs demiſſioribus; eſt enim TA demiſſior quàm DA, & FA quàm TA, & ſic deinceps. Ergo &c.

Rurſum aliter: ſi ſpecies longitudinum infinitarum KN, DH excipi, ſeu intercipi concipiamus lineâ DK, puncta V, L, N proijciuntur in puncta S, G, I, remotiora in altiora, ſic vt nunquam perueniatur ad M. Contrà D, F, H puncta proijciuntur in puncta R, Q, O, remotiora nimirum in demiſſiora, ſic vt numquam deſcendatur vſque ad M. Ergo &c.

Corollarium.

Mare apparet gibboſum, non quia ſphæricum eſt, ſed ob cauſam in propoſitione iam datam. Pars ſiquidem globi ex terrâ & aquâ compoſiti, quæ ſub aſpectum cadit, tam eſt exigua vt ſenſibiliter curua non ſit. Vide Geom. Pract. *cap.6.probl.5.* Deinde licet eſſet ſenſibiliter rotunda, vi rotunditatis deberent eius extrema potiùs apparere demiſſiora.

PROPOSITIO XXV.

Templorum frontiſpicia ac turres ad perpendiculum extructæ prope aſpectanti videntur antrorſum inclinare.

Fig. 26. SIt altitudo BD, & prope eam oculus in A; per quam agatur recta AZ altitudini parallela. *Propoſ.* 24. iam oſtendi partes remotiores ipſius BD videri propiùs accedere ad lineam AZ, quàm viciniores; quod fieri non poteſt, quin altitudo BD videatur versùs intuentem inclinari. Ita ſubinde accidit, vt Opticès imperiti, ſtructuræ vitio falsò imputent, quod naturæ viſionis erat tribuendum.

PROPOSITIO XXVI.

Subtenſa in circulo per totum ſegmenti arcum, diameter verò per totam circuli circumferentiam æqualis apparet.

EXimia circuli proprietas eſt, quòd omnes anguli in eodem ſegmento ſint æquales, & omnes anguli in ſemicirculo recti; quæ *prop.*21. *&* 31. *lib* 3. elementorum demonſtrantur. Ex his propoſiti iam theorematis veritas patet. Sit enim ſegmenti ADEB ſubtenſa AB.
Fig. 27. Quoniam anguli omnes ACB, ADB, AEB &c. a ſunt æquales, etiam AB ſemper eâdem
a *per* 21.3. b magnitudine apparebit oculo per totum ſegmenti arcum ACDEB circumducto.
b *per p.*3.
Fig. 28. Sit deinde circuli diameter AB. Quoniam omnes anguli BCA, BDA, BEA, BFA d ſunt
d *per* 31.3. recti, ideoque æquales, liquet rurſum, oculo per totam peripheriam circumlato, AB diametrum ſemper æqualem videri.

Hinc patet nullam obliquitatem in circulo poſſe apparentem magnitudinem diminuere.

PROPOSITIO XXVII.

Recta circulo inſcripta per totam peripheriam circumducta ſemper æquè magna apparet oculo in aliquo periphæriæ puncto perſiſtenti.

Fig. 29. PErſiſtat oculus in peripheriæ puncto A, & diameter quouis reſpectu oculi ponatur ſitu, in FG, BC, DE, quantumcumque etiam obliquo. Cùm anguli FAG, BAC, DAE
e *per p.*3. omnes ſint recti per 31. 3, liquet e diametrum quouis ſitu apparere æquè magnam oculo exiſtenti in A.

Deinde

Deinde ſubtenſa quæcumque quamuis in circulo reſpectu oculi in A poſitionem obtineat in BC, CD &c. Quoniam eadem ſemper recta eſt quæ transfertur, arcus omnes BC, CD &c. [a] æquales erunt, Ergo [b] & anguli BAC, CAD &c. erunt æquales. Ergo & ſubtenſa omnibus illis locis æquè magna apparebit oculo perſtanti in A. Fig. 30. a per 26. 3. b per 28. 3.

Hinc rurſum liquet nullam obliquitatem in circulo tollere apparentiæ æqualitatem.

Corollarium.

Latera polygoni regularis oculo in A angulorum vno exiſtenti apparent æqualia. Patet ex iam demonſtratis.

PROPOSITIO XXVIII.

Forma theatris aptiſſima eſt circuli ſegmentum, in quo arcus ſpectatoribus, ſubtenſa ſpectaculis tribuitur.

SPectatoribus enim per totum arcum ACB diſtributis longitudo theatri AB ſub æqualibus [c] angulis, adeóque æquè omnibus magna ſpectabitur, vt *prop.* 26 iam diximus. Accedit quod hæc forma ſit capaciſſima ſpectatorũ: item quod ſinguli totum ambitum conceſſus intueri poſſit, cum ex.gr. ad locum quemuis C rectæ QC, PC, OC, RC &c. à ſingulis punctis ambitus BCA emiſſæ, omnes intra circulum cadant. Fig. 31. c per 21. 3.

PROPOSITIO XXIX.

Fieri poteſt, vt ad obiectum per ſpatium longiſſimum accedas, vel recedas, & tamen æquè magnum ſemper appareat.

SIt AB longitudo alicuius vrbis, ſiue muri, vel etiam duorum montium turriumúe interuallum. Per extrema huius puncta A, B, deſcriptus intelligatur circulus quantumuis magnus, cuius diameter ex.gr. milliare vnum alterumue adæquet. Oculo per totam BODA peripheriam incedenti ſub æqualibus ſemper ſpectabitur angulis AOB, AEB, ADB, ACB interuallum datum AB. Quantumuis igitur per dictum arcum accedas recedaſue ad AB, eâdem hæc ſemper magnitudine apparebit. Fig. 27.

Ex theorematis iam allatis (quod etiam in ſequentibus vſu veniet) quamuis nonnulla, demonſtratione conueniant, differunt tamen applicatione ad res diuerſas; quam, quod non iniucunda fortaſſe lectoribus futura eſſet, minimè prætermittendum iudicaui.

PROPOSITIO XXX.

Quiuis arcus maximi in cælo circuli duplo maior apparet in terrâ, quàm in cælo.

ESto maximus in cælo circulus BFD, eiuſque arcus BC, tellus autem in centro A, quæ ad cælum eſt puncti inſtar. Sumatur deinde in circulo punctum D quantumuis vicinum arcui BC, vel quantumuis remotum, ducanturque radij BA, CA, BD, CD. Per 20.3. angulus ad centrum A duplo maior eſt angulo D ad circumferentiam. Ergo arcus BC duplo maior apparet in terrâ, quàm in cæli puncto D, quantumuis arcui propinquo. Fig. 32.

PROPOSITIO XXXI.

Datur locus quem videri totum eſt impoſſibile.

TAlis eſt, qui duobus ſemicirculis ac binis tangentibus AB, CD continetur. Supponitur autem eius ambitum viſui peruium non eſſe, Fig. 33.

Digitized by Google

PROPOSITIO XXXIV.

Circuli quantumuis obliquè viſi omnes diametri æquales apparent ex diſtantiâ à centro, quæ ſemidiametro ſit æqualis. Non tamen circulus eo caſu apparet vt circulus directè ſpectatus.

D*Emonſtratur 1. Pars.* Eſto circulus DACB, cui ad centrum Q inſiſtat recta ſemidiametro Fig. 35.
æqualis QO quantumuis obliquè. Dico nihilominus circuli dati diametros viſas ex O apparere æquales: quod ſic oſtendo. Ducatur in circulo diameter DQC. Quoniam QO æqualis eſt ſemidiametro circuli QDACB, erit punctum O in ſuperficie eius ſphæræ, quæ producitur à circulo dicto. Hanc ſphæram ſeca plano per rectas DC, QO: patet ſectionem fore maximum circulum, cuius diameter DC. Ductis igitur rectis DO, CO, angulus DOC, ſub quo ex O ſpectatur diameter DC, rectus a eſt, vtpote exiſtens in ſemicirculo DOPC. a per 31 3.
Eodem modo demonſtrabimus diametrum AB, & quaſcumque alias ſpectari ex O ſub recto angulo. Ergo diametri omnes circuli DACB viſæ ex O, apparent æquales. Quod erat primum.

Demonſt. 2. Pars. Vt circulus obliquè viſus appareat inſtar circuli directè ſpectati, deberent nõ ſolum omnes diametri, ſed etiam omnes ſemidiametri æquales apparere. Atqui apparent inæquales. Nã cùm ex hypotheſi QO ſemidiameter obliquè inſiſtat circulo QDACB, inæquales erunt anguli DQO, CQO, vno caſu excepto, quo recti ſunt. Quare cùm rectæ QD, QC æquales ſint, patet angulos DOQ, COQ, inæquales exiſtere. Semidiametri igitur QD, QC ex O viſæ, apparent inæquales, quod ipſum de cæteris eodem modo demonſtrabitur. Neque illæ ſolùm quæ ſibi mutuo ſunt indirectum, ſed etiam aliæ, AQ, QD &c. inæquales apparent, quia anguli quoque AOQ, DOQ ſunt inæquales, vt b ab alijs eſt demonſtratum. Circulus b Eucl. Vuell. Aguilonio.
igitur QDACB non apparet hic vt circulus directè ſpectatus. Quod erat alterum.

Corollaria.

1. *Nullo caſu circulus obliquè viſus apparere inſtar directè ſpectati circuli poteſt.*

Nam ſi id fieri vnquam poſſet, tum certè contingeret, quando oculus à centro abeſt interuallo ſemidiametri. At ne tum quidem iſtud accidere parte ſecundâ *prop. præcedentis* iam demonſtrauimus. Ergo nunquam.

Euclides Perſpect. *prop.* 41. & Aguilonius *lib.* 4. *prop.* 66. in ipſâ determinatione propoſitionis, & inprimis pag. 289. paulò ante conſectarium & in conſectario ipſo, putauerunt circulum obliquè viſum ex diſtantiâ à centro quæ ſit æqualis ſemidiametro, apparere vt circulum; quod ad ſenſum propoſitionis noſtræ verum non eſt.

2. *Circulus in caſu propoſitionis neque vt circulus apparet, neque vt ellipſis directè ſpectata.*

Non vt circulus, quia, vt iam a oſtenſum eſt, ſemidiametri apparent inæquales. Non vt ellipſis, quia æquales apparent diametri, vt oſtenſum eſt *parte* 1. *prop.* Ergo nec vt circulus, a parte 2. propoſ.
nec vt ellipſis.

3. *Circulus maximus oculo per ſphæræ ſuperficiem circumducto ſibi ipſi diſſimilis, & tamen ſemper æqualis apparet.*

Quod ſemper æqualis appareat, oſtenſum eſt *prop.* 33. Quod tamen ſibi ipſi diſſimilis videatur, ſic oſtendo. Si oculus ponatur in polo maximi circuli, is apparebit vt circulus, quia non ſolùm diametri, ſed etiam ſemidiametri æquales apparebunt: ſi verò oculus ſtatuatur extra polum in alio quocumque puncto ſuperficiei ſphæricæ, tunc maximus circulus ſpectabitur obliquè ex diſtantiâ pari ſemidiametro, ac proinde per *coroll.* 2. nec vt circulus apparebit nec vt ellipſis, & infinitas ſubibit quoad ſemidiametros apparentiarum varietates. Ergo &c.

PROPOSITIO XXXV.

Circulus obliquè viſus ex diſtantiâ à centro maiore vel minore quàm ſemidiameter, apparet alterâ parte longior: non tamen vt ellipſis directè ſpectata.

CIrculus ZBECD ſpectetur obliquè ex A ſub cono ſcaleno BEACD. Ex A ad planum Fig. 36.
in quo circulus datur, perpendicularis demittatur AF. Ex F per centrum circuli Z 37.

ducatur FCB, atque ad hanc perpendicularis per centrum EZD. Si AZ diſtantia oculi à centro Z ſit maior ſemidiametro ZC, inter omnes dati circuli diametros maxima apparet ED, minima BC; ac proinde circulus apparet longior ad ED, contractior ad BC: ſi diſtantia AZ eſt ſemidiametro minor, maxima apparet BC, minima ED, adeóque circulus longior apparet ad BC, contractior autem ad ED. Quod erat primum aſſertionis membrum. Demonſtrationem vide apud Vitellonem *lib.4. prop.* 55, & 56 vel Aguilonium *lib.* 4. *prop.* 65 & 66.

Neque diametri ſolùm, ſed etiam (quod ab iiſdem Authoribus oſtenſum eſt) ſemidiametri omnes apparent inæquales tam eæ quæ ſibi mutuo ſunt indirectum vt BZ, CZ, quàm quæ angulum efficiunt, vt BZ, NZ. Atque inde veritas etiam ſecundæ partis innoteſcet, quâ aſſeritur circulum in hypotheſi datâ, quamuis oblongus videatur, non tamen apparere vt ellipſim, directo ſcilicet viſu conſpectam. Nam ellipſeos directè viſæ inæquales quidem apparent primò diametri, deinde & ſemidiametri, quæ angulum efficiunt; at ſemidiametri quæ ſibi mutuo ſunt indirectum, omnes inter ſe æquales videntur, quæ omnia facilè lector per ſe oſtendet. Cùm igitur circulo obliquè viſi etiam ſemidiametri quæ indirectum ſunt inæquales appareant, patet eum licet obliquè, & ſub eodem cono quo ellipſis OP, aſpiciatur, non poſſe in caſu aſſertionis inſtar ellipſeos apparere.

Corollarium.

Ex hac propoſitione & *corollario 2 præcedentis* patet circulum obliquè viſum nullo caſu poſſe inſtar ellipſeos apparere.

Rurſum igitur diſſentio à Vitellone & Aguilonio, qui oppoſitum aſſeruère, hic quidem *lib.4. prop.66 & ſequentibus*, ille *lib.4. prop.*55. & 56. Fateor circulum dum obliquè cernitur, alterâ parte longiorem videri poſſe: ſed hoc non ſufficit vt inſtar ellipſeos directè ſpectatæ, appareat.

PROPOSITIO XXXVI.

Quemadmodum circulus, quantumuis obliquè viſus, nunquam apparet vt ellipſis; ita neque ellipſis, quantumlibet ſpectetur obliquè, apparebit vnquam, vt circulus directè ſpectatus.

Fig. 38.

a *per* 9 & 13 *lib* 1. *conic.*

PVtaui aliquando me oppoſitum demonſtraſſe hunc in modum. Supra circulum DBEC conus exiſtat rectus BFC, axem videlicet FA habens rectum ad baſim. Secetur conus plano ad axem obliquo. Sectio a ellipſis erit QGPM, cui axis occurrat in puncto O. Liquet hoc diuerſum eſſe à centro ellipſis K. Per O ducantur rectæ quotcumque GOM, QOP. &c.

Dico viſui poſito in F coni vertice æquales apparere tam rectas omnes GOM, QOP, quàm omnes OQ, OG, OP, OM.

Conus enim planis ſecetur per axem FOA, & rectas GOM, QOP tranſeuntibus, quæ in circulo DBEC producent diametros BAC, DAE. Quoniam circulus DBEC ex puncto F, ſpectatur directè, manifeſtum eſt æquales videri tam omnes diametros BAC, DAE, quàm omnes ſemidiametros AD, AB, AE, AC. Atqui GOM, QOP ſpectantur ſub iiſdem angulis, ſub quibus BAC, DAE; ſimiliter & OQ, OG, OP, OM ſub iiſdem ſpectantur angulis, ſub quibus AD, AB, AE, AC. Ergo etiam æquales inter ſe apparent tam GOM, QOP, quàm OQ, OG, OP, OM. Atque hoc non ſolùm in ellipſi QGPM, ſed etiam in quauis aliâ, imo & in parabolâ ac hyperbolâ continget.

Cùm igitur omnes lineę GM per O vtrimque ad peripheriam terminatæ, item omnes OQ quæ ex O ad peripheriam educuntur, æquales appareant; videtur ellipſis apparere inſtar circuli, eiuſque centrum apparens eſſe O.

Reſpondeo nihilominus hoc argumento non concludi propoſitum, cum clarum ſit vt ellipſis inſtar circuli appareat, non ſufficere quòd omnes lineę per aliquod punctum ductæ æquales appareant, ſed requiri, vt punctum illud ſit ipſum ellipſeos centrum verum; ac proinde requiri, vt omnes veræ tam diametri, quàm ſemidiametri æquales appareant. Quod cùm fieri non poſſit, nequit vnquam ellipſis apparere vt circulus.

Ex

Ex his patet etiam hìc falli Aguilonium, qui *lib.*4. *prop.*72.& 73 oppoſitum affirmat. Equidem non diffiteor longitudinem maiorem ellipſeos contrahi ex aſpectus obliquitate: at nego iſtud ſufficere, vt tanquam circulus directè ſpectatus appareat.

PROPOSITIO XXXVII.

Quò longiùs abes à ſphærâ, eò maiorem partem conſpicies; eò minorem, quò propiùs. Sed quò pars conſpecta fuerit maior, eò apparebit minor; quò minor, eò maior apparebit.

SIt oculus primùm in C, deinde in B. Vel ex ipſo ſchematis conſpectu patet rectas *Fig.* 40.
ſphæram tangentes ex puncto remotiori B, includere ſphæræ portionem IOP maiorem portione SPQ, quam includunt tangentes ex C puncto viciniori. Quare cùm id ſolùm ex ſphærâ videatur, quod à tangentibus ab oculo ductis includitur, pars maior videbitur ab oculo cùm remotior eſt. Verùm illa ipſa apparebit minor, quia angulus OBI minor eſt [o] angulo NCR, hoc eſt QCS. o *per* 21. 1.

PROPOSITIO XXXVIII.

Sphæræ pupillâ minoris dimidium videri nequit oculo vno: videbitur autem dimidium ſi pupillæ æqualis fuerit, & pluſquam dimidium, ſit maior.

DIſtet oculus à ſphærâ quantumlibet in B, à quo tangentes ducantur BI, BO. Ex centro autem rectas emitte AO, AI, AB. Quoniam in triangulis ABO, ABI, anguli BOA, *Fig.* 40.
BIA ad contactus [c] recti ſunt; erunt OAB, IAB ſinguli recto [d] minores, ac proinde ambo ſimul minores duobus rectis. Igitur lineæ OA, IA, non ſunt [e] in directum, ſed angulum efficiunt verſùs oculum B inclinatæ. Ducatur ergo per A centrum recta DAE. Erit ſphæræ portio DPE maior portione OPI à tangentibus BO, BI comprehenſa, quæ ſola ſpectari poteſt ex B. Atqui portio DPE hemiſphærium eſt. Ergo OPI portio viſa ex B hemiſphærio minor eſt.

c *per* 18.3.
d *per* 32.1.
i *per* 14.1.

Idem breuiter ſic oſtendes. Cùm portio maior videri nequeat eâ, quam tangentes ſphæram & pupillam intrare valentes comprehendant, ad videndum hemiſphærium DPE pupillâ maius, opus eſſet vt radij DX, EZ, qui ſphæram tangunt ad diametri extremitates D, E, verſùs oculum concurrerent, aliàs enim intromitti in oculum per pupillam non poſſent. Atqui tangentes DX, EZ, nequeunt concurrere; cùm enim anguli ADX, AEZ ſint [m] recti, DX, EZ [n] æquidiſtant. Ergo nunquam poteſt videri integrum hemiſphærium pupillâ maius. Atque inde iam patet etiam pars 2 & 3. Si enim ſphæra ſit pupillæ æqualis, poterunt radij tangentes DX, EZ hemiſphærium includentes per pupillam intromitti: & ſi ſphæra ſit pupillâ minor, intrare pupillam poterunt etiam tangentes quæ portionem verſùs oculum hemiſphærio maiorem comprehendunt.

m *per* 18.3.
n *per* 29.1.

Nota. *Cùm ſphæra corpus ſit, pupilla verò non aliud quàm foramen circulare, non poteſt hæc illi æqualis eſſe, aut maior minorúe. Quando igitur breuitatis cauſâ æquales dixi aut minores, maioreſúe, hæc dicta de diametris intellige.*

Corollarium.

Cùm ſphæra ab oculo valde diſtat, vt Luna, Sol, Planetæ ac ſtellæ, pars viſa hemiſphærio inſenſibiliter minor eſt.

PROPOSITIO XXXIX.

Cùm ſphæræ diameter maior eſt vtriuſque oculi interuallo, nequidem vtroque oculo hemiſphærium integrum videri poteſt: poteſt autem, ſi ſphæræ diameter ſit interuallo oculorum par, & pluſquam hemiſphærium, ſi minor.

VIde demonſtrationem ſecundam præcedentis, quæ huic facilè applicabitur.

PROPOSITIO XL.

Sol plus illuminat quàm dimidium Terræ, Luna minus dimidio.
Fieri poteſt, vt Lunæ numquam minor portio illuminetur, quàm dum nobis apparet plena.
Sol numquam minorem terræ partem illuminat quàm æſtate mediâ; numquam maiorem, quàm mediâ hyeme.

HOrum veritas vel ex ſolâ ſchematum inſpectione intelligetur, hoc vno obſeruato, portionem obſcuri corporis nonniſi eam illuminari, quam radij tam obſcurum quàm lucidum tangentes, ex obſcuro verſùs lucidum comprehendunt.

Fig. 41. Sit enim Sol A, terra B. Quia Sol maior eſt terrâ, radij vtrumque tangentes CE, DF, portionem Terræ verſùs Solem comprehendunt EGF maiorem hemiſphærio. Atqui portio EGF ea eſt quam Sol illuminat. Ergo Sol illuminat plus quàm Terræ [a] hemiſphærium. Sit iam Luna B, Terra A. Cùm Luna ſit Terrâ minor, radij vtramque tangentes EC, FD ex Terrâ verſùs Lunâ includunt portionem CND minorem hemiſphærio. Ergo Luna minus illuminat quàm hemiſphærium Terræ. Quod erat primum.

a vide Aſtron. l. 4. num. 18.

Fig. 42. Sit deinde Sol A; Luna primùm in B, deinde in C. Manifeſtum eſt portionem QSP à tangentibus ex Lunâ propinquiore in B comprehenſam, eſſe maiorem portione NXO quæ à tangentibus comprehenditur ex Lunâ remotiore in C; ac proinde quò remotior eſt à Sole Luna, eò minorem eius partem illuminari. Atqui remotiſſima ſubinde eſt cùm nobis plena apparet, quando nimirum Soli apogeo opponitur. Fieri ergo poteſt vt Lunæ numquam minor portio illuminetur à Sole quàm dum plena eſt. Quod erat ſecundum.

Fig. 42. Poſtremò ſphærulæ B, C iam Terram repræſentent, Solem (vt priùs) A. Portio Terræ illuminata NXO, cum Sol abeſt longiùs, minor eſt portione illuminatâ QSP, cùm ab eâ Sol abeſt propiùs, vt patet ex dictis ſupra. Atqui æſtate mediâ Sol eſt in Apogeo Eccentrici, hoc eſt remotiſſimus à terrâ, in hyeme eſt in Perigeo, adeoque viciniſſimus. Ergo Sol numquam minorem Terræ partem illuminat, quàm æſtate mediâ, numquam maiorem quàm mediâ hyeme. Quod erat tertium.

Facilè iſta demonſtrabit Geometricè lector elementis vtcumque tinctus.

PROPOSITIO XLI.

Cylindro & oculo poſitione datis, portionem Cylindri vno oculo viſam exhibere.

Fig. 43. DAtus ſit Cylindrus BG, & oculus in A. Per oculum A planum agatur baſibus Cylindri parallelum, quod in Cylindro producet circulum [a] MKPN: hunc ex A [b] tangant in N & K rectæ AN, AK. Per NK ducatur planum axi SQ parallelum, quod producet in Cylindri ſuperficie [c] rectas OND, HKE.

a per 5. Sereni. b per 17. 3. c patet ex ſerem. p. 3. l. 1.

Dico portionem OFHEBD videri ab oculo in A conſtituto, & non ampliùs.

Ducatur enim planum per tangentem AN & rectam OND; item aliud per tangentem AK & rectam HKE. Manifeſtum eſt hæc plana Cylindrum tangere in rectis OND, HKE. Manifeſtum quoque eſt omnes radios qui ab oculo A prodeuntes Cylindrum tangunt, in

dictis

dictis planis tangentibus exiſtere & Cylindrum tangere in punctis rectarum OND, HKE, in quibus Cylindrum tangunt ipſa plana. Patet igitur ab oculo A videri portionem HFODBE & ſolam.

Corollarium

Portio Cylindri vno oculo conſpecta eſt minor Cylindri dimidio. Si nimirum latitudo Cylindri ſit maior diametro pupillæ. Eodem modo propoſitio 37 Cylindro applicabitur.

PROPOSITIO XLII.

Detur conus BHC, & oppoſitus illi KHG, infinitus vterque. Dico, ſi oculus ponatur in quouis puncto ſuperficiei coni oppoſiti, vel quouis puncto intra eam, ſpectari totum conum BHC. *Fig. 46.*

EXiſtat oculus in quouis oppoſitæ ſuperficiei puncto M, & in ſuperficie coni BHC detur punctum quoduis O. Secetur vterque conus plano per axem & per M producente triangula BHC, KHG. Deinde per M & O planum agatur rectum ad triangula, producens in earum plano rectam MZT, in ſuperficie autem coni BHC lineam curuam LOZV; quæ erit [a] hyperbola, latus habens tranſuerſum ZM; quo biſecto in R erit R centrum hyperbolæ. Cùm igitur tangentes hyperbolam concurrant omnes cum diametris inter [b] centrum R & verticem Z, patet hyperbolam LOZV totam, adeoque & punctum O, videri in R, ac proinde etiam in M, & vltra M intra conum KHG. Cùm igitur O ſit punctum quodcumque ſuperficiei conicæ BHC, liquet eam videri totam in M puncto quouis ſuperficiei coni oppoſiti. Eadem erit demonſtratio ſi oculus ponatur vbiuis intra ſuperficiem KHG.

a per 12. 1. conic.
b per 31. 1. conic.

PROPOSITIO XLIII.

Cono atque oculo poſitione datis portionem coni vno oculo viſam exhibere.

DAtus ſit conus BHC. Per coni verticem ducatur αHN baſi BDCα parallela. *Fig. 44.*

CASVS 1.

Sit primò oculus infra parallelam HN in A. Seca conum plano ad baſim parallelo. Sectio erit [d] circulus ZOFS, quem ex A [i] tangant rectæ ASV, AOY, in S & O. Secetur deinde conus alio plano per verticem H & contactuum puncta S, O: ſectio erit [m] triangulum DHα, cuius latera HD, Hα erunt in coni ſuperficie. Dico videri ab oculo in A portionem BHDα, quæ minor eſt coni dimidio.

d per 4. 1. conic.
i per 17. 3.
m per 3. 1. conic.

Concipiatur enim per rectam HSα, & tangentem ASV planum infinitum, itemque aliud per rectam HOD & tangentem AOY. Hæc plana conum tangunt in rectis HSα, HOD, eorumque ſectio communis eſt recta AHX, in quâ oculus. Omnes ergo radij, qui profecti ab oculo A conum contingunt, in planis dictis exiſtunt, & conum tangunt in punctis rectarum Hα, HD, in quibus eumdem tangunt plana ipſa. Ergo oculus in A conſtitutus videt portionem DBHα; quam patet eſſe coni dimidio minorem.

CASVS 2.

Sit deinde oculus ſupra parallelam αHN, ſed extra conum oppoſitum ↓Hζ, ex. gr. in X. Per X & verticem coni duc rectam XHβ. Sumptoque in Hβ puncto quouis A per id ſeca conum plano baſi parallelo. Sectio rurſum erit circulus ZOFS; quem ex A tangant ASV, AOY, in punctis O, S: ductoque plano per O, S, H, producatur in cono triangulum DHα.

Dico videri ab oculo in X portionem HDαCH, quæ maior eſt coni dimidio.

Concipiantur enim rurſus per trianguli latera HSα, HOD, & tangentes ASV, ADY plana infinita. Hæc ſe mutuo interſecabunt rectâ AHX, & conum contingent in rectis HSα, HOD. Cùm ergo oculus X ſit in communi planorum ſectione, liquet radios omnes, qui ab oculo prodeuntes conum contingunt, exiſtere in dictis planis, conumque contingere in

punctis

punctis rectarum HSω, HOD, in quibus plana ipſa conum contingunt. Ex quo patet oculum in X ſupra parallelam NHω conſtitutum, cernere portionem HDωCH, quæ maior eſt coni dimidio, cum baſis eius DCω ſit maior ſemicirculo.

CASVS 3.

Fig. 45. Sit oculus poſtremò in ipſâ parallelâ ωHN extra verticem coni H.

Dico videri coni dimidium.

Per rectam HN & coni axem HE ducatur planum ſecans baſim coni diametro BEC, quæ erit parallela ad HN, cùm ipſa HN per hypotheſim ſit baſi coni parallela. Ducatur deinde diameter DEω perpendicularis ad BC, & conum tangant in D & ω rectæ PD, Oω, quas patet eſſe parallelas ad BC, adeoque etiam ad NH. Cono tandem ſecto per axem HE, & diametrum Dω triangulum exiſtat DHω, cuius latera Hω, HD ſunt in coni ſuperficie. Iam quia Oω, NH ſunt parallelæ, adeoque in vno plano, etiam Hω in vno * eum ipſis plano erit. Per tres igitur rectas HN, Hω, Oω extendi planum poteſt, quod cùm tranſeat per tangentem Oω, conum in rectâ Hω continget. Eodem modo per rectas PD, DH, HN tranſit planum quod tangat conum in rectâ HD. Cùm igitur oculus exiſtat in rectâ HN ſectione communi planorum dictorum, patet omnes radios, qui ab illo profecti conum tangunt, exiſtere in planis prædictis & conum tangere in punctis rectarum Hω, HD, ac proinde videri portionem HDBω, quæ per conſtr. eſt coni dimidium.

* per 7. 11.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 44. Per coni verticem H ducatur recta XHM vtrimque infinita, baſi BDCω non æquidiſtans, oculus incedens per infinitam HM eamdem ſemper portionem coni intuebitur: incedens verò per infinitam HX, ſpectabit ſemper portionem quæ complementum eſt prioris.

SEcetur conus circulo quocumque ZOFS, cuius planum occurrat infinitæ XHM in A. Ex A circulum tangant AOY, ASV. Per contactus O, S, & verticem ſecetur conus triangulo DHω. Plana infinita per tangentes ASV, AOY & trianguli latera HSω, HOD conum tangent in rectis Hω, HD, & eorum ſectio communis erit ipſa recta infinita, XHA. Patet igitur oculo perambulante rectam HMA quantumcumque productam ſemper conſpici portionem HDBω planis tangentibus incluſam; oculo autem incedente per rectam HX etiam quantumlibet protractam perpetuò cerni portionem alteram HDCω ab iiſdem planis versùs YX incluſam.

Quodſi oculus incedat per rectam NHω baſi parallelam, ſpectabit ſemper coni dimidium, quantumcumque, ſeu versùs ω, ſeu versùs N à cono elongetur.

Patet ex caſu 3 præcedentis.

PROPOSITIO LXV.

Fig. 44. Si oculus fuerit infra lineam ωHN, quæ per coni verticem H ducitur baſi parallela, quò radius (MH) ab oculo ad coni verticem emiſſus, maiorem cum axe HP angulum effecerit (MHP), eò plus de cono intuebitur. Si autem fuerit ſupra parallelam ωHN & extra conum oppoſitum ψHζ: quò radius ab oculo ductus ad verticem cum axe HS producto, maiorem fecerit angulum (QHS), eò ſpectabit de cono minus.

SI oculus infra parallelam in G & per G ac verticem H ducatur recta GHL. Tum per G ducto plano ad baſim parallelo producatur in cono circulus ZOFS: hunc ex G tangant rectæ GQ, GR. Conſpiciet oculus in G portionem HQφBTRH planis tangentibus infinitis GHR, GHQ incluſam vt patet ex caſu 1. *prop.* 43. Quodſi oculus ſtatuatur ſupra NHω

Digitized by Google

NHω in puncto quopium ϑ rectæ GHL, quæ communis eſt ſectio planorum tangentium, conſpiciet portionem HQφCTRH, vt patet ex *caſu 2. prop.* 43.

Ponatur deinde oculus in M, à quo per coni verticem ducta MHX efficiat cum axe HP angulum MHP maiorem præcedenti GHP. Occurrat autem planum circuli FOZS ipſi XHM in A, & ex A circulum tangant rectæ AO, AS. Includent illæ portionem circuli OZF maiorem portione QZR, adeóque & plana tangentia infinita AHS, AHO includent coni portionem HODBαSH. maiorem portione HQφTRH. Atqui oculus in A videt portionem HODBαSH. Ergo oculus, cùm maior eſt angulus MHP, plus de cono intuetur. Quod ſi oculus ſtatuatur ſupra NHω in Q puncto aliquo rectæ AHX, quæ planorum tangentium eſt ſectio communis, conſpiciet [a] portionem HODCαSH minorem portione HQφCTRH, *a per caſ. 2. p. 43.* quam videbat exiſtens in ϑ vbi recta ab eo ad verticem coni emiſſa angulum cum axe PH producto faciebat ϑHS minorem angulo QHS.

PROPOSITIO XLVI.

Oculus à cono (BHC) recedens per lineam (ZA) baſi parallelam *Fig.44.* infra verticem (H), quò recedit longiùs, eò plus de cono intuebitur, eò autem minùs, quo recedet longiùs per baſi parallelam ſupra verticem.

SIt oculus primò in ipſius ZA puncto G, & ex G ad verticem ducatur recta GH: ſit autem coni axis HP. Procedat deinde ex G in A, ducaturque recta AH. Erit angulus AHP, maior angulo GHP. Ergo per *præced.* plus de cono ſpectatur in A puncto remotiori parallelæ ZA, quàm in G viciniori. Quod erat primum.

Sit deinde oculus ſupra verticem H, in rectæ πϑ baſi parallelæ puncto λ, ducaturque λH. Inde verò procedat in Q, iungaturque QH. Angulus igitur QHS quem conſtituit QH cum PH axe producto in S, maior eſt angulo λHS. Ergo per *præced.* oculus in Q remotior minus de cono intuebitur, quàm in λ vicinior: quod erat alterum.

PROPOSITIO XLVII.

Oculus à cono dato (BHC) verſus conum ſibi oppoſitum (KHG) *Fig 46.* aſcendens, quò aſcenderit altiùs, eò plus de cono dato intuebitur.

DVcatur recta vtrique cono occurrens CX, & ſit oculus primùm in puncto A, ex quo ad verticem H ducatur recta AH, per verticem verò ipſum ſit NHQ baſi parallela. Ex A deinde procedat oculus in E, ducaturque recta EH. Axis autem coni eſto PHω. Quoniam angulus EHP maior eſt angulo AHP, plus de cono videbitur in [a] E, quàm in A. Vbi verò *a per p. 45.* peruentum fuerit in I ad parellelam NHQ, ſpectabitur coni [b] dimidium, adeóque plùs quàm *b per caſum 3. p. 43.* in quouis puncto infra I, cùm id quod de cono ſpectetur infra I, ſit [c] minus ſemper coni dimidio. Aſcendat deinde oculus ex I in F, & inde in S, ac tandem pertingat ad conum oppoſitum in X, ducanturque rectæ FH, SH. Quia in F ſpectatur plus quàm [d] coni dimidium, in *c per caſ. 1. ibid.* I verò dimidium; plus de cono videbitur in F quàm in I. Quia verò angulus SHω minor eſt *d per caſ. 2. ibid.* angulo FHω, plus de cono ſpectabitur [i] in S, quàm in F. Atque ita pars viſa coni perpetuò *i per p. 45.* adaugebitur, donec tandem in X totus videatur conus BHC.

PROPOSITIO XLVIII.

Datæ ſint hyperbolæ oppoſitæ QZ, BS, quarum axis tranſuerſus *Fig. 47.* BQ, & centrum X, ex quo perpendiculariter ſit erecta XA potens quartam partem figuræ.

Dico hyperbolas quantumcumque productas atque ab inuicem diuaricatas, ſi conſpiciantur ex A, æquidiſtantes apparere.

EX centro X ducatur infinita XO perpendicularis ad BQ, atque inter hyperbolas quotuis ponantur rectæ SZ ad XO perpendiculares SZ hyperbolarum interualla ſemper creſcentia

ſcentia exhibentes. Ea verò manifeſtum eſt ita creſcere, vt quâuis longitudine datâ euadant maiora. Demonſtrandum igitur eſt hæc interualla omnia ex A conſpecta inter ſe æqualia apparere.

Fig. 48. 47. Fac MF æqualem BQ, quâ biſectâ in C, ex C duc CA perpendicularem ad MF & æqualem ipſi AX. Ex A per F duc infinitam AV, & ex A infinitam AR perpendicularem ad CA, adeóque & parallelam ad MF. Circa AR tanquam axem in orbem acta AV deſcribat conum rectum, qui ſectus plano ad AR axem recto, exhibeat circulum QHP, ſectus autem per axem AR & parallelam axi MF, plano alio triangulum exhibeat QAP, cuius baſi QP ipſa MF occurrat in I, & ex I ducatur IH perpendicularis ad QP. Tum denuò conus ſecetur plano per rectas MFI, IH, quâ ſectione producatur in coni ſuperficie curua linea FGH.

Latus coni PA productum occurrat rectæ IFC in Y. Quoniam CFI, AR æquidiſtant, erit angulus CFA æqualis ſibi alterno FAR: ſed hunc, quia conus rectus eſt, liquet æqualem a per conſtr. eſſe angulo RAP. Ergo CFA ipſi RAP æqualis eſt. Atqui ob parallelas [a] IFCY, AR, etiam angulus IYP æquatur ipſi RAP. Ergo CFA, & IYP, ſeu CYA, æquales ſunt. Anguli autem YCA, FCA per conſtr. recti ſunt. Cùm igitur in triangulis YAC, FAC duo anguli dicti ſint æquales & latus CA commune; etiam YC, FC æquales erunt. Atqui per conſt. etiam MC ipſi FC æqualis eſt, æquantur igitur YC, MC. Quare punctum Y, in quo latus coni PA b per 12. 1. conic. occurrit ipſi IFC, idem eſt cum puncto M. Linea igitur [b] FGH hyperbola eſt, cuius diameter tranſuerſa eſt MF, centrum C, ordinatim applicata HI. Neque ſolùm MF diameter eſt, c per conſtr d per conſtr ſed etiam axis; cum enim AR ſit recta plano [c] QGH, etiam MFI parallela [d] ad AR, eſt eidem i per 8 11. [i] plano recta; ac proinde angulus MIH, quem HI ordinatim applicata facit cum diametro, m per def. 3. 11. rectus [m] eſt. Præterea [n] ab alijs eſt demonſtratum rectam AC poſſe quartam partem figuræ n per eand. quæ ſit ad axem hyperbolæ FGH. Cùm igitur tranſuerſus axis MF ſit æqualis dato axi o per 8. 11. tranſuerſo BQ, & AC potens quartam figuræ partem hyperbolæ FGH æqualis ſit rectæ AX, a Bettinus apiario 3. pag. 26. potenti quartam figuræ partem hyperbolæ QZ, liquet hyperbolam FGH eandem eſſe cum datâ QZ. Præterea quia iam oſtendi MFI eſſe plano QPH rectam, recti [o] erunt anguli MIP, MIH. Ergo RI ad planum hyperbolæ FGHI recta eſt per 4. 11. Atqui AC eſt parallela ad RI, cùm ACI per conſtr. rectus ſit, & RIC, ſeu MIP ex paulò ante demonſtratis. Ergo etiam AC ad hyperbolæ planum [p] recta eſt. Quare cùm AC etiam par ſit ipſi AX, ſi oculus ponatur in vertice coni A, eundem habebit ſitum ad hyperbolam FGH, qui datur reſpectu hyperbolæ QZ. Poſtremò in hyperbolæ plano ducatur ex centro C infinita CD perpendicularis ad axem FM, interque eam & hyperbolam rectæ quotuis EG, EG perpendiculares ad CD. Liquet CD fore XO, & EG, EG fore ZO; ZO. Quare cùm in cono habeantur conditiones omnes theorematis dati, ſi oſtendero interualla omnia CF, EG, EG viſa ex altitudine CA inter ſe apparere æqualia, oſtenſum pariter erit, interualla XQ, OZ, OZ, viſa ex altitudine XA, inter ſe æqualia apparere. Id porro hunc in modum præſtabitur.

Ducantur rectæ AE, AE, & AG, AG, quæ erunt in coni ſuperficie. Quoniam recti ſunt q per conſtr [q] anguli DCI, ACI, erit IC recta plano [r] DCA. Ergo axis RA ipſi IC per conſtr. æquidi- r per 4. 11. ſtans, eidem plano [s] DCA rectus eſt. Quare anguli CAR, EAR omnes ſunt recti, & æquales. s per 8. 11. Deinde quia tam FC quàm EG ſunt perpendiculares ad CD, erunt CF, EG [u] parallelæ. Sed u per 6. 11. etiam parallelæ erant [x] CF, AR. Ergo & EG, AR ſunt parallelæ, adeóque in vno plano exi- x per conſtr ſtunt. Quare etiam AG illas connectens cum ipſis AE, AR [z] in vno plano exiſtet. Angulus z per 7. 11. igitur FAR pars eſt recti anguli EAR. Cùm autem ex conſtr. in vno plano ſint CA, FA, AR, etiam angulus FAR pars eſt recti anguli CAR. Iam quia conus per conſtr. rectus eſt, liquet omnes angulos FAR, GAR, æquales exiſtere. Atqui oſtendi ſupra æquales eſſe omnes CAR, EAR. Ergo ſi ab his æqualibus demas æquales, FAR, GAR, reliqui CAF; EAG æquales erunt. Interualla igitur CF, EG, viſa ex altitudine CA, hoc eſt (vt oſtendi ſupra) interualla XQ, OZ viſa ex altitudine XA, inter ſe æqualia apparebunt. Ergo etiam interualla BX, SO, adeóque & interualla tota BQ, SZ, SZ viſa ex altitudine AX, quæ poſſit quartam partem figuræ, apparebunt æqualia; hoc eſt hyperbolæ BS, BZ æquidiſtantes apparebunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIX.

Phaſes Lunæ exponere.

REm omnem aliquot aſſertionibus quaſi punctis complectar.

1. Quamuis id quod de Lunâ cernimus, ſit hemiſphærio minus; tamen quia ob in- a per corol. p. 38. gentem diſtantiam [a] inſenſibiliter differt ab hemiſphærio, poteſt aſſumi pro hemiſphærio, & circulus partem viſam à non viſâ diſcriminans, pro maximo Lunę circulo haberi.

2. Pari

2. Pari modo quamuis portio Lunæ à Sole illuminata ſit maior hemiſphærio, quia tamen ob ingentem à Sole diſtantiam inſenſibiliter ab hemiſphærio differt, aſſumi etiam poteſt pro hemiſphærio, & circulus partem illuminatam ab obſcurâ ſeparans, pro circulo maximo.

3. Ex his ſequitur, quod de hemiſphærio illuminato à nobis conſpicitur extra plenilunium, id duobus maximis ſemicirculis comprehendi, quorum vnus ACB eſt medietas maximi circuli ACBD qui hemiſphærium viſum à non viſo diſtinguit, alter AIB eſt medietas maximi circuli, qui hemiſphærium lucidum ſeparat ab obſcuro. *Fig.* 49. 50. 51. 52

His poſitis, per Oculum & Lunæ centrum Z planum agatur rectum circulo CBDA hemiſphærium viſum à non viſo ſeparanti, idque repræſentet recta AZB.

4. Itaque ſi hemiſphærium lucidum Lunæ ita à nobis ſit auerſum, vt (quod in Luminarium coniunctionibus accidit) ſemicirculus AIB congruat ſemicirculo ACB, nihil de hemiſphærio lucido conſpiciemus. *Fig.* 49.

5. Poſtquam verò Luna cœperit à Sole elongari, & ſemicirculus AIB ſupra circulum ACBD nonnihil attolli, pars ACBIA de lucido hemiſphærio à nobis viſa acutiſſimè corniculata apparebit ob ſemicirculorum eam comprehendentium vicinitatem, & acumen angulorum A ac B.

6. Poſt longiorem à Sole receſſum, quia ſemicirculi ACB, AIB maiores iam angulos A, B comprehendunt, pars lucida, quæ videtur, corniculata quidem, ſed minus acuta minuſque caua apparet. *Fig.* 50.

7. Paulò ante quadraturam primam, cùm ſemicirculus AIB coincidit cum plano AZB pars lucida apparet inſtar ſemicirculi & cauitas omnis euaneſcit, quia arcus AIB directè aſpicitur. *Fig.* 51.

8. Quando hemiſphærium illuminatum ita nobis obuertitur, vt ſemicirculus AIB incipiat cadere vltra planum AB versùs D, quod poſt quadraturam primam contingit, portio lucida nobis conſpicua ACBIA apparet gibboſa. *Fig.* 52.

9. Tandem lucido hemiſphærio (quod in oppoſitione Luminarium contingit) ita ad nos conuerſo, vt ſemicirculi AIB, ADB coincidant, totum lucidum hemiſphærium nobis conſpicuum redditur.

FINIS LIBRI PRIMI.

S

Æ

r.

&c.
t.Eius

ies per
E.
ſis eſt

mida-
modo

opti-

ctionis
ocu-
icitur,
riptio
ntelli-

itrum
*Fig.*1.

t, ſeu
itrum
do ſe-
ER3
proij-

*Fig.*1.
XEF:

ſe mu-
trian-
gulum

gulum LBE ſe mutuo interſecant in aliquâ rectâ, quæ ſit EK. Dicetur linea LE proijci in lineam Vitri EK. Pari modo linea QL proijcitur in rectam NK ſecundùm quam Vitrum & triangulum Opticum QLB ſe mutuo ſecant &c. Vocabitur autem NK imago, ſeu proiectio, ſeu apparentia rectæ LQ. Et ſic de alijs.

9 *Planum*, ſeu *ſuperficies proijcitur* in id planum, in quo pyramis Optica ſecatur à Vitro. In *Fig.* 1. ſuperficies FELQ proijcitur in planum FNKE, quod eſt cōmunis interſectio pyramidis opticæ BQLEF & Vitri: diciturque FNKE *Imago* plani QFEL.

In gratiam eorum qui planorum interſectiones minus capiunt, duas poſtremas definitiones aliter ſic expono.

10 *Linea recta proijcitur* in eam Vitri lineam quæ connectit imagines extremitatum lineæ proijciendæ.

Radius opticus LB occurrat Vitro in puncto K, ac proinde per *defin.* 7, punctum L ſit proiectum in punctum K. Recta EK in Vitro puncta E, K iungens erit proiectio, ſeu imago rectæ EL. Pari modo ſi puncta R & L proiecta ſint in Vitri pūcta M & K: dicetur recta RL proijci in rectam KM, puncta K & M connectentem. Deniq; ſi puncta Q & L proiecta ſint in puncta Vitri N & K, dicetur recta QL proijci in rectā NK, puncta N & K coniūngentē.

11 *Figurata quælibet ſuperficies proijcitur*, in eam Vitri partem, quæ continetur ab imagine circumferentiæ ipſius ſuperficiei. Sic quadrilateri FL circumferentia, hoc eſt 4 latera ambientia, QF, FE, EL, LQ ſint proiecta in 4 lineas Vitri FN, NK, KE, EF, dicetur ſuperficies FL, proijci in Vitri partem KFNE. Pari modo ſi 4 latera QS, SR, RL, LQ, proiecta ſint in 4 Vitri lineas NP, PM, MK, KN, dicetur quadrilaterum QRLS proijci in Vitri partem PKMN. Eritque hæc imago ipſius plani QRLS.

12 *Lineæ directæ* vocantur quæ cum Sectione concurrunt aut poſſunt concurrere. Sic in plano inferiori lineæ directæ ſunt SF, 10D, RE, quia concurrunt cum ſectione FE. In plano laterali ſupra horiz. erecto, directæ lineæ ſunt 8δ, 7G, 6α &c. vtpote concurrentes cum ſectione TF. In plano ſuperiori directæ ſunt 2T, 94.3x quia concurrunt cum ſectione Tx.

13 *Lineæ directæ perpendiculares* ſunt, quæ Sectioni ad angulos rectos occurrunt: *obliquæ* quæ ad angulos non rectos.

14 *Lineæ tranſuerſæ*, ſunt, quæ Sectioni æquidiſtant. Sic QL, & SR ſunt tranſuerſæ in plano horiz: quia æquidiſtant ſectioni FE: recta 23 in plano ſuperiori: recta 2S in plano laterali.

15 Angulus (RED) quem directæ faciunt cum ſectione, vocatur *Situs directarum*.

16 *Situs obiecti proijciendi rectus*, dicitur cùm directæ ſunt perpendiculares: *Situs* verò *obliquus*, eſt cùm directæ ſunt obliquæ.

17 *Altitudo Oculi*, eſt recta perpendicularis BC ab Oculo B ad horizontale planum demiſſa.

18 Punctum C, *punctum diſtantiæ*, vocabitur, & quæ ab eo ducitur ad FE ſectionem perpendicularis CD, dicatur *Oculi diſtantia*.

19 Si ab oculo B ducta fuerit recta BA directis lineis æquidiſtans & Vitro occurrens in A: Punctum A dicetur *Punctum Oculi*, *Punctum concurſus*, *Centrum proiectionis*, quòd ad iſtud omnium directarum ipſi BA æquidiſtantium imagines EM, DV, FP, δR, GM, αϑ, Tω, 4Z, Xπ, &c. confluant, in eoque ſi producantur, concurrant. Vt demonſtrabitur *prop.* 1.

20 Recta quæ per centrum proiectionis A ducitur ad horizontem parallela *Horizontalis*, ſiue *Finitrix* dicatur. Eſt hæc eiuſdem cum Oculo altitudinis, vt patet ex *defin. præced.*

21 Rectæ, quæ à punctis, in quibus directæ ſectionibus occurrunt, ducuntur ad A centrum proiectionis, nimirum EA, DA, FA, δA &c. vocentur *Radiales*.

22 Rectæ quæ ab Oculo ad aliquod rei proijciendæ punctum ducuntur, vt BS, BR, BQ &c. *diamentales* appellentur, vel *radij optici*. Hæ ſecant radiales.

23 *Rectus Oculi ſitus*, ſeu *medius*, eſt cum perpendicularis è puncto diſtantiæ C ducta ad ſectionem FE, biſecat ſectionem, *obliquus*, cùm non biſecat.

24 Porro tres proiectionum differentiæ ſunt *Stereographica*, in quæ Oculus rem proijciendam tangit; *Ortographica*, quæ fit per radios opticos parallelos, ac proinde infinitam Oculi diſtantiam ſuppouit: *Schenographica*, quæ fit ad iuſtam Oculi diſtantiam. Hanc poſtremam, miſſis cæteris, hoc libro exponemus.

HYPOTHESES.

Quæ ſub æquali, ſiue eodem videntur angulo, æqualia & ſimilia apparent: quamuis inæqualia & diſſimilia ſint. Sic in *Fig.* 1. rectæ QL, NK Oculo B apparent æquales, quia ſub eodem ſpectantur angulo: item planum FNKE æquale ac ſimile apparet plano QFEL, quia ſub eo-

Digitized by Google

per *defin.* 10. recta FS proijcitur in rectã FP, quæ proinde ipſius imago eſt. Sed FP producta incidit in A. Imago igitur directę FS producta incidit in A. Eodem prorſus diſcurſu oſtendam imagines reliquarum directarum eſſe partęs rectarum radialium EA, DA, δA, GA, αA, TA, 4A, XA &c. quæ nimirum à punctis in quo directæ ſectionibus FE, TF, XT occurrunt, ducuntur ad A. Ergo directarum æquidiſtantium omnium imagines ſiue ſupra &c.

Ex propoſitione ſequentia deduco conſectaria.

Conſectarium I.

Quantumuis directæ lineæ extendantur in infinitum, earum proiectionęs accedunt quidem ſemper, nunquam pertingunt ad centrum A, ac proinde earum, imagines ſemper ſunt radialibus minores. Extendatur enim directa FS quantum placuerit ex.gr. vſque in 13: radius opticus ex puncto 13 ad Oculum B tendens, radialem FA ſecabit quidem ſupra P, ſed tamen neceſſariò infra punctum A, quòd BA, 13F ſint parallelæ, vnde proiectio ſiue imago directæ FS quantumuis productæ ſemper erit minor radiali FA. Pari modo in plano laterali 2TFS, quoniam BA, δ8 ſunt parallelæ, radius opticus ab extremitate δ8 quantumuis productæ ad Oculum B emiſſus, neceſſariò ſecabit radialem δA infra A. Idemque accidet in plano ſuperiori. Quare &c.

Conſectarium II.

Directarum vt ER, FS, δ8, &c. infra Oculum exiſtentium imagines, EM, FP, δR &c. in Vitro aſcendunt, exiſtentium verò ſupra Oculum vt α6, T2, 49, &c imagines α3, Tω, 4Z &c. deſcendunt. Ipſius autem G7 quæ eiuſdem cum Oculo altitudinis eſt, imago (Gμ) incidit in ipſam finitricem GAH.

Conſectarium III.

Si alię fuerint directæ FO, DZ, EK &c (*vide Fig.* 2) ſiue infra Oculum, ſiue ſupra, inter ſe quidem parallelæ, ſed non prioribus FS, D10, ER &c. æquidiſtantes tamen plano horizontali; coibunt illarum imagines in alio Vitri puncto N; eo nimirũ, in quo linea BN ab Oculo B ad directas nouas parallela, Vitrum ſecat. Hoc autem N centrum ſecundarium, omniaque ſecundaria reliqua, erunt in lineâ finitrice GH quæ per centrum primarium A ducta fuit ad horiz. parallela. *Fig.* 2.

Conſectarium IV.

Quod ſi directæ aliæ fuerint neque prioribus parallelæ, neque eidem plano æquidiſtantes, cui priores, earum centrum non erit in lineâ horizontali.

PROPOSITIO III.

Si à puncto diſtantiæ C ducatur in plano horizontali recta ED (vide *Fig.* 1) directis FS, RE &c. parallela, occurrens ſectioni FE in D: ex D autem in Vitro ducatur perpendicularis ad FE, & æqualis altitudini Oculi CB; extremum eius punctum erit in A centro proiectionis.

DEmonſt. Quoniam BC ex hyp. eſt ad horizontem recta, etiam planum ABCD 18.11 per ipſam ductum, erit horizonti rectum. Sed per hyp. etiam Vitrum TXEF eſt ad horiz. rectum. Ergo communis eorum ſectio, ipſa nimirum recta DA, ex D ad A centrum ducta, erit 19.11, horizonti recta. Patet igitur ex *defin.* 3, 11, DA eſſe perpendicularem ad FE. Eſt autem extremitas DA in centro ipſo A. Ergo &c. *Fig.* 1.

Digitized by Google

Quoniam ex hyp. EM eſt imago directæ ER, erit per *prop.*4. vt RE ad CD, vel per 5 vt S16 ad C15, ita EM ad MA, ſed quia PM eſt per conſt. parallela FE, erit vt EM ad MA ſic FP ad PA. Ergo vt RE ad CD, vel vt S16 ad C15, ita FP ad PA. Ergo per 4 vel 5 FP ad parallelam MP terminata, eſt imago directæ SF. Rurſum iã oſtendi eſſe vt S16 ad C15, vel, vt RE ad CD, ita FP ad PA. Sed vt FP ad PA, ſic δR ad RA. Ergo vt RE ad CD, vel vt S16 ad C15, ita δR ad RA. Ergo per 4 aut 5, δR ad parallelam Pω terminata, eſt imago directæ δδ. Eodem modo demonſtrabitur de reliquis.

Conſectarium 2.

Traoſuerſarum imagines ſunt lineæ in Vitro ſectionibus parallelæ.

Io plano inferiori ſit tranſuerſa SR inter binas directas parallelas FS, ER poſita. Quoniam ex hyp. SR eſt tranſuerſa, erit per *defin.* 14. parallela ſectioni FE. Sunt autem & FS, ER parallelæ ex hyp. Ergo SFER parallelogramnum eſt. Ergo SF, ER æquantur. Sit iam ER proiecta in EM, & ducatur MP parallela EF occurrens radiali FA in P. Ergo per *conſect.* 1. FP erit imago directæ FS, ac proinde punctorum R, S, imagines erunt puncta M, P. Quare per *definit.* 10, tranſuerſæ SR imago eſt recta PM, quæ per conſt. parallela eſt ſectioni FE. Pari diſcurſu oſtendam tranſuerſam 2S in plano erecto poſitam, proijci in ωP parallelam ſectioni TF, & trãſuerſæ 23 in plano ſuperiori poſitæ imaginem eſſe ωπ, ſectioni TX parallelam.

Conſectarium 3.

Habitâ proiectione directarum & tranſuerſarum, habetur proiectio parallelogrammi dati. Sic quia EM, FP ſunt imagines directarum ER, FS, & FE, PM imagines tranſuerſarum FE, SR, erit *defin.* 12 FPME imago, ſiue proiectio parallelogrammi, ſeu pauimenti FSRE. Sic quoque PNKM erit imago parallelogrammi QSRL. Pari modo TωPF & XπME erit imago planorum erectorum, ſiue murorum 2TFS, X3RE. Demum TωπX erit imago plani ſuperioris, ſeu tabulati 2TX3: quæ omnia patent ex *definit.* 12.

Conſectarium 4.

Ex proiectione FPME plani horiz. ſeu pauimenti SFER, facillimè reperientur in Vitro proiectiones lateralium planorum erectorum, ſiue murorum 2TFS, 3XER, item plani ſuperioris ſeu tabulati, modò ſint eiuſdem cum inferiori SFER longitudinis. Nam ſi ducantur radiales TA, XA, & Pω parallela FT ſectioni; ωπ parallela TX, erit πM parallela XE: erit que TωPF proiectio, ſeu imago muri plani 2TFS, & XπME imago muri plani 3XRE, & TωπX, imago tabulati 2TX3. Patet ex *conſect.* 1. & 2, & *def.* 12.

Conſectarium 5.

Imago plani inferioris pauimenti quantumcumque illud protendatur in infinitum, ſemper manet minor triangulo FAE; & quamuis ſemper ad A centrum accedat, nunquam tamen pertingit. Pari modo proiectio tabulati 2TX3 quantumuis protenſi, ſemper fiet intra triangulum TAX; & proiectio murorum 2TFS, 3XER quantumcumque prolongatorum, perpetuò fiet intra triangula TAF, XAE. Itaque ſi quatuor dicta plana, pauimentum nempe, tabulatum, & duo vtrimque muri ſine fine longiùs atque longiùs extenderentur, creſcent quidem eorum in Vitro proiectiones, atque vndique & ſupra & infra & lateraliter vtrimque intra ſua quæque triangula accedent propiùs ſemper ac propiùs ad centrum A: nunquam tamen peruenient. Patet ex *Conſect.* 1. *prop.* 2.

Conſectarium 6.

Planum ipſi Vitro oppoſitum 2SR3 proijcitur in PωπM. Nam 4 eius latera, quæ nimirum tranſuerſæ ſunt, proijciuntur in PM, Mπ, πω, ωP. Ergo per definit. &c.

6
A

DK
rque
rsicus

r aliæ
n co-

patet
ED,
ſic AE
m KD:
iam re-
K, ſic vt

d ſectio-
lano, ſeu
ctionis, ad
derim DE
eſſe

eſſe ad EA, vt longitudo porticus DT, ſiue Dω ad diſtantiam Oculi patet [b] DE proiectionem b *prop.* 4.
eſſe ipſius Dω. Eſt autem ex conſtr. EC parallela ad DK. Ergo [c] latus tranſuerſum extre- c *conſ.* 2.
mum porticus proiectum eſt in EC. Item quia EC eſt parallela DK, ex radialibus abſcindit *prop.* 5.
[d] proiectiones omnium directarum reliquarum, ac proinde KC eſt proiectio lateris Kλ. Er- d *conſ.* 1.
go [e] pauimentum datum KDωλ proiectum eſt in KCED, ad datam Oculi poſitionem. Quod *prop.* 4.
erat faciendum. e *def.* 11.

PROPOSITIO VIII.

Planorum lateraliter erectorum & tabulari proiectio.

1. Ex K & D erige perpendiculares KG, DR 23 pedum ſcalæ, pro altitudine porticus, & iunge GR. *Fig.* 4.

2. Ex G & R ad centrum A duc radiales GA, RA. Ex C & E erige CO, EN parallelas ad KG, DR, occurrentes GA, RA radialibus in O & N, & iunge ON. Erunt KGOC, RNED proiectiones murorum, ſeu planorum pauimento inſiſtentium, & *GONR* proiectio tabulati, ſeu plani ſuperioris.

Demonſtratio patet ex *conſectario* 4. *prop.* 5.

Conſectarium.

Hinc collige quomodo deſcribi debeat proiectio muri ſolitariè ſumpti, item quâ methodo proijciatur vna ſeries vel plures parallelæ ſeries domuum, arborum &c.

PROPOSITIO IX.

Directarum longitudinum proiectio.

Directas longitudines quæ ſunt in planis lateralibus (nam de tranſuerſis agetur 10 & 11 *prop.*) cuiuſmodi conſtituunt feneſtræ, capitella & baſes columnarum longâ ſerie diſpoſitæ, ita proijcies altitudinem baſium ex ſcalâ deſumptam abſcinde ex KG, & ſit KT. Et poſita regula ſuper T, & à centro duc rectam vſque ad parallelã CO. Inter hanc & KC cõſiſtent omnium columnarum baſes. *Deinde ſcapum columnæ* ex ſcalâ deſumptum; abſcinde ex TG & ſit Tδ: poſitâque regulâ ſupra T & A, duc rectam ex T vſque ad parallelam CO. Inter has 2 lineas ex T & δ eductas, cõſtituentur omnes columnæ, capitella, ac cætera omnia pari ratione conſtituentur. *Quod ſi feneſtras* deſideras; altitudinem feneſtrarum ex ſcalâ ſumptam abſcinde ex KG, & ſit KF. Tum feneſtrarum longitudinem itidem ex ſcalâ ſumptam abſcinde ex FG, & ſit FX. Deinde ex F & X duc rectas binas vſq; ad parallelam CO, coituras in A. Inter has feneſtrarum ſeries tota continebitur. Ad eumdem modum directæ longitudines in plano inferiori & ſuperiori proijcientur. *Fig.* 4.

Horum omnium demonſtrat. patet ex conſectario 1. *prop.* 5.

PROPOSITIO X.

Interuallorum tranſuerſis lineis contentorum proiectio.

Eiuſmodi ſunt interualla columnarum in pauimento & planis lateralibus, interualla trabium in tabulato tranſuerſim poſitarum &c.

Oporteat columnarum interualla 10 ſuperius data proijcere.

1. Quoniam interualla ſingula dantur ſupra, 10 pedum, ex lineâ DK producta abſcinde 10 partes D2, 23, &c. ſingulas 10 pedum ſcalæ: quæ ſimul ſumptæ conficiunt 100 ped. ipſam porticus datæ longitudinem DT. *Fig.* 3.

2. Sumptam ex ſcalâ diſtantiam Oculi, quæ 30 pedum erat data, transfer ex A in B. Ex B ad puncta 2, 3, 4 &c. due rectas, quæ BC interſecabunt in punctis G, H &c. *Dabunt hæ columnarum interualla* DG, GH &c. Quod ſi ex punctis G, H &c. vſque ad rectam RN, erexeris lineas ipſi DR æquidiſtantes proieceris columnas ipſas vel potius axes columnarum. Tandem ſi duxeris parallelas GM, HP, &c. inuenta erunt columnaria interualla in latere oppoſito. *Fig.* 4.

Demonſtr. Quoniam triangula AGB, 2GD æquiangula ſunt inter ſe, erit vt 2D ad DG, ſic BA, ad AG. Ergo permut. vt 2D ad BA, ſic DG ad AG reliquam partem radialis. Ergo *Fig.* 3.

per

Digitized by Google

PROPOSITIO XXXIX.

Cùm ſphæræ diameter maior eſt vtriuſque oculi interuallo, nequidem vtroque oculo hemiſphærium integrum videri poteſt: poteſt autem, ſi ſphæræ diameter ſit interuallo oculorum par, & pluſquam hemiſphærium, ſi minor.

VIde demonſtrationem ſecundam præcedentis, quæ huic facilè applicabitur.

PROPOSITIO XL.

Sol plus illuminat quàm dimidium Terræ, Luna minus dimidio.

Fieri poteſt, vt Lunæ numquam minor portio illuminetur, quàm dum nobis apparet plena.

Sol numquam minorem terræ partem illuminat quàm æſtate mediâ; numquam maiorem, quàm mediâ hyeme.

HOrum veritas vel ex ſolâ ſchematum inſpectione intelligetur, hoc vno obſeruato; portionem obſcuri corporis nonniſi eam illuminari, quam radij tam obſcurum quàm lucidum tangentes, ex obſcuro versùs lucidum comprehendunt.

Fig. 41. Sit enim Sol A, terra B. Quia Sol maior eſt terrâ, radij vtrumque tangentes CE, DF, portionem Terræ versùs Solem comprehendunt EGF maiorem hemiſphærio. Atqui portio EGF ea eſt quam Sol illuminat. Ergo Sol illuminat plus quàm Terræ [a] hemiſphærium. Sit iam Luna B, Terra A. Cùm Luna ſit Terrâ minor, radij vtramque tangentes EC, FD ex Terrâ versùs Lunâ includunt portionem CND minorem hemiſphærio. Ergo Luna minus illuminat quàm hemiſphærium Terræ. Quod erat primum.

a vide Aſtron. l. 4. num. 18.

Fig. 42. Sit deinde Sol A; Luna primùm in B, deinde in C. Manifeſtum eſt portionem QSP à tangentibus ex Lunâ propinquiore in B comprehenſam, eſſe maiorem portione NXO quæ à tangentibus comprehenditur ex Lunâ remotiore in C; ac proinde quò remotior eſt à Sole Luna, eò minorem eius partem illuminari. Atqui remotiſſima ſubinde eſt cùm nobis plena apparet, quando nimirum Soli apogeo opponitur. Fieri ergo poteſt vt Lunæ numquam minor portio illuminetur à Sole quàm dum plena eſt. Quod erat ſecundum.

Fig. 42. Poſtremò ſphærulæ B, C iam Terram repræſentent, Solem (vt priùs) A. Portio Terræ illuminata NXO, cum Sol abeſt longiùs, minor eſt portione illuminatâ QSP, cùm ab eâ Sol abeſt propiùs, vt patet ex dictis ſupra. Atqui æſtate mediâ Sol eſt in Apogeo Eccentrici, hoc eſt remotiſſimus à terrâ, in hyeme eſt in Perigeo, adeoque viciniſſimus. Ergo Sol numquam minorem Terræ partem illuminat, quàm æſtate mediâ, numquam maiorem quàm mediâ hyeme. Quod erát tertium.

Facilè iſta demonſtrabit Geometricè lector elementis vtcumque tinctus.

PROPOSITIO XLI.

Cylindro & oculo poſitione datis, portionem Cylindri vno oculo viſam exhibere.

Fig. 43. DAtus ſit Cylindrus BG, & oculus in A. Per oculum A planum agatur baſibus Cylindri parallelum, quod in Cylindro producet circulum [a] MKPN: hunc ex A [b] tangant in N & K rectæ AN, AK. Per NK ducatur planum axi SQ parallelum, quod producet in Cylindri ſuperficie [c] rectas OND, HKE.

a per 5. Sereni. b per 17. 3. c patet ex ſeren. p. 3. l. 1.

Dico portionem OFHEBD videri ab oculo in A conſtituto, & non ampliùs.

Ducatur enim planum per tangentem AN & rectam OND; item aliud per tangentem AK & rectam HKE. Manifeſtum eſt hæc plana Cylindrum tangere in rectis OND, HKE. Manifeſtum quoque eſt omnes radios qui ab oculo A prodeuntes Cylindrum tangunt, in

dictis

dictis planis tangentibus exiſtere & Cylindrum tangere in punctis rectarum OND, HKE, in quibus Cylindrum tangunt ipſa plana. Patet igitur ab oculo A videri portionem HFODBE & ſolam.

Corollarium

Portio Cylindri vno oculo conſpecta eſt minor Cylindri dimidio. Si nimirum latitudo Cylindri ſit maior diametro pupillæ. Eodem modo propoſitio 37 Cylindro applicabitur.

PROPOSITIO XLII.

Detur conus BHC, & oppoſitus illi KHG, infinitus vterque. Dico, ſi oculus ponatur in quouis puncto ſuperficiei coni oppoſiti, vel quouis puncto intra eam, ſpectari totum conum BHC. Fig. 46.

EXiſtat oculus in quouis oppoſitæ ſuperficiei puncto M, & in ſuperficie coni BHC detur punctum quoduis O. Secetur vterque conus plano per axem & per M producente triangula BHC, KHG. Deinde per M & O planum agatur rectum ad triangula, producens in earum plano rectam MZT, in ſuperficie autem coni BHC lineam curuam LOZV; quæ erit [a] hyperbola, latus habens tranſuerſum ZM; quo biſecto in R erit R centrum hyperbolæ. Cùm igitur tangentes hyperbolam concurrant omnes cum diametris inter [b] centrum R & verticem Z, patet hyperbolam LOZV totam, adeoque & punctum O, videri in R, ac proinde etiam in M, & vltra M intra conum KHG. Cùm igitur O ſit punctum quodcumque ſuperficiei conicæ BHC, liquet eam videri totam in M puncto quouis ſuperficiei coni oppoſiti. Eadem erit demonſtratio ſi oculus ponatur vbiuis intra ſuperficiem KHG.

a per 12. 1. conic.
b per 31. 1. conic.

PROPOSITIO XLIII.

Cono atque oculo poſitione datis portionem coni vno oculo viſam exhibere.

DAtus ſit conus BHC. Per coni verticem ducatur ωHN baſi BDCω parallela. Fig. 44.

CASVS 1.

Sit primò oculus infra parallelam HN in A. Seca conum plano ad baſim parallelo. Sectio erit [d] circulus ZOFS, quem ex A [i] tangant rectæ ASV, AOY, in S & O. Secetur deinde conus alio plano per verticem H & contactuum puncta S, O: ſectio erit [m] triangulum DHω, cuius latera HD, Hω erunt in coni ſuperficie. Dico videri ab oculo in A portionem BHDω, quæ minor eſt coni dimidio.

d per 4. 1. conic.
i per 17. 3.
m per 3. 1. conic.

Concipiatur enim per rectam HSω, & tangentem ASV planum infinitum, itemque aliud per rectam HOD & tangentem AOY. Hæc plana conum tangunt in rectis HSω, HOD, eorumque ſectio communis eſt recta AHX, in quâ oculus. Omnes ergo radij, qui profecti ab oculo A conum contingunt, in planis dictis exiſtunt, & conum tangunt in punctis rectarum Hω, HD, in quibus eumdem tangunt plana ipſa. Ergo oculus in A conſtitutus videt portionem DBHω; quam patet eſſe coni dimidio minorem.

CASVS 2.

Sit deinde oculus ſupra parallelam ωHN, ſed extra conum oppoſitum ψHζ, ex. gr. in X. Per X & verticem coni duc rectam XHβ. Sumptoque in Hβ puncto quouis A per id ſeca conum plano baſi parallelo. Sectio rurſum erit circulus ZOFS; quem ex A tangant ASV, AOY, in punctis O, S: ductoque plano per O, S, H, producatur in cono triangulum DHω.

Dico videri ab oculo in X portionem HDωCH, quæ maior eſt coni dimidio.

Concipiantur enim rurſus per trianguli latera HSω, HOD, & tangentes ASV, ADY plana infinita. Hæc ſe mutuo interſecabunt rectâ AHX, & conum contingent in rectis HSω, HOD. Cùm ergo oculus X ſit in communi planorum ſectione, liquet radios omnes, qui ab oculo prodeuntes conum contingunt, exiſtere in dictis planis, conumque contingere in

punctis

Digitized by Google

punctis rectarum HSα, HOD, in quibus plana ipſa conum contingunt. Ex quo patet oculum in X ſupra parallelam NHα conſtitutum, cernere portionem HDαCH, quæ maior eſt coni dimidio, cum baſis eius DCα ſit maior ſemicirculo.

CASVS 3.

Fig. 45. Sit oculus poſtremò in ipſâ parallelâ αHN extra verticem coni H.

Dico videri coni dimidium.

Per rectam HN & coni axem HE ducatur planum ſecans baſim coni diametro BEC, quæ erit parallela ad HN, cùm ipſa HN per hypotheſim ſit baſi coni parallela. Ducatur deinde diameter DEα perpendicularis ad BC, & conum tangant in D & α rectæ PD, Oα, quas patet eſſe parallelas ad BC, adeoque etiam ad NH. Cono tandem ſecto per axem HE, & diametrum Dα triangulum exiſtat DHα, cuius latera Hα, HD ſunt in coni ſuperficie. Iam quia Oα, NH ſunt parallelæ, adeoque in vno plano, etiam Hα in vno * cum ipſis plano erit. Per tres igitur rectas HN, Hα, Oα extendi planum poteſt, quod cùm tranſeat per tangentem Oα, conum in rectâ Hα continget. Eodem modo per rectas PD, DH, HN tranſit planum quod tangat conum in rectâ HD. Cùm igitur oculus exiſtat in rectâ HN ſectione communi planorum dictorum, patet omnes radios, qui ab illo profecti conum tangunt, exiſtere in planis prædictis & conum tangere in punctis rectarum Hα, HD, ac proinde videri portionem HDBα, quæ per conſtr. eſt coni dimidium.

* per 7. 11.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 44. Per coni verticem H ducatur recta XHM vtrimque infinita, baſi BDCα non æquidiſtans, oculus incedens per infinitam HM eamdem ſemper portionem coni intuebitur: incedens verò per infinitam HX, ſpectabit ſemper portionem quæ complementum eſt prioris.

SEcetur conus circulo quocumque ZOFS, cuius planum occurrat infinitæ XHM in A. Ex A circulum tangant AOY, ASV. Per contactus O, S, & verticem ſecetur conus triangulo DHα. Plana infinita per tangentes ASV, AOY & trianguli latera HSα, HOD conum tangent in rectis Hα, HD, & corum ſectio communis erit ipſa recta infinita, XHA. Patet igitur oculo perambulante rectam HMA quantumcumque productam ſemper conſpici portionem HDBα planis tangentibus incluſam; oculo autem incedente per rectam HX etiam quantumlibet protractam perpetuò cerni portionem alteram HDCα ab iiſdem planis versùs YX incluſam.

Quod ſi oculus incedat per rectam NHα baſi parallelam, ſpectabit ſemper coni dimidium, quantumcumque, ſeu versùs α, ſeu versùs N à cono elongetur.

Patet ex caſu 3 præcedentis.

PROPOSITIO LXV.

Fig. 44. Si oculus fuerit infra lineam αHN, quæ per coni verticem H ducitur baſi parallela, quò radius (MH) ab oculo ad coni verticem emiſſus, maiorem cum axe HP angulum effecerit (MHP), eò plus de cono intuebitur. Si autem fuerit ſupra parallelam αHN & extra conum oppoſitum ψHζ: quò radius ab oculo ductus ad verticem cum axe HS producto, maiorem fecerit angulum (QHS), eò ſpectabit de cono minus.

SIt oculus infra parallelam in G & per G ac verticem H ducatur recta GHL. Tum per G ducto plano ad baſim parallelo producatur in cono circulus ZOFS: hunc ex G tangant rectæ GQ, GR. Conſpiciet oculus in G portionem HQφBTRH planis tangentibus infinitis GHR, GHQ incluſam vt patet ex caſu 1. *prop.* 43. Quod ſi oculus ſtatuatur ſupra NHα

NHω in puncto quopiam θ rectæ GHL, quæ communis eſt ſectio planorum tangentium, conſpiciet portionem HQφCTRH, vt patet ex *caſu 2. prop.* 43.

Ponatur deinde oculus in M, à quo per coni verticem ducta MHX efficiat cum axe HP angulum MHP maiorem præcedenti GHP. Occurrat autem planum circuli FOZS ipſi XHM in A, & ex A circulum tangant rectæ AO, AS. Includent illæ portionem circuli OZF maiorem portione QZR, adeóque & plana tangentia infinita AHS, AHO includent coni portionem HODBαSH. maiorem portione HQφTRH. Atqui oculus in A videt portionem HODBαSH. Ergo oculus, cùm maior eſt angulus MHP, plus de cono intuetur. Quod ſi oculus ſtatuatur ſupra NHω in Q puncto aliquo rectæ AHX, quæ planorum tangentium eſt ſectio communis, conſpiciet [n] portionem HODCαSH minorem portione HQφCTRH, *n per caſ. 2.* quam videbat exiſtens in θ vbi recta ab eo ad verticem coni emiſſa angulum cum axe PH *p. 43.* producto faciebat θHS minorem angulo QHS.

PROPOSITIO XLVI.

Oculus à cono (BHC) recedens per lineam (ZA) baſi parallelam *Fig. 44.* infra verticem (H), quò recedit longiùs, eò plus de cono intuebitur, eò autem minùs, quo recedet longiùs per baſi parallelam ſupra verticem.

SIt oculus primò in ipſius ZA puncto G, & ex G ad verticem ducatur recta GH: ſit autem coni axis HP. Procedat deinde ex G in A, ducaturque recta AH. Erit angulus AHP, maior angulo GHP. Ergo per *præced.* plus de cono ſpectatur in A puncto remotiori parallelæ ZA, quàm in G viciniori. Quod erat primum.

Sit deinde oculus ſupra verticem H, in rectæ λθ baſi parallelæ puncto λ, ducaturque λH. Inde verò procedat in Q, iungaturque QH. Angulus igitur QHS quem conſtituit QH cum PH axe producto in S, maior eſt angulo λHS. Ergo per *præced.* oculus in Q remotior minus de cono intuebitur, quàm in λ vicinior: quod erat alterum.

PROPOSITIO XLVII.

Oculus à cono dato (BHC) verſùs conum ſibi oppoſitum (KHG) *Fig. 46.* aſcendens, quò aſcenderit altiùs, eò plus de cono dato intuebitur.

DVcatur recta vtrique cono occurrens CX, & ſit oculus primùm in puncto A, ex quo ad verticem H ducatur recta AH, per verticem verò ipſum ſit NHQ baſi parallela. Ex A deinde procedat oculus in E, ducaturque recta EH. Axis autem coni eſto PHω. Quoniam angulus EHP maior eſt angulo AHP, plus de cono videbitur in [a] E, quàm in A. Vbi verò *a per p. 45.* peruentum fuerit in I ad parellelam NHQ, ſpectabitur coni [b] dimidium, adeóque plùs quàm *b per ca-* in quouis puncto infra I, cùm id quod de cono ſpectetur infra I, ſit [c] minus ſemper coni di- *ſum 3. p. 43.* midio. Aſcendat deinde oculus ex I in F, & inde in S, ac tandem pertingat ad conum oppoſi- *c per caſ. 2. ibid.* tum in X, ducanturque rectæ FH, SH. Quia in F ſpectatur plus quàm [d] coni dimidium, in *d per caſ. 2.* I verò dimidium; plus de cono videbitur in F quàm in I. Quia verò angulus SHω minor eſt *ibid.* angulo FHω, plus de cono ſpectabitur [i] in S, quàm in F. Atque ita pars viſa coni perpetuò *i per p 45.* adaugebitur, donec tandem in X totus videatur conus BHC.

PROPOSITIO XLVIII.

Datæ ſint hyperbolæ oppoſitæ QZ, BS, quarum axis tranſuerſus *Fig. 47.* BQ, & centrum X, ex quo perpendiculariter ſit erecta XA potens quartam partem figuræ.

Dico hyperbolas quantumcumque productas atque ab inuicem diuaricatas, ſi conſpiciantur ex A, æquidiſtantes apparere.

EX centro X ducatur infinita XO perpendicularis ad BQ, atque inter hyperbolas quotuis ponantur rectæ SZ ad XO perpendiculares SZ hyperbolarum interualla ſemper ere-

ſcentia

ſcentia exhibentes. Ea verò manifeſtum eſt ita creſcere , vt quâuis longitudine datâ euadant maiora. Demonſtrandum igitur eſt hæc interualla omnia ex A conſpecta inter ſe æqualia apparere.

[Fig. 48. 47.] Fac MF æqualem BQ, quâ biſectâ in C, ex C duc CA perpendicularem ad MF & æqualem ipſi AX. Ex A per F duc infinitam AV,& ex A infinitam AR perpendicularem ad CA, adeóque & parallelam ad MF. Circa AR tanquam axem in orbem acta AV deſcribat conum rectum, qui ſectus plano ad AR axem recto, exhibeat circulum QHP, ſectus autem per axem AR & parallelam axi MF, plano alio triangulum exhibeat QAP, cuius baſi QP ipſa MF occurrat in I, & ex I ducatur IH perpendicularis ad QP. Tum denuò conus ſecetur plano per rectas MFI, IH, quâ ſectione producatur in coni ſuperficie curua linea FGH.

Latus coni PA productum occurrat rectæ IFC in Y. Quoniam CFI, AR æquidiſtant, erit angulus CFA æqualis ſibi alterno FAR: ſed hunc, quia conus rectus eſt, liquet æqualem [a per conſtr.] eſſe angulo RAP. Ergo CFA ipſi RAP æqualis eſt. Atqui ob parallelas [a] IFCY, AR, etiam angulus IYP æquatur ipſi RAP. Ergo CFA, & IYP, ſeu CYA, æquales ſunt. Anguli autem YCA, FCA per conſtr. recti ſunt. Cùm igitur in triangulis YAC, FAC duo anguli dicti ſint æquales & latus CA commune; etiam YC, FC æquales erunt. Atqui per conſt. etiam MC ipſi FC æqualis eſt, æquantur igitur YC, MC. Quare punctum Y, in quo latus coni PA [b per 12. 1. conic.] occurrit ipſi IFC, idem eſt cum puncto M. Linea igitur [b] FGH hyperbola eſt, cuius diameter tranſuerſa eſt MF, centrum C, ordinatim applicata HI. Neque ſolùm MF diameter eſt, [c per conſtr] [d per conſtr] ſed etiam axis; cum enim AR ſit recta plano [c] QGH, etiam MFI parallela [d] ad AR, eſt eidem [i per 8 11.] [i] plano recta; ac proinde angulus MIH, quem HI ordinatim applicata facit cum diametro, [m per def. 3. 11.] rectus [m] eſt. Præterea [n] ab alijs eſt demonſtratum rectam AC poſſe quartam partem figuræ quæ fit ad axem hyperbolæ FGH. Cùm igitur tranſuerſus axis MF ſit æqualis dato axi [n per eand.] tranſuerſo BQ, & AC potens quartam figuræ partem hyperbolæ FGH æqualis ſit rectæ AX, [o per 8. 11.] potenti quartam figuræ partem hyperbolæ QZ, liquet hyperbolam FGH eandem eſſe cum [n Bettinus apiario 3. pag. 16.] datâ QZ. Prætereà quia iam oſtendi MFI eſſe plano QPH rectam, recti [o] erunt anguli MIP, MIH. Ergo RI ad planum hyperbolæ FGHI recta eſt per 4. 11. Atqui AC eſt parallela ad RI, cùm ACI per conſtr. rectus ſit, & RIC, ſeu MIP ex paulò ante demonſtratis. Ergo etiam AC ad hyperbolæ planum [p] recta eſt. Quare cùm AC etiam par ſit ipſi AX, ſi oculus ponatur in vertice coni A, eundem habebit ſitum ad hyperbolam FGH, qui datur reſpectu hyperbolæ QZ. Poſtremò in hyperbolæ plano ducatur ex centro C infinita CD perpendicularis ad axem FM, interque eam & hyperbolam rectæ quotuis EG, EG perpendiculares ad CD. Liquet CD fore XO, & EG, EG fore ZO; ZO. Quare cùm in cono habeantur conditiones omnes theorematis dati, ſi oſtendero interualla omnia CF, EG, EG viſa ex altitudine CA inter ſe apparere æqualia, oſtenſum pariter erit, interualla XQ, OZ, OZ, viſa ex altitudine XA, inter ſe æqualia apparere. Id porro hunc in modum præſtabitur.

Ducantur rectæ AE, AE, & AG, AG, quæ erunt in coni ſuperficie. Quoniam recti ſunt [q per conſtr] [q] anguli DCI, ACI, erit IC recta plano [r] DCA. Ergo axis RA ipſi IC per conſtr. æquidi- [r per 4. 11.] ſtans, eidem plano [y] DCA rectus eſt. Quare anguli CAR, EAR omnes ſunt recti, & æquales. [s per 8. 11.] Deinde quia tam FC quàm EG ſunt perpendiculares ad CD, erunt CF, EG [s] parallelæ. Sed [u per 6. 11.] etiam parallelæ erant [x] CF, AR. Ergo & EG, AR ſunt parallelæ, adeóque in vno plano exi- [x per conſtr] ſtunt. Quare etiam AG illas connectens cum ipſis AE, AR [z] in vno plano exiſtet. Angulus [z per 7. 11.] igitur FAR pars eſt recti anguli EAR. Cùm autem ex conſtr. in vno plano ſint CA, FA, AR, etiam angulus FAR pars eſt recti anguli CAR. Iam quia conus per conſtr. rectus eſt, liquet omnes angulos FAR, GAR, ęquales exiſtere. Atqui oſtendi ſupra æquales eſſe omnes CAR, EAR. Ergo ſi ab his æqualibus demas æquales, FAR, GAR, reliqui CAF; EAG æquales erunt. Interualla igitur CF, EG, viſa ex altitudine CA, hoc eſt (vt oſtendi ſupra) interualla XQ, OZ viſa ex altitudine XA, inter ſe æqualia apparebunt. Ergo etiam interualla BX, SO, adeóque & interualla tota BQ, SZ, SZ viſa ex altitudine AX, quæ poſſit quartam partem figuræ, apparebunt æqualia; hoc eſt hyperbolæ BS, BZ æquidiſtantes apparebunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIX.

Phaſes Lunæ exponere.

REm omnem aliquot aſſertionibus quaſi punctis complectar.

1. Quamuis id quod de Lunâ cernimus, ſit hemiſphærio minus; tamen quia ob in- [a per corol. p. 38.] gentem diſtantiam [a] inſenſibiliter differt ab hemiſphærio, poteſt aſſumi pro hemiſphærio, & circulus partem viſam à non viſâ diſcriminans, pro maximo Lunę circulo haberi.

2. Pari

2. Pari modo quamuis portio Lunæ à Sole illuminata ſit maior hemiſphærio, quia tamen ob ingentem à Sole diſtantiam inſenſibiliter ab hemiſphærio differt, aſſumi etiam poteſt pro hemiſphærio, & circulus partem illuminatam ab obſcurâ ſeparans, pro circulo maximo.

3. Ex his ſequitur, quod de hemiſphærio illuminato à nobis conſpicitur extra plenilu- *Fig.* 49.
nium, id duobus maximis ſemicirculis comprehendi, quorum vnus ACB eſt medietas maxi- 50.51.52
mi circuli ACBD qui hemiſphærium viſum à non viſo diſtinguit, alter AIB eſt medietas maximi circuli, qui hemiſphærium lucidum ſeparat ab obſcuro.

His poſitis, per Oculum & Lunæ centrum Z planum agatur rectum circulo CBDA hemiſphærium viſum à non viſo ſeparanti, idque repræſentet recta AZB.

4. Itaque ſi hemiſphærium lucidum Lunæ ita à nobis ſit auerſum, vt (quod in Lumina- *Fig.* 49.
rium coniunctionibus accidit) ſemicirculus AIB congruat ſemicirculo ACB, nihil de hemiſphærio lucido conſpiciemus.

5. Poſtquam verò Luna cœperit à Sole elongari, & ſemicirculus AIB ſupra circulum ACBD nonnihil attolli, pars ACBIA de lucido hemiſphærio à nobis viſa acutiſſimè corniculata apparebit ob ſemicirculorum eam comprehendentium vicinitatem, & acumen angulorum A ac B.

6. Poſt longiorem à Sole receſſum, quia ſemicirculi ACB, AIB maiores iam angulos A, *Fig.* 50.
B comprehendunt, pars lucida, quæ videtur, corniculata quidem, ſed minus acuta minuſque caua apparet.

7. Paulò ante quadraturam primam, cùm ſemicirculus AIB coincidit cum plano AZB *Fig.* 51.
pars lucida apparet inſtar ſemicirculi & cauitas omnis euaneſcit, quia arcus AIB directè aſpicitur.

8. Quando hemiſphærium illuminatum ita nobis obuertitur, vt ſemicirculus AIB incipiat *Fig.* 52.
cadere vltra planum AB versùs D, quod poſt quadraturam primam contingit, portio lucida nobis conſpicua ACBIA apparet gibboſa.

9. Tandem lucido hemiſphærio (quod in oppoſitione Luminarium contingit) ita ad nos conuerſo, vt ſemicirculi AIB, ADB coincidant, totum lucidum hemiſphærium nobis conſpicuum redditur.

FINIS LIBRI PRIMI.

S

Æ

r.

&c.
t.Eius

ies per
E.
ſis eſt

mida-
modo

opti-

ctionis
ocu-
citur,
riptio
ntelli-

itrum
Fig.1.

t, ſeu
itrum
lo ſe-
ER;
proij-

Fig.1.
XEF:

ſe mu-
trian-
gulum

gulum LBE ſe mutuo interſecant in aliquâ rectâ, quæ ſit EK. Dicetur linea LE proijci in lineam Vitri EK. Pari modo linea QL proijcitur in rectam NK ſecundùm quam Vitrum & triangulum Opticum QLB ſe mutuo ſecant &c. Vocabitur autem NK imago, ſeu proiectio, ſeu apparentia rectæ LQ. Et ſic de alijs.

9 *Planum*, ſeu *ſuperficies proijcitur* in id planum, in quo pyramis Optica ſecatur à Vitro. In *Fig.* 1. ſuperficies FELQ proijcitur in planum FNKE, quod eſt cõmunis interſectio pyramidis opticæ BQLEF & Vitri: diciturque FNKE *Imago* plani QFEL.

In gratiam eorum qui planorum interſectiones minus capiunt, duas poſtremas definitiones aliter ſic expono.

10 *Linea recta proijcitur* in eam Vitri lineam quæ connectit imagines extremitatum lineæ proijciendæ.

Radius opticus LB occurrat Vitro in puncto K, ac proinde per *defin.* 7, punctum L ſit proiectum in punctum K. Recta EK in Vitro puncta E, K iungens erit proiectio, ſeu imago rectæ EL. Pari modo ſi puncta R & L proiecta ſint in Vitri pũcta M & K: dicetur recta RL proijci in rectam KM, puncta K & M connectentem. Deniq; ſi puncta Q & L proiecta ſint in puncta Vitri N & K, dicetur recta QL proijci in rectã NK, puncta N & K coniungentẽ.

11 *Figurata qualibet ſuperficies proijcitur*, in eam Vitri partem, quæ continetur ab imagine circumferentiæ ipſius ſuperficiei. Sic quadrilateri FL circumferentia, hoc eſt 4 latera ambientia, QF, FE, EL, LQ ſint proiecta in 4 lineas Vitri FN, NK, KE, EF, dicetur ſuperficies FL, proijci in Vitri partem KFNE. Pari modo ſi 4 latera QS, SR, RL, LQ, proiecta ſint in 4 Vitri lineas NP, PM, MK, KN, dicetur quadrilaterum QRLS proijci in Vitri partem PKMN. Eritque hæc imago ipſius plani QRLS.

12 *Lineæ directæ* vocantur quæ cum Sectione concurrunt aut poſſunt concurrere. Sic in plano inferiori lineæ directæ ſunt SF, 10 D, RE, quia concurrunt cum ſectione FE. In plano laterali ſupra horiz. erecto, directæ lineæ ſunt 8δ, 7G, 6α &c. vtpote concurrentes cum ſectione TF. In plano ſuperiori directæ ſunt 2T, 94.3x quia concurrunt cum ſectione Tx.

13 *Lineæ directæ perpendiculares* ſunt, quæ Sectioni ad angulos rectos occurrunt: *obliquæ* quæ ad angulos non rectos.

14 *Lineæ tranſuerſæ*, ſunt, quæ Sectioni æquidiſtant. Sic QL, & SR ſunt tranſuerſæ in plano horiz: quia æquidiſtant ſectioni FE: recta 23 in plano ſuperiori: recta 2S in plano laterali.

15 Angulus (RED) quem directæ faciunt cum ſectione, vocatur *Situs directarum*.

16 *Situs obiecti proijciendi rectus*, dicitur cùm directæ ſunt perpendiculares: *Situs* verò *obliquus*, eſt cùm directæ ſunt obliquæ.

17 *Altitudo Oculi*, eſt recta perpendicularis BC ab Oculo B ad horizontale planum demiſſa.

18 Punctum C, *punctum diſtantiæ*, vocabitur, & quæ ab eo ducitur ad FE ſectionem perpendicularis CD, dicatur *Oculi diſtantia*.

19 Si ab oculo B ducta fuerit recta BA directis lineis æquidiſtans & Vitro occurrens in A: Punctum A dicetur *Punctum Oculi, Punctum concurſus*, *Centrum proiectionis*, quòd ad iſtud omnium directarum ipſi BA æquidiſtantium imagines EM, DV, FP, δR, GM, αϑ, Tω, 4Z, Xω, &c. confluant, in eoque ſi producantur, concurrant. Vt demonſtrabitur *prop.* 1.

20 Recta quæ per centrum proiectionis A ducitur ad horizontem parallela *Horizontalis*, ſiue *Finitrix* dicatur. Eſt hæc eiuſdem cum Oculo altitudinis, vt patet ex *defin præced.*

21 Rectæ, quæ à punctis, in quibus directæ ſectionibus occurrunt, ducuntur ad A centrum proiectionis, nimirum EA, DA, FA, δA &c. vocentur *Radiales*.

22 Rectæ quæ ab Oculo ad aliquod rei proijciendæ punctum ducuntur, vt BS, BR, BQ &c. *diamentales* appellentur, vel *radij optici*. Hæ ſecant radiales.

23 *Rectus Oculi ſitus*, ſeu *medius*, eſt cum perpendicularis è puncto diſtantiæ C ducta ad ſectionem FE, biſecat ſectionem, *obliquus*, cùm non biſecat.

24 Porro tres proiectionum differentiæ ſunt *Stereographica*, in quæ Oculus rem proijciendam tangit; *Ortographica*, quæ fit per radios opticos parallelos, ac proinde infinitam Oculi diſtantiam ſupponit: *Scbenographica*, quæ fit ad iuſtam Oculi diſtantiam. Hanc poſtremam, miſſis cæteris, hoc libro exponemus.

HYPOTHESES.

Quæ ſub æquali, ſiue eodem videntur angulo, æqualia & ſimilia apparent: quamuis inæqualia & diſſimilia ſint. Sic in *Fig.* 1. rectæ QL, NK Oculo B apparent æquales, quia ſub eodem ſpectantur angulo: item planum FNKE æquale ac ſimile apparet plano QFEL, quia ſub eo-

Digitized by Google

per *defin.* 10. recta FS proijcitur in rectã FP, quæ proinde ipſius imago eſt. Sed FP producta incidit in A. Imago igitur directę FS producta incidit in A. Eodem prorſus diſcurſu oſtendam imagines reliquarum directarum eſſe partęs rectarum radialium EA, DA, ϑA, GA, αA, TA, 4A, XA &c. quæ nimirum à punctis in quo directæ ſectionibus FE, TF, XT occurrunt, ducuntur ad A. Ergo directarum æquidiſtantium omnium imagines ſiue ſupra &c.

Ex propoſitione ſequentia deduco conſectaria.

Conſectarium I.

Quantumuis directæ lineæ extendantur in infinitum, earum proiectionęs accedunt quidem ſemper, nunquam pertingunt ad centrum A, ac proinde earum, imagines ſemper ſunt radialibus minores. Extendatur enim directa FS quantum placuerit ex.gr. vſque in 13: radius opticus ex puncto 13 ad Oculum B tendens, radialem FA ſecabit quidem ſupra P, ſed tamen neceſſariò infra punctum A, quòd BA, 13F ſint parallelæ, vnde proiectio ſiue imago directæ FS quantumuis productæ ſemper erit minor radiali FA. Pari modo in plano laterali 2TFS, quoniam BA, ϑ8 ſunt parallelæ, radius opticus ab extremitate ϑ8 quantumuis productæ ad Oculum B emiſſus, neceſſariò ſecabit radialem ϑA infra A. Idemque accidet in plano ſuperiori. Quare &c.

Conſectarium II.

Directarum vt ER, FS, ϑ8, &c. infra Oculum exiſtentium imagines, EM, FP, ϑR &c. in Vitro aſcendunt, exiſtentium verò ſupra Oculum vt α6, T2, 49, &c imagines α3, Tω, 4Z &c. deſcendunt. Ipſius autem G7 quæ eiuſdem cum Oculo altitudinis eſt, imago (Gμ) incidit in ipſam finitricem GAH.

Conſectarium III.

Si allę fuerint directæ FO, DZ, EK &c (*vide Fig.* 2) ſiue infra Oculum, ſiue ſupra, inter ſe quidem parallelæ, ſed non prioribus FS, D10, ER &c. æquidiſtantes tamen plano horizontali, coibunt illarum imagines in alio Vitri puncto N; eo nimirũ, in quo linea BN ab Oculo B ad directas nouas parallela, Vitrum ſecat. Hoc autem N centrum ſecundarium, omniaque ſecundaria reliqua, erunt in lineâ finitrice GH quæ per centrum primarium A ducta fuit ad horiz. parallela. *Fig.* 2.

Conſectarium IV.

Quod ſi directæ aliæ fuerint neque prioribus parallelæ, neque eidem plano æquidiſtantes, cui priores, earum centrum non erit in lineâ horizontali.

PROPOSITIO III.

Si à puncto diſtantiæ C ducatur in plano horizontali recta ED (vide *Fig.* 1) directis FS, RE &c. parallela, occurrens ſectioni FE in D: ex D autem in Vitro ducatur perpendicularis ad FE, & æqualis altitudini Oculi CB; extremum eius punctum erit in A centro proiectionis.

D*emonſt.* Quoniam BC ex hyp. eſt ad horizontem recta, etiam planum ABCD 18.11 per ipſam ductum, erit horizonti rectum. Sed per hyp. etiam Vitrum TXEF eſt ad horiz. rectum. Ergo communis eorum ſectio, ipſa nimirum recta DA, ex D ad A centrum ducta, erit 19.11, horizonti recta. Patet igitur ex *defin.* 3, 11, DA eſſe perpendicularem ad FE. Eſt autem extremitas DA in centro ipſo A. Ergo &c. *Fig.* 1.

Digitized by [illegible]

Quoniam ex hyp. EM eſt imago directæ ER, erit per *prop.*4. vt RE ad CD, vel per 5 vt S16 ad C15, ita EM ad MA, ſed quia PM eſt per conſt. parallela FE, erit vt EM ad MA ſic FP ad PA. Ergo vt RE ad CD, vel vt S16 ad C15, ita FP ad PA. Ergo per 4 vel 5 FP ad parallelam MP terminata, eſt imago directæ SF. Rurſum iã oſtendi eſſe vt S16 ad C15, vel, vt RE ad CD, ita FP ad PA. Sed vt FP ad PA, ſic δR ad RA. Ergo vt RE ad CD, vel vt S16 ad C15, ita δR ad RA. Ergo per 4 aut 5, δR ad parallelam Pω terminata, eſt imago directæ Sδ. Eodem modo demonſtrabitur de reliquis.

Conſectarium 2.

Tranſuerſarum imagines ſunt lineæ in Vitro ſectionibus parallelæ.

In plano inferiori ſit tranſuerſa SR inter binas directas parallelas FS, ER poſita. Quoniam ex hyp. SR eſt tranſuerſa, erit per *defin.*14. parallela ſectioni FE. Sunt autem & FS, ER parallelæ ex hyp. Ergo SFER parallelogramnum eſt. Ergo SF, ER æquantur. Sit iam ER proiecta in EM, & ducatur MP parallela EF occurrens radiali FA in P. Ergo per *conſect.* 1. FP erit imago directæ FS, ac proinde punctorum R, S, imagines erunt puncta M, P. Quare per *definit.*10, tranſuerſæ SR imago eſt recta PM, quæ per conſt. parallela eſt ſectioni FE. Pari diſcurſu oſtendam tranſuerſam 2S in plano erecto poſitam, proijci in ωP parallelam ſectioni TF, & tranſuerſæ 23 in plano ſuperiori poſitæ imaginem eſſe ωϖ, ſectioni TX parallelam.

Conſectarium 3.

Habitâ proiectione directarum & tranſuerſarum, habetur proiectio parallelogrammi dati. Sic quia EM, FP ſunt imagines directarum ER, FS, & FE, PM imagines tranſuerſarum FE, SR, erit *defin.*12 FPME imago, ſiue proiectio parallelogrammi, ſeu pauimenti FSRE. Sic quoque PNKM erit imago parallelogrammi QSRL. Pari modo TωPF & XϖME erit imago planorum erectorum, ſiue murorum 2TFS, X3RE. Demum TωϖX erit imago plani ſuperioris, ſeu tabulati 2TX3: quæ omnia patent ex *definit.*12.

Conſectarium 4.

Ex proiectione FPME plani horiz. ſeu pauimenti SFER, facillimè reperientur in Vitro proiectiones lateralium planorum erectorum, ſiue murorum 2TFS, 3XER, item plani ſuperioris ſeu tabulati, modò ſint eiuſdem cum inferiori SFER longitudinis. Nam ſi ducantur radiales TA, XA, & Pω parallela FT ſectioni; ωϖ parallela TX, erit ϖM parallela XE: erit que TωPF proiectio, ſeu imago muri plani 2TFS, & XϖME imago muri plani 3XRE, & TωϖX, imago tabulati 2TX3. Patet ex *conſect.*1. & 2, & *def.*12.

Conſectarium 5.

Imago plani inferioris pauimenti quantumcumque illud protendatur in infinitum, ſemper manet minor triangulo FAE; & quamuis ſemper ad A centrum accedat, nunquam tamen pertingit. Pari modo proiectio tabulati 2TX3 quantumuis protenſi, ſemper fiet intra triangulum TAX; & proiectio murorum 2TFS, 3XER quantumcumque prolongatorum, perpetuò fiet intra triangula TAF, XAE. Itaque ſi quatuor dicta plana, pauimentum nempe, tabulatum, & duo vtrimque muri ſine fine longiùs atque longiùs extenderentur, creſcent quidem eorum in Vitro proiectiones, atque vndique & ſupra & infra & lateraliter vtrimque intra ſua quæque triangula accedent propiùs ſemper ac propiùs ad centrum A: nunquam tamen peruenient. Patet ex *Conſect* 1. *prop.*2,

Conſectarium 6.

Planum ipſi Vitro oppoſitum 2SR3 proijcitur in PωϖM. Nam 4 eius latera, quæ nimirum tranſuerſæ ſunt, proijciuntur in PM, Mϖ, ϖω, ωP. Ergo per definit. &c.

6
A

DK
que
ticus

r aliæ
n co-

patet
ED,
ſic AE
n KD:
iam re-
K, ſic vt

d ſectio-
lano, ſeu
ctionis, ad
derim DE
eſſe

eſſe ad EA, vt longitudo porticus DT, ſiue Dω ad diſtantiam Oculi patet ᵇ DE projectionem b *prop.* 4.
eſſe ipſius Dω. Eſt autem ex conſtr. EC parallela ad DK. Ergo ᶜ latus tranſuerſum extre- c *conſ.* 2.
mum porticus proiectum eſt in EC. Item quia EC eſt parallela DK, ex radialibus abſcindit *prop.* 5.
ᵈ proiectiones omnium directarum reliquarum, ac proinde KC eſt proiectio lateris Kλ. Er- d *conſ.* 1.
go ᵉ pauimentum datum KDωλ proiectum eſt in KCED, ad datam Oculi poſitionem. Quod *prop.* 4.
erat faciendum. e *def.* 11.

PROPOSITIO VIII.

Planorum lateraliter erectorum & tabulati proiectio.

1. Ex K & D erige perpendiculares KG, DR 23 pedum ſcalæ, pro altitudine porticus, & iunge GR. *Fig.* 4.

2. Ex G & R ad centrum A duc radiales GA, RA. Ex C & E erige CO, EN parallelas ad KG, DR, occurrentes GA, RA radialibus in O & N, & iunge ON. Erunt KGOC, RNED proiectiones murorum, ſeu planorum pauimento inſiſtentium, & *GONR* proiectio tabulati, ſeu plani ſuperioris.

Demonſtratio patet ex *conſectario* 4. *prop.* 5.

Conſectarium.

Hinc collige quomodo deſcribi debeat proiectio muri ſolitariè ſumpti, item quâ methodo proijciatur vna ſeries vel plures parallelæ ſeries domuum, arborum &c.

PROPOSITIO IX.

Directarum longitudinum proiectio.

Directas longitudines quæ ſunt in planis lateralibus (nam de tranſuerſis agetur 10 & 11 *prop.*) cuiuſmodi conſtituunt feneſtræ, capitella & baſes columnarum longâ ſerie diſpoſitæ, ita proijcies altitudinem baſium ex ſcalâ deſumptam abſcinde ex KG, & ſit KT. Et poſita regula ſuper T, & à centro duc rectam vſque ad parallelã CO. Inter hanc & KC cõſiſtent omnium columnarum baſes. *Deinde ſcapum columnæ* ex ſcalâ deſumptum; abſcinde ex TG & ſit Tδ: poſitâque regulâ ſupra T & A, duc rectam ex T vſque ad parallelam CO. Inter has 2 lineas ex T & δ eductas, cõſtituentur omnes columnæ, capitella, ac cætera omnia pari ratione conſtituentur. *Quod ſi feneſtras* deſideras; altitudinem feneſtrarum ex ſcalâ ſumptam abſcinde ex KG, & ſit KF. Tum feneſtrarum longitudinem itidem ex ſcalâ ſumptam abſcinde ex FG, & ſit FX. Deinde ex F & X duc rectas binas vſq; ad parallelam CO, coituras in A. Inter has feneſtrarum ſeries tota cotinebitur. Ad eumdem modum directæ longitudines in plano inferiori & ſuperiori proijcientur. *Fig.* 4.

Horum omnium demonſtrat. patet ex conſectario 1. *prop.* 5.

PROPOSITIO X.

Interuallorum tranſuerſis lineis contentorum proiectio.

Eiuſmodi ſunt interualla columnarum in pauimento & planis lateralibus, interualla trabium in tabulato tranſuerſim poſitarum &c.

Oporteat columnarum interualla 10 ſuperius data proijcere.

1. Quoniam interualla ſingula dantur ſupra, 10 pedum, ex lineâ DK producta abſcinde 10 partes D2, 23, &c. ſingulas 10 pedum ſcalæ: quæ ſimul ſumptæ conficient 100 ped. ipſam porticus datæ longitudinem DT. *Fig.* 3.

2. Sumptam ex ſcalâ diſtantiam Oculi, quæ 30 pedum erat data, transfer ex A in B. Ex B ad puncta 2, 3, 4 &c. duc rectas, quæ BC interſecabunt in punctis G, H &c. *Dabunt hæ columnarum interualla* DG, GH &c. Quod ſi ex punctis G, H &c. vſque ad rectam RN, erexeris lineas ipſi DR æquidiſtantes proieceris columnas ipſas vel potius axes columnarum. Tandem ſi duxeris parallelas GM, HP, &c. inuenta erunt columnaria interualla in latere oppoſito. *Fig.* 4.

Demonſtr. Quoniam triangula AGB, 2GD æquiangula ſunt inter ſe, erit vt 2D ad DG, ſic BA, ad AG. Ergo permut. vt 2D ad BA, ſic DG ad AG reliquam partem radialis. Ergo *Fig.* 3.

per

Digitized by Google

nt 3HD,
A Ergo
erit per
cæteris.

, patet

altero,

ntur

B
p-

2,

c-

n-
ij-

l-
la
o
D.
I,
n
i.

ſ-

ia

i-
a-

N
n-
a-

r-
io

li-

on-

Demonſtr. Quoniam DF, KH æquantur, erit DF ad AB, vt KH ad AB; hoc eſt (quoniam ſimilia ſunt triangula BXA, KXH) vt HX ad XA; hoc eſt vt DQ ad QA. Ergo à primo ad vltimum, vt DF eſt ad AB, ſic DQ eſt ad QA. Ergo per 4 DF proiecta eſt in DQ. *Pari modo* quoniam pares ſunt DG, KG, erit DG ad AB, vt KG ad AB, hoc eſt ob ſimilitudinem triangulorum ALB, KLG, vt GL ad LA; hoc eſt vt DP ad PA. Ergo à primo ad vltimum vt DG ad AB, ſic DP ad PA. Ergo per 4 DG proijcitur in DP. *Eodem diſcurſu* erit DH proiecta in DO: DK verò patet eſſe proiectam in DN.

Producatur deinde BZ donec ipſi DK occurrat in T. Quia ZN eſt parallela ad TK, erit TK ad ZN, vt TB ad ZB, hoc eſt vt KA ad ZA, hoc eſt vt KD ad eamdem illam ZN. Æquantur ergo TK, KD. Poterit igitur TK ſecari in partes totidem, in quot ſecta fuit KD, ſic vt his illæ ſint æquales. Sint diuiſionum puncta in 4, 5, 6. Igitur D4 par eſt ipſi TH, adeóque erit D4 ad AB vt TH ad AB; hoc eſt ob triangulorum B2A, T2H ſimilitudinem, vt H2 ad 2A; hoc eſt vt DM ad MA. A primo igitur ad vltimum vt D4 eſt ad AB ſic DM ad MA. Ergo per 4, D4 proijcitur in DM. Eodem modo oſtendam D5, proijci in D7, & D6 in D8. DT verò patet proijci in DE.

Quoniam igitur DT longitudo cum interuallis lapidum in EA diſpoſitorum proiecta ſit in DE, eiuſque puncta Q, P, O &c. Ex *conſ*.2. 5, liquet omnes lapidum tranſuerſas proijci in parallelas QX9, PL10 &c. Sunt autem & directæ lapidum lineæ proiectæ in partes radialium, per 2. Quare cùm lapides ipſi à directis ac tranſuerſis ſe interſecantibus contineantur, liquet ritè peractam eſſe lapidum proiectionem.

Poteſt hic modus transferri etiam (vt dixi ſuprà) ad proiectio nes intercolumniorum, de quibus actum *p*.10.& 11.

Conſectarium I.

Igitur ex propoſitionibus 6 præcedentibus habetur proiectio porticus datæ ad poſitionem Oculi datam. Quamuis enim hactenus ſitum Oculi rectum poſuerimus, facillimum tamen erit eadem omnia ad obliquum Oculi ſitum præſtare.

Sit DK latitudo porticus. Ex diſtantiæ puncto, ſeu baſe Oculi X ducatur XZ directis datis æquidiſtans, occurrens ipſi DK (productæ ſi opus eſt) in Z. Sit autem DZ tot partium ſcalæ, quot pedum aut paſſuum eſt à parte rei. Ex Z erige perpendicularem ZA parem altitudini Oculi ex ſcalâ deſumptæ. Tum cætera omnia præſtantor, quæ *prop*.7,8,9,10,11,12 præſcribantur. Prodibit porticus datæ proiectio ad datum obliquum Oculi aſpectum. *Fig*.6. 7.

Conſectarium II.

Obiectorum aliorum proiectio ex eâdē Oculi poſitione ſpectatorum, quâ porticus hactenus delineata quorum directæ lineæ non ſunt directis datæ porticus parallelæ; hunc in modum peragetur. Ex baſe Oculi X, ducatur XP directis lineis obiectorum aliorum parallela occurrens ſectioni DK in P. Ex P, ad horizontalem VB duc perpendicularem PQ. Erit Q centrum proiectionis nouū pro alijs illis obiectis patet ex 2. Cætera ad horum proiectionem ſpectantia facilè colliges ex 5, & hactenus dictis in delineatione porticus. *Fig*. 6.

PROPOSITIO XIII.

Porticum nullis datis ſchenographicè delineare in tabulâ aut plano dato.

Differt hæc proiectio à præcedentibus, quod nullis adſtringatur datis, ſed omnia pro voluntate determinentur.

Datum ſit planum DKGR, quod proiectione aliquâ depingi totum debeat. *Fig*. 4.

1. Duc in plano lineam VS pro horizontali parallelam KD baſi tabulæ, quam licebit pro arbitrio propinquiorem ducere ipſi KD, aut remotiorem prout ad maiorem minoremùe altitudinem Oculi proiectionem factam deſideras.

2. In horizontali VS, determina punctum quodcumque *a* pro centro. Si rectus Oculi ſitus placet, centrum bifariam ſecet VS; ſi obliquum, inæqualiter.

3 Ex 4 plani angulis ad centrum ducantur lineæ D*a*, K*a*, G*a*, R*a*. Item *t*E, EN, NO, parallelas ad KD, DR, RG, & iunge *ot*. habebis proiectionem pauimenti, planorum pauimento inſiſtentium & tabulati. Quò porticus longioris proiectionem deſideras, eò parallelogrammum *to*N minus facito.

4. Pro-

pauimenti, fiet
: data teneant-

xiefin. 15 &
us ſemper at-
mutetur ſem-
iter ſe res ha-
gulæ habentes
demonſtro,
nem reſpectu
elogrammum
n delineatæ :
allelam dire-
feſtum eſt ex
KcED, pro
as cum priori
rum omnium
DRGONEc
e ſuper para-

re,

rizontalem. In
antię. Vtrum-

qR, eique oc-
ſer in b_3, cen-
Erit B proie-

puncti E, & a

t perſpectiuam

. Similia erunt
b_3, hoc eſt per
ectio puncti B.

ographiam, ſi-

ſtrictam, ſic

m pentagoni
(vh)

Digitized by Google

hoc eſt perpendiculares, quæ ab Oculo & ſingulis pentagoni punctis duci poſſunt ad ſectionem. Item menſurentur harum perpend. interualla in ſectione.

2. *Ducatur infinita* qR *pro ſectione in quâ ponantur interualla perpendicularium ex ſcalâ quâpiam deſumpta,* hi, *IK, KN, NP, item interuallum* hK *quod inter perpend. ab Oculo ductam, & perpendicularem ductam ab angulorum aliquo, puta B interijcitur.*

3. *Ex punctis,* h, *I, K, N, P ducantur perpendiculares ex ſcalâ deſumptæ veris proportionales,* hB, *Ic,* Ka, *ND, PE. Si harum extrema puncta B,* c, d, e, a *coniungantur, patet figuram conſtitui, datæ ſimilem ſimiliterque poſitam.*

4. *Ex puncto K in quo perpendicularis ab Oculo ducta occurrit ſectioni, erige normalem KF parem altitudini Oculi ex ſcalâ deſumptam. Per F duc SG horizontalem in quâ præſidio item ſcalæ ponatur FG diſtantia Oculi.*

Cætera fac vt in *prop.* Hoc Scholium ad ſequentem *prop.* 15. extende.

PROPOSITIO XV.

Cuiuſcumque ſolidi Perſpectiuam delineare.

Sedis Perſpectiuam exhibere.

1. DEſcribatur baſis, ſiue ichnographia ſedis, quæ ſit ABCD. Scalæ præſidio huius perſpectiua iuxta methodum *prop.* 14. delineata, erit *abcd*. *Fig.* 9.

2. Ex angulo aliquo *b* præſidio ſcalæ erige perpendicularem *bq* parem altitudini ſedis: ſumptoque in ſectione puncto aliquo, & in horizontali puncto quouis R, duc rectam ER & ex *b* duc *bk* parallelam ſectioni. Ex *k* erige *k*F parem *bq*; ducaturque RFX infinita.

3. Ex punctis *c, d, a,* duc parallelas ſectioni *cl, d*G, *a*I. Ex punctis *l*, G, I, erige normales *l*Z, GM, IX vſque ad rectam RX. Ex punctis X, M, Z, duc ſectioni parallelas infinitas, *xo*, M*p*, Z*u*. Ex punctis *a, d, c* erige perpendiculares, *ao, dp, cn* quæ prioribus parallelis occurrant in *o, p, u*. Iunge rectas *qo, op, pu, uq*.

4. In præſidio ſcalæ fac *q*S æqualem altitudini reclinatorij ſedis: ponaturque indirectum cum *bq*. Producaturque KF in *h*, vt F*h* par ſit *q*S. Ex R per *h* duc infinitam R*hβ*: & *l*Z produc in *ω*. Ex *ω* duc *ω*T parallelam ſectioni, cui *cu* protracta occurrat in T.

His peractis habetur proiectio ſedis quoad lineamenta primaria.

Aliter & Melius.

1. Ichnographia ſedis ſit ABCD, ſcalæ præſidio delineata. Huius proiectio per *præced.* delineetur & ſit *abcd*. *Fig.* 9.

2. Sumpto in ſectione puncto E, & in horizontali puncto R, duc rectam ER. Ex E erige perpendicularem infinitam ED, in quam ſcalæ præſidio transfer omnes altitudines ſedis proijciendæ E6 : 6, 11 : 11, N : N, 17 : 17, 27 : 20, D : & per ſingula puncta 6, 11, N, 17, 20, D, ex R rectæ emittantur.

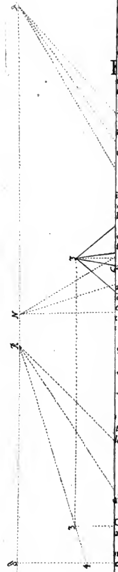
3. Ex punctis *a, b, c, d,* ad rectam RE duc *a*I, *d*G, *bk*, *cl* parallelas ſectioni. Ex punctis I, G, erige ipſi ED parallelas Ix, GM vſque ad rectam RN. Item ex *k, l,* erige ipſi ED parallelas *kb, la* vſque ad rectam RD, Rectæ ex punctis I, G, K, *l* iam erectæ ſecabuntur a lineis ex R emiſſis in punctis, quæ adſcripti numeri oſtendunt.

4. Rectam Ix cum punctis in ea notatis 7, 13 transfer in rectam *ao* ex *a* perpendiculariter erectam: GM cum ſuis punctis in *dp* : *kh* cum ſuis punctis in *b*S, *la* cum punctis ſuis *c*T.

5. Rectis lineis connecte puncta 9, 7, 8, 10, item puncta 13, 15, 16, 14 : item puncta *q, o, p, u* : item puncta 18, 19, item puncta 21, 22.

His peractis, habetur adæquata ſedis datæ proiectio.

Demonſtr. Per centrum N, & *a*, duc rectam N*a*4, quoniam per conſt. A proijcitur in *a*, & punctum 4 eſt commune, patet ex *defin.* 10, 4A perpendicularem proijci in rectam 4*a*. Ergo per 4. 4A ad N*a* diſtantiam Oculi, vt 4*a* ad *a*N, hoc eſt vt EI ad IR. Ergo compon. 4A, cum diſtantiâ Oculi, eſt ad diſtantium Oculi vt ER ad IR, hoc eſt vt E6 ad I, 7. Sed I7 per conſt. eſt par *a*7. Ergo E6 eſt ad *a*7 vt 4A perpend. directa cum diſtantia Oculi eſt ad ſolam Oculi diſtantiam. Igitur Altitudo A6, ſiue E6, puncto A inſiſtens, proijcitur in *a*7. Pari modo oſtendam altitudines D6, B6, C6, ipſi A6 æquales, proijci in *d*8, *b*9, *c*10. Eademque erit reliquorum omnium demonſtratio.



dibus.

ia ſuppedanei cum gradibus
T, PVV, qDD. Ichnogra-
Tq, VB.
Ex E erige infinitam per-
altitudines E2, E3, E4, &
emittantur. Tt, quæ eſt ad
normalem occurrentem re-

E4 in O4, P4, & iunge,
2,3:2,2: 2B, Bd: gh in cZ,
, V6 & iunge 76, 63, 66:

tribus.

iam ichnographia octaëdri
entrum ſit EE. Pro Ichno-
hiæ Perſpectiua, quæ ſit

cto R, iunge FR. Ex F eri-
ſer omnium octaëdri dati
quoniam inter ſe æquales
a 2, 4, emittantur rectæ

æ per accidens hic coinci-
ecantem rectas ex R emiſ-
6.
AA2: G5 in d5, & b5.
3, e, ad eadem quatuor

5, 5: &c. parallelas ſectio-

fit in reliquis ſolidis
tur: Dati puncti exi-
lo præſtari debeat, ſatis

ire.

C, vel DE, RN regulæ
um erit centrum perſpe-

roducatur per *prop.* 2 ne-
c proinde punctum illud

PRO-

PROPOSITIO XVII.

Ex datâ oculi diſtantiâ à ſectione rei proiectæ longitudinem inuenire.

PEr præced. inueni A centrum proiectionis & præſidio ſcalæ ſiue pantometri inquire proportionem directi in perſpectiuâ ductus DE. Ad eius à centro diſtantiam AE. Deinde fiat vt AE ad ED, ſic diſtantia Oculi à ſectione quæ per hyp. datur, ad aliud. Dabit hoc longitudinem rei proiectæ, in partibus diſtantiæ Oculi. *Fig. 6.*

Eſt enim per *theor.* 4 & 5 vt AE ad ED, ſic diſtantia Oculi ad longitudinem lineæ cuiuſuis directæ, hoc autem eſt ipſa proiectionis longitudo.

PROPOSITIO XVIII.

Ex datâ longitudine rei proiectæ diſtantiam Oculi à ſectione inuenire.

REperto proiectionis centro per 16, notifica proportionem DE, ad EA: & fiat vt DE ad EA, ſic longitudo rei proiectæ ad quartum. Dabit hoc diſtantiam Oculi in partibus rei proiectæ. Patet ex 4 & 5 *huius*. *Fig. 6.*

Conſectarium.

Ex datâ rei proiectæ longitudine & diſtantiâ Oculi, eiuſdem altitudinem inuenies; ſi fiat vt diſtantia Oculi cum longitudine rei proiectæ ad longitudinem rei proiectæ, ita altitudo apparens ad aliud. Patet ex *corol. 7. prop.* 5.

Scholium.

In multorum obiectorum proiectionibus ſitus Oculi aut obiecti nequit reperiri, quæcumque dentur. In Scholio enim prop. 13. *oſtenſum eſt infinitas porticus quarum ſingulæ & figurâ ac ſitu differant, & ab Oculo diuerſimodè poſito ſpectentur, eamdem ſortiri poſſe proiectionem.*

PROPOSITIO XIX.

Efficere vt data porticus duplo, imo decuplo appareat longior quàm ſit.

C*Onſtr.* In muro porticum datam terminante, delinea perſpectiuam porticus duplo, aut quantum placuerit datâ longioris, ad diſtantiam Oculi, parem longitudini porticus datæ. Sint autem latitudo & altitudo perſpectiuæ eadem quæ porticus datæ. Stanti in altero porticus extremo apparebit porticus duplo aut decuplo (ſi ita placuerit delineare) lõgior quàm ſit.

Demonſtr. Proiectio enim quæ in muro oppoſito eſt delineata, eodem modo apparebit ac ſi porticus data reuerà fuiſſet continua poſt murum.

Quod ſi perſpectiua in muro facta, ſit ad diſtantiam Oculi minorem longitudine porticus datæ, v. g. parem longitudini eius dimidiæ, vt debitus apparentiæ effectus conſequatur, ſtandum erit in medio datæ porticus &c.

Digitized by Google

PROPOSITIO XXII.

Datum ſit parallelogrammum rectágulum CF,FC dato plano DCCD rectum, in minora ſectum parallelogramma ſiue cancellatum. Altitudo Oculi ſit BA, Per omnia puncta C,C, Ṡ, C, ex B ducantur infinitæ BCD,BCD,BSD. Ab Oculo deinde A per lateris erecti vnius puncra F, I, K, C, ducantur rectæ, quæ, vt mox oſtendam, occurrenr BND, in punctis aliquibus D, G, E. Demum ex punctis D, G, E duc rectas DDDD, GGGG, EEEE parallelas ad CC.

Fig. 13. Figuram dum inſpicis, ita teneto vt recta DB ſit parallela horizonti, & aB ad horizontem perpendicularis; littera aliter quam debent, ſunt inclinata.

Dico parallelogrãmmum CFFC cum parallelogrammis minoribus proiectum eſſe in planum datum.

D*Emonſtr.* Quoniam parallalográmum datúr rectangulú, recta FQC normalis eſt ad CC. Quare cú parallelográmú ſubiecto plano ſit rectú, per *def.* 4.11 FQC ſubiecto plano recta eſt. Ergo, vt oſtenſum in *præced.* AF, AI, AK occurrent ipſi BND in punctis ex.gr. E,G,D, & latus FQC cum partibus ſuis proijcietur in DGEC. Ducatur iá altera AF occurrens BCM in X (occurret auté cùm FOC recta ſit plano ſubiecto eodem diſcurſu quo FQC) per *præc.* FOC proijcietur in CX. Sed BX eſt ad CX vt AB ad FOC, hoc eſt vt AB ad FQC, hoc eſt vt BND ad CND, hoc eſt quoniam CC, DD ex datis æquidiſtanr, vt BMD ad CMD. Diuidendo igitur BC eſt ad CX vt BC ad CMQ. Quare X & D vnum eſt idemque punctú. Igitur FOC proijcirur in CMD. Eodem modo probabitur IOC proijci in CG : & KOC, in CE, neceſſe eſt igitur FF proijci in DD; & II in GG, & KK in EE. Vlteriùs ab A ducatur recta per punctum R occurrens DD in Z. Cùm igitur punctum R proijciatur in Z patet RS proijci in SZ. Quoniam verò DD, FRF, ãmbæ ſunt parallelæ ad CC, erunt & inter ſe. Ergo DD in Z ſecta eſt à radio AZ, vt ab eodem FF in R, hoc eſt vt CC diuiditur in S per rectam RS. At quia DD, CC æquidiſtant, etiam DZD diuiſa eſt in D per rectam BSD vt CC in S. Ergo DZD in D & Z punctis eſt ſimiliter ſecta. Vnum igitur idemque punctum eſt Z & D. Ergo RS proijcitur in SD. Similiter oſtendam rectam FβC proijci in rectam CδD. Cùm igitur omnes FOC, FβC, RS, FQC proijciantur in rectas CMD, CδD, SD, CND, & FF, II, KK, in DD, GG, EE, neceſſe eſt interſectionum puncta media II, KK proijci etiam in puncta interſectionum media EE, GG. Totum igitur parallelogrammum datum cum ſuis partibus in planum datum proijcitur. Quod erat demonſtr.

Corollarium I.

Quò altitudo Oculi BA fuerit minor, eò latior erit longiorque proiectio. Item ſeruatâ Oculi eâdem altitudine quantò longiùs ab obiecto abeſt Oculus, tantò proiectio longior erit.

Corallarium II.

Quanto Oculus longiùs à re proijciendâ abſuerit, tantò proiecturæ latera CMD, CND minus diuaricabuntur, poterirq; nihilominus longitudo proiecturæ haberi quantam volueris, ſi altitudinem Oculi imminuas.

PROPOSITIO XXIII.

Datam lineam CD vtcumque ſectam, ex datâ diſtantiâ BC in datam longitudinem CP cum ſuis partibus proijcere. *Fig. 14.*

C*Onſtr.* Ex puncto C normaliter erige datam rectam CD. Tum ex P per D ducatur infinita PD cui occurrat BA normalis ad BCP. Demum ex A per O & N ducantur AO, AN ſecantes CP in I, L.

incis
po-
ic-
ai

Digitized by Google

1. Deſcribatur triangulum rectangulum $\alpha\delta\varpi$, ſitque $\alpha\delta$ par AO ſemidiametro baſis coni, & $\delta\varpi$ par axi OR. Erit quoque tum $\alpha\varpi$ par lateri AR. Et in quot æquas partes ſectus eſt radius imaginis OA, in tot ſecetur $\alpha\delta$ in punctis β, γ. *Fig. 17.*

2. In $\delta\varpi$ producta ſume punctum quoduis ϕ pro Oculi diſtantiâ, iunganturque $\beta\phi$, $\gamma\phi$ ſecantes $\alpha\varpi$ in ζ, ϑ.

3. Transfer ſectiones $\varpi\vartheta$, $\varpi\zeta$ in latus coni, ſintque RX, RT, & per X & T deſcribe circulos baſi parallelos XY, TV.

4. Baſim coni in tot ſeca æquales arcus AE, EF, FB &c. in quot ſectus eſt circulus ADCB, Ducanturque in coni ſuperficie rectæ ER, FR &c. His peractis tota coni ſuperficies in tot erit ſecta cancellos, in quot imago.

Quare ſi cancelli imaginis transferantur in cancellos coni, habebitur imaginis deformatio: reformatur autem ſi ex producto axe abſcindas RS parem $\varpi\phi$ Oculuſque in S collocetur.

Demonſtratio. Ducantur SX, ST, SY, SV occurrentes AC in M, N, P, Q. Patet AO ſimiliter eſſe ſectã ac $\alpha\delta$. Sed hæc ſecta eſt in æquales, ergo & AO, ac proinde & CO. Per puncta ergo M, N, P, Q ducantur concentrici, & ex O centro, radij OA, OE, OF &c. Erit baſis coni in tot cancellos diuiſa, in quot coni ſuperficies. Et in quot imago OADCB: ſinguliq ue cancelli baſis Oculo poſito in S proiecti ſunt in ſingulos cancellos ſuperficiei conicæ. Ac proinde ſi in baſi coni depicta eſſet imago ſimilis datæ, eſſet hæc in coni ſuperficiem proiecta, ac proinde Oculus in S informem in ſuperficie coni depictam figuram videbit ſimilem imagini quæ eſt in baſi, hoc eſt ſimilem imagini datæ.

Corollarium.

Cùm tota coni ſuperficies cerni poſſit ab Oculo vbicumque intra coni oppoſiti ſuperficiem conſtituto, licebit Oculum etiam extra axem collocare in quouis latere coni producto. Sed tum circuli circa imaginem deſcripti, ſe mutuo omnes in eodem puncto tangunt.

PROPOSITIO XXVII.

Imaginem datam in conuexâ ſuperficie conicâ aliter ita deformare, vt ex certo puncto reformata appareat.

1. Circa datam imaginem circulum deſcribe quem ſeca in arcus æquales v. g. octo per radios *ab*, *ad* &c. Atque vnum ex radijs ſeca in partes æquales v. g. etiam octo, perque diuiſionum puncta totidem deſcribe concentricos circulos. *Fig. 17.*

2. Si vis deformatam in cono figuram datæ imagini non ſolùm ſimilem ſed etiam æqualem apparere, ſume rectam A*q* duplam *k*F diametri circuli, eâque vt radio deſcribe *q*SX quadrantem, cuius peripheriam in totidem æquales arcus ſeca radijs A*q*, AR &c. in quot ſecta fuit peripheria circuli. *Fig. 18. & 17.*

3. A*q* ponatur ipſi AX indirectum & æqualis, eâque vt radio deſcribe quadrantem LAM. Ducaturque L*q*: ſecabit hæc arcum AM biſariam in N. Arcum AN in tot ſeca arcus pares, in quot ſecuiſti *q*X, perque ſectionum puncta ex L duc radios occurrentes A*q* in O, P, Z &c. per quæ demum centro A duc arcus OT, PV &c. Poſſunt quoque ſectiones lateris A*q* inueniri ex tabulâ tangentium, cùm A*q*, AO, AP ſint tangentes arcuum notorum AN, AG, A*h*.

4. In hoc cancellato quadrante depingatur imago ſic vt cancelli cancellis reſpondeant iuxta numeros ſingulis inſcriptos.

Quibus peractis, ſi quadrans A*q*X conicę ſuperficiei applicetur, Oculuſque ſtatuatur in eo axis puncto quod tantum diſtat à coni vertice quantum hic à baſi, informis ſpecies in coni ſuperficiem proiecta, apparebit datæ imagini æqualis & ſimilis.

Scholium.

Cancellatus quadrans hunc in modum ſemel deſcriptus inſeruiet cuiuis imagini deformandæ, ſi tot concentricis conſcribatur imago, quot arcus ducti ſunt in quadrante.


M
M

coloribus inducantur, Oculo in loco luminis poſito, reformatam exhibebunt imaginem. Poſſet etiam luce Solari peragi proiectio imaginis, ſed reformari non poſſet, cùm radij Solares non coëant in punctum in quo ſtatuendus Oculus eſſet.

4. *In loco patenti exiſtat Oculus reformatam cernens imaginem, proiectionis longitudo ea aſſumi debet, vt eius pars citima & remotiſſima non appareant ſenſibiliter habere differentiam diſtantiæ. Ad quod etiam conducet ſi viciniora tenuiùs, remotiora intenſiùs ac viuaciùs pingantur. Item ſi parti citimæ aliud quidpiam intenſo colore appingatur, remotiſſimæ verò campi aperti &c. colore diluto. His enim omnibus tolletur obliquitas proiectionis.*

5. *Diſtinctiùs apparet imago reformata ſi per foramen aut tubulum conſpiciatur. Quod ſi tubum Opticum adhibeas, adhuc longè diſtinctior euadet reformatio.*

6. *Longè admirabilior erit proiectio magiſque latebit artificium, ſi inuerſa ſit, ac deindè ex loco debito eam conſpicias tubo duobus vitris conuexis inſtructo: reformata enim & erecta apparebit.*

7. *Plus admirationis habent proiectiones illæ quæ non tantùm ex certo puncto obliquè ſpectatæ diſtinctam imaginem exhibent, ſed etiam directo viſæ intuitu res planè diuerſas repræſentant. Modum artificij oſtendo in exemplo.*

Proiectus ſit in murum aliquem S. Ioannes Euang. veſte indutus viridi, chlamide purpureâ &c. In proiecturâ veſtis pinge cāpos, ſyluas, nemora, hortos, beſtiolas, aues, ſinuoſos marium anfractus, ripas, naues &c. In zonæ candidæ proiecturâ labentes fluminis aut fontis aquas, in candidis libri aperti folijs ingentem lacum in eoq; portus, littora, piſcatores &c. Sed in his omnibus hæc potiſſimùm obſerua.

Primò Vt ea pingantur quorum colores cum proiecturæ coloribus maximè conueniant.

Secundò Vt ſint modicæ quantitatis, quæ nimirum in puncto reformationis non appareant.

8. *Tandem imago quæuis in quamcumque ſuperficiem, duorum ſtylorum adminiculo alicui tabulæ perpendiculariter affixorum facillimè proijcitur, ſi nimirum tabulam ita vertas & moueas vt vmbra vnius ſtyli per præcipua imaginis lineamenta feratur: eodem enim tempore vmbra ſtyli alterius deſcribet in eodem quidem plano in quo imago eſt, figuram omnino ſimilem imagini prototypæ; in plano verò diuerſo aut ſuperficie quâuis aliâ diſſimilem, quæ tamen ex ſtyli vertice ſpectata ſimilis appareat.*

Demonſtratio ex elementis facile colligitur.

FINIS LIBRI SECVNDI.

OPTI-



CAPVT PRIMVM.

Exponitur ac demonſtratur artificium generale proiectionis Aſtronomicæ, Oculo in ſphæræ ſuperficie conſtituto.

Definitiones.

1. PLanum proiectionis voco, quod per ſphæræ centrum tranſiens Oculo in ſuperficie ſphæræ conſtituto perpendiculariter opponitur.

Statuatur Oculus in ſuperficiei ſphæræ puncto quouis A, à quo per ſphæræ centrum B ducatur diameter ABS: ad hanc perpendiculare ducatur planum infinitum per centrum B ſphæram ſecans maximo circulo BCLEω. Hoc planum vocabimus planum proiectionis. *Fig. 1.*

Hinc patet *primò* punctum A, vbi Oculus eſt, eſſe polum [a] circuli maximi BCLEω in proiectionis plano conſtituti. *a per 8.1. ſph. Theod.*

Patet *ſecundò* circulos maximos per Oculum A tranſeuntes, cuiuſmodi ſunt ACSE, ALSω, ad planum proiectionis rectos [b] exiſtere; omnes ſiquidem tranſeunt per diametrum ABS, quæ dicto plano eſt recta. *b per 12.11.*

2. Punctum proijcitur in punctum, quo radius ab Oculo per punctum proijciendum emiſſus, plano proiectionis occurrit.

Eſto in ſphærâ punctum V, per quod ab Oculo A radius euibretur proiectionis plano occurrens in X, puncti V proiectura eſt punctum X.

3. Linea recta per Oculum non tranſiens proijcitur in rectam lineam quâ planum per Oculum & lineam proijciendam tranſiens, interſecat planum proiectionis.

Detur in ſphærâ recta NP, per quam & Oculum A ducatur planum NAP ſecans proiectionis planum rectâ GK. Hæc eſt proiectura rectæ NP.

4. Quiuis ſphæræ circulus proijcitur in eam portionem plani proiectionis, quâ illud interſecat conum, cuius vertex eſt Oculus, baſis verò circulus proijciendus.

Detur in ſphærâ circulus NZP: conus ſub quo is ſpectatur ab Oculo A, eſt NAPZ: illius ſectio communis cum plano proiectionis eſto GφKϑ. Proiectura circuli NZP eſt ſuperficies GφKϑ. Pari modo PXTβ eſt proiectura circuli DVF. Porro circulos ſphæræ quoſlibet, ſiue plano proiectionis æquidiſtent, ſiue non, ab Oculo in ſuperficie ſphæræ conſtituto proijci in circulos, demonſtrabitur *prop* 5. & 7.

5. Circulum primitiuum voco eum ipſum, qui proijciendus proponitur. Idem de lineis intellige.

Definitiones circulorum ſphæræ & ſi quæ occurrent aliæ, petantur ex lib. 1. num. 1. Aſtronomiæ.

PROPOSITIO I.

Hemiſphærij Oculo oppoſiti CLSEω proiectura, eſt maximus ſphæræ circulus BCZEω, in proiectionis plano exiſtens; circa hunc verò vndequaque in infinitum extenditur proiectura hemiſpherij ACLEω Oculum continentis.

DEmonſt. 1. Pars. Si ab Oculo A ad puncta quælibet hemiſpherij CLSEω radij emittantur, manifeſtum eſt omnes ſecare maximum circulum BCLEω. Ergo per *defin.* 2 puncta quælibet hemiſpherij dicti proijciuntur in totidem puncta maximi circuli CLSEω. Et quoniam hemiſphærium & maximus circulus ab Oculo A ſpecantur ſub eodem côno, cuius baſis ſit ipſe maximus circulus, vertex autem in Oculo A, liquet hemiſphærij proiecturam circulo maximo adæquari præcisè. *Fig. 1.*

Demonſt. 2. Pars. Per quoduis hemiſphærij ACLEω punctum D emittatur radius ab Oculo A: is plano proiectionis occurret extra maximum circulum, puta in R. Ex quo patet proiecturam huius hemiſphærij totam extra maximum circulum exiſtere, eumque ambire, ſic vt incipiat à peripheriâ CLEω, cum hæc hemiſphærio ac proiectionis plano ſit

commu-

n Q, ad
quę erit
s per *def.*
perficiei
in Q, ac

n quo

tum R;

lietas
um

CE eſt
o A ad
proijci
od erat
ne pro-
diame-
ducatur
e YA,
atet igi-
tum M
in infi-

c. pro-
verò A

eridia-

pro-

s arcus
ribere

ACSE
diame-
nittan-
D.
; π, π,
anguli

Digitized by Google

& anguli CBA, CBω recti, ſi circa immotam diametrum CBE planum circuli CLEω vnà cum inſcriptis ſibi lineis ωIπ, ωIπ conuertatur donec rectum inſiſtat plano proiectionis, manifeſtum eſt circulum CLEω, tunc congruere circulo ACSE; & puncta ω, L punctis A, S; & arcus Eπ, ππ arcubus CO, OO, & radios ωIπ, ωIπ, radijs AO, AO, ſic vt radij ωIπ toto tempore conuerſionis dictæ ſecare pergant ipſam CE in punctis ſemper ijſdem I. Ex quo patet puncta O, O, proijci in puncta I, I, ac proinde rectas CI, II, eſſe proiecturas arcuum CO, OO.

PROPOSITIO V.

Circuli (DMGQ) proiectionis plano paralleli proiectura circulus eſt, cuius centrum idem eſt cum centro ſphæræ, in quod primitiui circuli centrum proijcitur, & partes proiecturæ ſunt primitiui circuli partibus proportionales. *Fig. 2. 3.*

CONi. DMGQA ſub quo ſpectatur ab Oculo A circulus DMGQ, cùm plano proiectionis ſectio communis eſto BKNL. Hæc per *defin.* 4, eſt proiectura circuli DMGQ; quæ cùm ex hyp. circulo DMGQ æquidiſtet, per 4. 1. *Conic.*. circulus erit: quod erat primum.

Ducatur deinde ab Oculo A ad centrum ſphæræ B radius AB, occurrens plano circuli MGQ in D. Per *defin.* 1. erit AB perpendicularis plano proiectionis. Quare cùm huic æquidiſtet [b] circulus DMGQ, erit quoque AB perpendicularis ad circulum DMGQ. Quare AD axis eſt coni DMGQA. Cùm ergo B ſit centrum circuli KNL, etiam D erit centrum circuli MGQ. Quare cùm D, B centra circuli & proiecturæ eius exiſtant vtraque in radio ADB, liquet D centrum circuli proijci [d] in B centrum proiecturæ eius: quod erat alterum.

b *per hyp.*
c *patet ex* 14. 11.
d *per def.* 2.

Poſtremò circulus primitiuus vtcumque ſectus ſit in M, F, G, & ab Oculo emittantur radij AMK, AFO, AGN, ducanturque ad centra, D, B, radij MD, FD, GD, & KB, OB, NB. Quoniam plana per hyp. parallela DMGQ, BKNL ſecantur plano OAB, erunt ſectiones [i] FD, OB parallelæ. Ob eandem cauſam parallelæ erunt GD, NB, item MD, KB. Igitur anguli ad centra MDF, KBO, item FDG, OBN æquales [m] ſunt. Arcus [n] ergo MF, KO, itemque FG, OV ſimiles ſunt. Atqui arcus MF, FG proijciuntur in arcus KO, ON, nam puncta M, F, G proijciuntur [o] in puncta K, O, N. Igitur KO, ON partes proiecturæ KNL, ſimiles ſunt primitiui circuli MGQ partibus MF, FG. Quod erat tertium.

i *per* 16. 11.
m *per* 10. 11
n *per* 33.
o *per def.* 2.

PROPOSITIO VI.

Dati in ſphærâ circuli (DMGQ) proiectionis plano paralleli, & in partes, ſeu gradus ſecti proiecturam deſcribere.

MAximus in ſphærâ circulus ACSE vnà cum diametris ad inuicem rectis AS, CE deſcribatur in plano, vt factum vides in *figurâ* 5; & quot graduum eſt arcus AM, ſeu AQ, diſtantia circuli ab Oculo A, totidem numera gradus ex *a* in *m* & ex *a* in *q*; ducaturque recta *mq*: ea referet diametrum circuli proijciendi DMGQ. Ducatur tandem ex *a* per *m* recta *amk* occurrens ipſi *ce* in *k*, vel ex *a* per *q* recta *aql*, occurrens *ce* in *l*. Tum centro *b* per *k*, *l* deſcribe circulum *knlx*. Hic eſt proiectura dati in ſphærâ circuli DMGQ.

Demonſtratio ex *præc. prop.* manifeſta erit, ſi circulos *caes* vnà cum rectis *abs*, *cbe*, *amk*, *aql* circa lineam *kbl* immotam conuerti intelligatur, vſque dum perpendiculariter inſiſtat plano proiecturæ *bknlx*, vti vides in fig. 3. vel 4.

Seca deinde proiecturam in *k*, *o*, *n* eâdem proportione, quâ ſectus in ſphærâ ponitur circulus MFGQ, in M, F, G. Erunt arcus *ko*, *on* proiecturæ arcuum MF, FG, circuli primitiui, vt patet ex 3 parte propoſitionis præc.



piectura etiam
, in quod

um. Conus FZGA,
ur vſque ad planum
ſt proiectura circuli

G recto. Tranſibit
circulo ſectionem
uo ducantur rectæ
BCFVGT ſecans
m rectis ABS, FS,
r rectas AF, AG
I, ac proinde HI

t ad ipſam HI in
qualis erit angulo
lis HBA, SFA
liqui H & S æ-
odem ſegmento
cem habens in A,
m habens HI.
& recta HBIE
centrum tranſit,
proiectura cen-
inde diuerſum

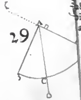
c centrum O ſunt

cturæ HQIX
um recti cum



ectura diame-
Cùm enim
centro K, pa-
eas proiectu-
m maximam
eſtque pro-

r in eandem
ima. Cùm
no produxit
b Oculo A
iectura eſt
alicubi dia-



PRO-

PROPOSITIO VIII.

Situm obliqui in ſphærâ circuli determinare.

DEtur in ſphærâ circulus OFZGR obliquus ad Oculum A, & ad protectionis planum. Per oculum A & ſphæræ centrum B agatur planum circulo OFZGR rectum. Tranſibit hoc per O circuli [a] centrum, eiuſque polos T, V; producetque maximum in ſphærâ circulum AFTGV, & in obliquo circulo diametrum FG. *Fig.6.7.8* *a per 13.1. ſph. Theod.*

Dico notis arcubus AF, AG, notum eſſe ſitum obliqui circuli in ſphærâ. Si obliquus circulus eſt [c] maximus, aut non maximus, ſed ad proiectionis [d] planum rectus, ſufficit arcus alteruter: ſi nec [e] maximus nec rectus proiectionis plano, vterque requiritur. *c Fig.6.* *d Fig.8.* *e Fig.7.*

Idcirco autem ab his arcubus deſumitur determinatio poſitionis obliqui in ſphærâ circuli, quòd inter omnia FZG circumferentiæ puncta ab Oculo A diſtent F minimè, G maximè. Si enim ſphæra ſecetur quouis alio maximo circulo non recto ad circulum OFZG, occurrens circulo ex. gr. in Z, erit arcus AZ maior arcu AF, & minor arcu AG, quod facilè lector demonſtrabit.

Porro circuli in ſphærâ ſitus, quem per diſtantiam ab Oculo determinauimus, æquè determinabitur per notam eius ab Æquatore diſtantiam FC, vel GE; quod facilè, iam dicta qui expenderit, intelliget.

PROPOSITIO IX.

Dati in ſphærâ circuli ad planum proiectionis non paralleli, (OFZGR) eiuſque centri ac polorum proiecturam deſcribere.

SEcta ſit ſphæra per centrum ſuum B ac Oculum A maximo circulo BAFSG recto ad circulum obliquum OFZGR. Tranſibit hic [a] etiam per O centrum eiuſdem, & per polos V, T; producetque in eo diametrum FG; arcuſque AF, AG eiuſdem in ſphærâ [o] ſitum determinabunt. Circulus porro BAFSG, rectus etiam erit plano [r] proiectionis, ſecabitque illud diametro CBE, ad quam diameter altera ABS per Oculum ducta, perpendicularis eſt, vt patet ex *p.1. huius & def.3.11.* *A l litteras maiuſculas inſpice fig. 6.7.8; ad minuſculas vero, fig.9. 10.11.* *a per 13.1. ſph. Theod.* *o per præc.* *r per prop.1.*

Conſtr. Deſcribe igitur in plano dato circulum, & per centrum *b* diametros *as*, *ce* perpendiculariter ſeſe interſecantes. Tum gradus arcuum AF, AG (ſupponuntur enim eſſe dati), numera ex *a* in *f* & *g*, ducaturque recta FG. Hæc diametrum repræſentat circuli proijciendi. Deinde *fg* biſectâ in *o*, per *o* & centrum *b* recta ducatur *ut*, occurrens circulo in punctis *u* & *t*. Hæc referent polos V, T circuli proijciendi. His peractis ex *a* per *f* & *g* rectæ emittantur *af*, *ag* occurrentes ipſi *ce* in *h* & *i*. Recta *hi* erit diameter proiecturæ. Quare ſi *hi* biſectâ in *k*, centro *k* per *h* & *i* circulus deſcribatur *hqix*, hic erit proiectura obliqui in ſphærâ circuli. Ducatur deinde ex *a* per *o* recta *ao* occurrens ipſi *ce* in puncto *p*. Hoc eſt proiectura centri obliqui circuli. Rurſum ex *a* per *t* recta ducatur *at* occurrens ipſi *ce* in puncto *n*. Hoc eſt proiectura poli *t*. Poſtremò ducta ex *a* per *u* recta *au* donec concurrat cum *ce*, dabit proiecturam poli alterius *u*.

Demonſtr. Planum circuli *bacse* vnà cum rectis *afh*, *aig*, *fg*, *ao*, *ubt*, *ant*, circa rectam *hie* immotam conuerti intelligatur vſque dum perpendiculariter inſiſtat plano circuli *hqix*, vti exhibetur in *Fig. 6.7.8*, in quibus circulus HQIX exiſtens in plano proiectionis per ſphæræ centrum B ducto, eſt circulus *hqix*, & circulus BACSE eſt circulus *abcse*; & puncta H, K, N, P, I ſunt puncta *h*, *k*, *n*, *p*, *i*; & puncta A, F, G, V, T reſpondent punctis *a*, *f*, *g*, *u*, *t*; & rectæ FOG, AFH, AIG, TV, ANT, AOP rectis *fog*, *afh*, *aig*, *tu*, *ant*, *aop*. Quoniam igitur per *def. 2.* ab Oculo A puncta F, G proijciuntur in H, & I, liquet obliqui circuli diametrum FG proijci in rectam HI. Quare cùm per *prop.7* obliqui circuli proiectura circulus ſit, patet circulum HQIX circa diametrum HI deſcriptum, hoc eſt circulum *hqix*, eſſe proiecturam obliqui circuli FZGR. Rurſum ex *def.2* patet punctum P eſſe proiecturam centri O. Atqui P eſt *p*. Ergo etiam *p* eſt proiectura centri O. Poſtremò quia N eſt [e] proiectura poli T; N verò idem eſt cum *n*, etiam *n* erit proiectura poli T. Quare facta ſunt, quæ petebantur. *e def.2.*



Digitized by Google

proiectionis DCYE, ſed reclinatum ſupra proiectionis planum. Reperiatur deinde per *prop.* 9. circuli obliqui dati DFZG proiectura *xhqi*, cuius diameter erit *hcbi*. Reperiatur item per *prop.*9. poli ab Oculo remotioris T proiectura *n*, quæ per *corol.*3. *p.*7 erit in diametro *hcbi*. Circumferentiam verò *dcye* partire in arcus *co*, *oo*, *oo*, æquales arcubus circuli dati FZ, ZZ, ZZ. Ex puncto *n* proiecturâ poli *t*, ſiue T, per *o*, *o*, *o*, emiſſæ rectæ determinabunt arcus *hq*, *qq*, *qq*, proiecturas arcuum dati circuli FZ, ZZ, ZZ.

Demonſtr. Circulus *dcye* cum ſuis diuiſionibus *o*, *o*,*o*, ac diametro *cbe* concipiatur in plano proiectionis, ſic vt *b* centrum ſit in ſphæræ centro B, & peripheria *docoye* in DOCYOE, & *cbe* in CBE. Ibidem concipiatur proiectura *xhqi*, cum ſuis diuiſionibus *q*, *q*, *q*, ac diametro *hcnbi*, ſic vt peripheria *xhqi* ſit in XHQI, diameter *hcnbi* in HCNBI, *n* proiectura poli T in N, recta *noq* proxima ipſi *nh* in NOQ, arcuſque *co*, *hq*, in CO, HQ. Intelligatur deinde circulus *afctsge* vnà cum inſcriptis ſibi lineis *abs*, *fhg*, *afh*, *aig*, *ant* quarum ope per *prop.*9 reperta fuit proiectura *xhqi*, circa rectam *hcnbiq* conuerti, donec ſitum ſuum priorem AFCTSGE in ſphærâ recuperet rectum videlicet tam plano proiectionis DCYE quàm circulo dato DFZG. His ita conſtitutis, liquet ab Oculo A punctum F proijci in H, & circulum BAFCSGE tranſire * per T polum circuli DFZG, itemque per Oculum A polum *circuli DCOYE. Per eoſdem polos T, A, & punctum Z aliud ducatur planum AZTA, efficiens in ſuperficie ſphæricâ arcum AZT occurrentem peripheriæ DCOYE in *ω*. Quoniam igitur peripheriæ AFCT, AZωT tranſeunt per circulorum DFZG, DCOYE polos oppoſitos A & T, intercipient per *Poriſma* æquales arcus FZ, Cω. Atqui arcus CO eſt idem cum arcu *co* qui per conſtructionem etiam æqualis eſt arcui FZ. Ergo etiam arcus Cω, & CO æquales ſunt, eademque ſunt puncta O & ω. Quare cùm ex conſtr. planum AZTA occurrat circulo DCOYE in ω, occurret eidem etiam in O, ac proinde O eſt in plano AZTA. Sed etiam recta AT adeòque & punctum N proiectura poli T eſt in plano AZTA. Ergo recta NOQ etiam eſt in dicto plano AZTA. Ducatur iam in eodem illo plano AZTA per Z ab Oculo A radius AZ, qui productus neceſſariò occurret periphetię XHQI, cùm ipſa per hyp. ſit proiectura peripheriæ DFZG. Occurrat in ϖ. Igitur ϖ eſt proiectura ipſius Z. Eſt verò (vt oſtēdi ſupra) H proiectura ipſius F. Ergo arcus Hϖ eſt proiectura arcus FZ. Vlteriùs, quia iam oſtendi rectas AZ, NO eſſe in vno plano AZTA, cùm ſint ad inuicem inclinatæ, hæc illi neceſſariò alicubi occurret. Quare cùm NO tota ſit in plano proiectionis, altera verò AZ proiectionis plano in vnico tantùm puncto occurrat, nimirum * in peripheriæ XHQI puncto ϖ, liquet NO occurrere ipſi AZ in peripherię XHQI puncto ϖ. Atqui NO per conſtr. eidem peripheriæ occurrebat in puncto Q. Ergo eadem ſunt puncta ϖ ac Q, & æquales ſunt arcus Hϖ, HQ. Quare cùm arcus Hϖ oſtenſus ſupra ſit eſſe proiectura arcus FZ, etiam HQ (hoc eſt *hq*) proiectura erit arcus FZ. Simili diſcurſu probabimus arcus reliquos *qq*, eſſe proiecturas arcuum ZZ. Quæ erant demooſtranda.

*per 15.1. ſph. Theod.

* vide def.1.

* oſtendi ſup.

PROPOSITIO XI.

Proiecturas graduum non maximi in ſphærâ circuli & ad proiectionis planum non paralleli deſcribere.

DEtur obliquus in ſphærâ circulus FZG↓ non maximus, ſectus in quotuis arcus FZ, ZZ, ZZ, quorum oporteat proiecturas exhibere. Per Oculum A & ſphæræ centrum B, planum agatur rectum circulo dato FZG↓. Hoc erit etiam rectum ᵃ plano proiectionis, tranſibitque per circuli FZG centrum ↓ ac polum T: producet autem in ſphærâ maximum circulum ACSE rectum (vt dixi) tam circulo FZG↓, quàm plano proiectionis; in circulo verò FZG↓ efficiet diametrum F↓G; ac demum in proiectionis plano diametrum CBE, in quam proinde incidet proiectura diametri FG circuli dati. Diameter porro ABS per Oculum ducta perpendicularis eſt ad ipſam CBE, vti patet ex *defin.*1. *huius* & *def.* 3.11. Concipiatur inſuper circulus in ſphærâ RYVδ proiectionis plano parallelus & æqualis dato FZG↓, ac proinde æqualiter diſtans à ſphæræ centro B. His præmiſſis,

*Ad litteras maiuſculas inſpice Fig.*16 *ad minuſculas Fig* 17.

ᵃ *per prop.*1.

Conſtructio erit eiuſmodi. Deſcribe in plano circulum *bacse* æqualem ipſi BACSE, ductiſque ad rectos angulos diametris *abs*, *cbe*, ſume arcus *af*, *ag* pares arcubus AF, AG, & iunge *fg*: ea erit diameter circuli proijciendi. Ductis igitur rectis *af*, *ag* ſecantibus ipſam *ce* in *h*, & *i*, circa *hi* deſcribe circulum *hqi*: hic per *prop.*9. eſt proiectura circuli dati FZG↓. Biſecta deinde *fg* in ↓, per *b* centrum ac ↓ ducta recta dabit punctum *t*, repræſentans circuli dati polum T. Quare ſi ducatur recta *at* occurrens ipſi *ce* in puncto *n*; hoc per *prop.* 9 erit proiectura poli *t*, ſiue T. Accipiatur deinde *bδ* æqualis ipſi *b*↓, & per δ ducatur *rδu* parallela ad *cbe*: hæc erit dia-

Digitized by Google

eandem & polos T, A, circulus ducatur maximus BDTFA: is erit vnus ex horizontibus rectis pro degentibus ſub Æquatore, Meridianus ad horizontem BMDNF perpendicularis (qui & Meridianus loci appellatur) ſit BTCAE, interſecans horizontem diametro MBN, Æquatorem diametro CBE, Tropicos diametris GH, PL. Poſtremò ductus per rectas FBD, GBL maximus circulus BGDLF Eclipticam exhibeat. His ita conſtitutis,

Manifeſtum eſt *primò*, Meridianum BTCAE, qui per hypotheſim rectus ad horizontem obliquum BMDNF, etiam eſſe tam horizonti recto BDTFA, quàm Eclipticæ BGDFL. Cùm enim Æquator BCDEF, & horizon obliquus BMDNF ambo recti ſint Meridiano BACTE, etiam DBF communis ipſorum ſectio ad Meridianum [a] recta erit. Ergo etiam *a per 19.11.* rectus horizon BADTF & Ecliptica per lineam DBF, trãſeuntes ad eumdem BACTE Meridianum [b] recti exiſtunt. Hinc *b per 18.11.*

Manifeſtum eſt *ſecundò* horizontem rectum BADTF etiam eſſe circulum horæ ſextæ reſpectu obliqui horizontis BMDNF.

Manifeſtum eſt *tertiò* diametrum DBF eſſe rectam ad diametros CE, MN, GL. Cùm enim DBF ſit communis ſectio circulorum Meridiano BACTE, rectè inſiſtentium, etiam recta [c] erit ad diametros CE, MN, GL, in Meridiani dicti plano exiſtentium. Hinc *c per def. 3. 11.*

Manifeſtum eſt *quartò* DBF eſſe lineam veri ortus & occaſus, cùm perpendicularis ea ſit ad lineas meridianas CE, MN quę ſunt communes ſectiones Meridiani BACTE cum Æquatore & horizonte obliquo. Liquet indidem, ſi in F ſtatuatur principium Arietis, in D fore principium Libræ, Cancri in G, Capricorni in L.

Manifeſtum eſt *quintò* horizontem rectum, ſiue circulum horæ ſextæ BDTFA proijci in lineam rectam quæ perpendicularis ſit ad eam lineam, in quam proijcitur Meridianus loci BCTEA. Hic enim per *prop. 3.* proijcitur in CBE, ille in DBF, quæ ad CBE per *manifeſt. tertium* perpendicularis eſt.

Manifeſtum eſt *ſextò* proiecturas tam obliqui horizontis BMDNF, quàm Eclipticę BFLDG tranſire per puncta F, D, in quibus Æquatorem ſecat recta DBF in quam proijcitur rectus horizon, ſiue circulus horæ ſextæ BDTFA.

His præmiſſis.

Oporteat Oculo in polo auſtrali A conſtituto, loci ſeu obliqui horizontis dati Meridia- *Fig. 18.* num, horizontem rectum, & Meridianos alios per ſingulos Æquatoris gradus tranſeuntis, Tropicos item & Eclipticam cum ſignis ac gradibus, horizontem obliquum cum gradibus ſuis, circulos item altitudinum horizonti parallelos PQ (quos Almincantarath appellant) cum circulo crepuſculino; poſtremò Verticales, in planum Æquatoris proijcere. His enim omnibus deſcriptio Planiſphęrij, quæ proiectionis Aſtronomicæ fructus ac ſcopus præcipuus eſt, continetur. Statuitur porro Oculus in polo auſtrali potius quàm boreali, quod ſic borealis hemiſphærij proiectio tota poſſit deſcribi, vtpote [o] circumferentiam Æquatoris non excedens; id quod ſecùs contingeret ſi Oculus in polo boreo conſtituatur: tunc enim hemiſphærij borealis proiectura euadit infinita, vt *prop. 1* oſtenſum fuit. *o per p. 1.*

PROPOSITIO XII.

Meridianum loci, cæteroſque Meridianos & horarios circulos in planum proijcere.

Deſcribatur circulus [a] CAFETD, qui repræſentabit duos ſphæræ circulos, nempe Æ- *a Fig. 19.* quatorem [b] CFED, & Meridianum loci CAET, ſed reclinatum ſupra Æquatorem; id *b Fig. 18.* quod etiam pro ſequentibus vſui fuerit adnotaſſe, vt proiectionum demonſtratio primis 11 propoſitionibus tradita, hiſce faciliùs applicetur. Deſcriptum iam circulum ad angulos rectos *c Fig. 19.* interſecent diametri [c] CE, FD. Erit CE vtrimque producta proiectura Meridiani loci, & DF vtrimque etiam producta, proiectura horizontis recti, ſiue circuli horæ ſextæ.

Patet ex *propoſ. 3*, eiuſque corollario, & manifeſto quinto.

Reliquos Meridianos per ſingulos Æquatoris gradus tranſeuntes proijcies, ſi diametri ducantur per gradus ſingulos circuli CAFETD, vel ipſi paralleli; quarum ſatis eſt extremitates deſcribere, vt factum vides in limbo *Figuræ* 24.

A Meridianis non differunt horarij circuli; ſunt enim Meridiani etiam ipſi quindenis gradibus diſtantes.

g-
o-
n-
ntis
or-
pri-

par-
roie-
&a

ĉta YFZT deſignabunt: quod rurſum ex *prop.* 10. patet. Ordinem Signorum ac graduum vtcumque exhibet figura 25, quam inſpice.

PROPOSITIO XVI.

Circulos Azimutales ſeu Verticales proijcere.

SVppoſitâ conſtructione hactenus inſtitutâ, in quâ proiectura Zenith, ſiue borealis poli Horizontis eſt [m] punctum S, pūcta verò, in quibus [a] Horizon obliquus, Ecliptica, Horizon rectus, ſeo circulus horæ ſextæ Æquatorem interſecant, ſunt T & F; per quæ tranſit linea [b] Orientis & Occidentis TF. His inquam ſuppoſitis, *Fig.* 21. m *per prop.* 14. a *per manif.* 6. b *per manif.* 4.

Deſcribe arcum circuli per tria puncta T, S, F: erit hic proiectura eius ſemicirculi verticalis primarij, qui ſupra Horizontem extat.

Numera deinde in Horizonte proiecto gradus ex.gr. 15 à T verſus R vſque in N, & totidem ab F verſus ♂ vſque in P. Per tria puncta N, S, P, deſcriptus circuli arcus eſt proiectura ſemicirculi Verticalis 15 gradibus à Verticali primario declinantis. Pari modo quot placuerit Verticalium ſemicirculos proijcies. Solent porrò in Aſtrolabijs Verticales per denos tantùm gradus deſcribi. In *Fig.* 24 per tricenos quoſque gradus deſcripti exhibentur.

Proiectionem rite inſtitutam ſic oſtendes. Verticalis primarius tranſit per Zenith & puncta veri ortus & occaſus, in quibus Horizon & Æquator ſe interſecant. Quare cùm punctum S ſit proiectura ipſius Zenith, & puncta T, F, ſint proiecturæ interſectionum Horizontis & Æquatoris, liquet proiecturam Verticalis primarij tranſire per tria puncta T, S, F. Cùm igitur quiuis ſphæræ circulus proijciatur [c] in circulum, patet Verticalis primarij ſemicirculum qui ſupra Horizontem extat, proijci in arcum circuli per puncta T, S, F deſcriptum: quod erat primum. Deinde cùm Verticales cęteri tranſeāt per Zenith, & puncta Horizontis bina diametraliter oppoſita, puncta autem N, P ſint proiecturæ [i] punctorū Horizontis diametraliter oppoſitorum, gradibus 15 vtrimque à primario Verticali diſtantium, manifeſtum eſt proiecturam ſemicirculi Verticalis gradibus 15 declinantis tranſire per tria puncta N, S, P, ac proinde [d] eſſe circuli arcum per eadem puncta deſcriptum: quod erat alterum. c *per prop.* 7 & 5. i *per p.* 15. d *per p.* 7.

PROPOSITIO XVII.

Circulum Crepuſculinum proijcere.

CRepuſculi circulus eſt Horizonti parallelus infra eum gradibus 18 depreſſus. *Fig.* 22.

Continuanda eſt conſtructio *propoſitionis* 14, quâ obliqui Horizontis proiectura deſcribitur. Ex punctis igitur M, & N, quibus recta MN Horizontis diameter ſecat circulum ACDE, numera gradus 18 vſque in I & Q. Tum ex A per I & Q emittantur rectæ ſecantes ipſam CE in X & P. Circulus circa XP diametrum deſcriptus, eſt proiectura circuli Crepuſculini. Patet ex *prop.* 9.

PROPOSITIO XVIII.

Stellas Fixas proijcere.

DVo requiruntur præcognita, ſtellæ declinatio ab Æquatore, eiuſque Aſcenſio recta. Vtrumque paſſim in tabulis Aſtronomorum reperies. Artificium ipſum inuentionis expoſui Aſtronomiæ *lib.* 5. *cap.* 1.

Si ſtella declinet ab Æquatore ad boream, declinationem eius numera in circulo CAFETD ex C in I, ductâque ex A ad I rectâ AI, ſecante ipſam CE in N, centro B per N deſcribe circulum: hic erit proiectura [a] Paralleli per datam ſtellam tranſeuntis, ac proinde proiectura ſtellæ in aliquod circuli incidet punctum, quod ſic inuenies. Numeretur in Æquatore Aſcenſio recta ſtellæ ſecundùm ordinem Signorum ex T in M. Tum ex B centro ad M ducatur recta BM, occurrens Parallelo ſtellæ iam proiecto in P. Dico ſtellam datam proijci in P: quod ſic oſtendo. *Fig.* 23. a *per p.* 6.

Ex *prop.* 3. eiuſque *Corollario* liquet Meridianum per terminum rectæ Aſcenſionis ſtellæ

datæ

b per def. Aſcenſionis rectæ, quam vide Aſtron. l. 1. n. 1. def. 39.

datæ proijci in rectam BM. Quare cùm Meridianus [b] ille tranſeat per ſtellam, patet etiam ipſam proijci in aliquod punctum rectæ BM. Atqui ſupra oſtendi ſtellam proijci etiam in aliquod punctum paralleli NO. Ergo ſtella proijcitur in communem vtriuſque ſectionem P.

Si ſtella declinat in Auſtrum, declinationem eius numera ex C in G, ductaque recta AG occurrat ipſi EC in K. Centro B per K deſcriptus circulus eſt proiectura paralleli per ſtellam tranſeuntis. Numeretur deinde Aſcenſio Recta ſtellæ ex D in S, ductaque ex B per S recta occurrat parallelo proiecto KQ in puncto R: hoc eſt proiectura ſtellæ datæ.

PROPOSITIO XIX.

Planiſphærium ſiue Aſtrolabium Polare ad datam poli altitudinem conſtruere.

Schematiſmo 18. Fig. 24. & 25. b Fig. 24. c Fig. 25. d Fig. 24. e per p. 12. i per eand. k per p. 13. m per p. 14. & 15. n per eand. o per p. 16. p per p. 17.

HOc inſtrumentum, quod cætera omnia antecellit, duobus conſtat orbibus æqualibus ſibi mutuo impoſitis. Inferiorem repræſentat circulus [b] BCREK qui Facies Aſtrolabij dicitur, ſuperiorem circulus [c] BOFIH, qui Rete nuncupatur. Superiorem limbus [d] ambit iuſtæ latitudinis & ſupra planum BCREK eleuatus, vt eo contineri poſſit tam facies ipſa, quàm Rete faciei impoſitum, ac ſupra faciem ipſam circumagi.

In faciem igitur Aſtrolabij proijciūtur hi circuli; Meridianus [e] ſiue circulus horę 12, Horizon [i] rectus ſiue circulus horæ ſextæ, [k] Æquator, duo Tropici, Horizon [m] obliquus cum ſuis gradibus ad datam poli altitudinem graduum ex. gr. 51, circuli [n] Altitudinum ſeu Almincantarath, circuli Verticales [o] ſiue Azimutales, & circulus [p] Crepuſculinus. Solent etiam paſſim inſcribi circuli Domorum, & horarum inæqualium, quorum vſus mihi non fuit tanti, vt eorum deſcriptione Planiſphærij faciem ſat multis alioquin lineis impeditam, adhuc ampliùs intricarem. Limbus faciei radijs ex B centro eductis in gradus 360 diuiditur; qui, quòd limbus ipſe ſit Æquatori coocentricus, ipſius Æquatoris gradus repræſentant; ipſæ verò radiorum è centro emiſſorum partes, quæ gradus diſtinguunt, Meridianorum per ſingulos Æquatoris gradus tranſeuntium proiecturas deſignant; è quibus illi, qui gradibus quindenis diſtant, proiecturæ ſunt circulorum horas Aſtronomicas à Meridie & mediâ nocte commonſtrantium.

Fig. 25. r per p. 13. s per p. 15. t per p. 18.

Orbis alter BOFIH, quem Rete appellauimus, faciei BCREK præciſè æqualis ſit oportet, ita vt dum faciei impoſitus intra limbum circumagitur, centrum eius cum faciei centro ſemper congruat. Reti inſcribenda eſt [r] proiectura Zodiaci, eiuſque [s] Signorum ac graduum, quàm poterit exquiſitiſſimè. Proijcienda item loca [t] ſtellarum primæ magnitudinis & præcipuarum aliquot ſecundæ. Adhæc per initia ♈ & ♎ deſcribenda linea OI, quæ Colurum Æquinoctiorum, per initia verò ♋ & ♑ linea HF, quę Colurum Solſtitiorum repręſentet. Tum limbus Retis in gradus 360 diſtribuetur, initio facto à puncto O quod ♈ initio reſpondet, & numeri graduum ſecundùm ordinem Signorum procedent. Limbus porrò Retis in gradus ſic diſtributus repræſentabit gradus Æquatoris prout ille vnà cum Zodiaco motu Diurno circumagitur, vſumque habebit inſignem Aſcenſionibus tam rectis quàm obliquis Solis & ſtellarum commonſtrandis. Gradus verò limbi alterius faciem [u] BCREK ambientis, repræſentant gradus Æquatoris concepti vt immobilis. Poſtremò Retis [x] BOFIH ſuperficies ita erit exſcindenda, vt ſola remaneant limbus, Zodiacus, & ſtellæ cum areolis quibuſdam, quibus nomina ſtellarum inſcribi poſſint, quæque efficiant vt limbus, Zodiacus & ſtellæ cohæreant. Sic enim fiet vt Reti ſupra faciem conſtituto, circuli in facie deſcripti tranſpareant. Rete ſic conſtructum faciei CERK ſuperimpone, ſic vt intra faciei limbum contineatur. Adiungatur & regula binis diopteris inſtructa & volubilis circa centrum commune B. Quod ſi Rete ſuper faciem ex C per R in E circumagatur, vniuerſa Primi Mobilis theoria inſigni cum voluptate oculis ſubijcietur. Mutatâ porro altitudine poli, ea ſolùm in conſtructione iam expoſita mutanda erunt quæ à poli altitudine dependent, nimirum Horizon obliquus, Almincantarath, Verticales, Crepuſculi circulus: cætera in facie deſcripta, & Rete totum eadem perſeuerant.

u Fig. 24. x Fig. 25.

Hæc nobiliſſimi inſtrumenti conſtructio eſt; cuius multiplices atque admirandos vſus deinceps exponam.

CAPVT

CAPVT TERTIVM.

Vſus Aſtrolabij Polaris ad datam poli altitudinem conſtructi.

Conſtructio Aſtrolabij ad Opticam pertinet, vſus ad Aſtronomiam; quem tamen, quod ab illâ dependeat hoc loco potius quàm alio exponendum putaui.

PROPOSITIO XX.

Stellæ & puncta graduum Eclipticæ, licet diurno motu circumferantur, in Retis proportionaliter ac diurnum cæli motum circumacti puncta ſemper eadem proijciuntur.

STatuatur Rete eo ſitu quo facta eſt eiuſdem proiectio vt nempe initium Capricorni Z cō- Schemat.
ſiſtat ſupra Meridianum KR verſus R. Moueatur deinde initium Capricorni Z, ex.gr. 20 18.
aut 30 gradibus verſùs Occidentem E, & ſimilis in cælo factus eſſe motus intelligatur. Fig. 24.

Dico tunc ſtellas & ſigna ac gradus Eclipticę proijci in eadem Retis puncta, in quæ primo & 25.
caſu fuere proiecta, idque ſemper in quauis motus diurni parte contingere. Cùm enim motus diurnus fiat circa polos mundi ſiue lineam per eos ductam, quæ axis dicitur, Oculus autem ſtatuatur in vno polorum, manifeſtum eſt dum ab Oriente in Occidentem cælum mouetur, ſtellas & puncta graduum Zodiaci eundem ſemper ſitum retinere tam reſpectu Oculi proijcientis, quàm plani Æquatoris, in quod ab Oculo proijciuntur. Stellarum igitur ac graduum Zodiaci proiecturæ quoad ſitum quem inter ſe illa habent, per motum diurnum non variantur, ſed ſimul omnes transferuntur, quam tranſlationem Retis circumactio ad proportionem diurni motus facta repræſentat. Ergo Reti proportionaliter ad cælum moto ſtellæ & puncta ſingula Eclipticæ, in eadem ſemper Retis puncta proijciuntur. Quod erat propoſitum.

VSVS I. PROPOS. XXI.

Si Rete Aſtrolabij ab Ortu (C) per Meridiem (R) in Occidentem (E) circumagatur, motus diurnus cæli & omnium Aſtrorum repræſentabitur.

VT clariùs, quod propoſui, intelligatur, obſerua, licet Æquator propria ſit menſura Schemat.
diurni motus; id tamen præſtari etiam à quouis circulo ad Æquatorem parallelo, quòd 18.
arcus Parallelorum & Æquatoris inter Meridianos intercepti, ſemper proportionales exi- Fig. 24.
ſtant. Artifices igitur non Æquatorem in Aſtrolabij facie deſcriptum; ſed, quia id commo- 25.
dius erat atque concinnius, limbum Æquatori concentricum ac parallelum in gradus & tempora diſtribuunt, qui proinde gradus & tempora Æquatoris repræſentant. Iſtud etiam tum hìc, tum in ſequentibus obſeruaſſe proderit plurimùm, latus regulæ per centrum tranſiens proiecturam eſſe Meridiani vel horarij circuli per gradum Æquatoris, cui regula applicatur, tranſeuntis; vt patet ex *prop.* 3. eiuſque *corollario.*

His prænotatis, cùm ſtellæ & puncta Zodiaci, licet motu diurno agitentur, in puncta proijciantur ſemper [b] eadem Retis proportionaliter ad motum diurnum circumacti, poli au- [b] *per poſt.*
tem & axis mundi circa quem diurnus motus peragitur, ab Oculo in vno polorum poſito proijciantur [c] in B centrum Æquatoris, manifeſtum eſt Reti ab Ortu in Occaſum circa B [c] *prop.* 2.
centrum reuoluto motum diurnum cæli & Aſtrorum euidenter repræſentari. Quantum porro vnaquæque Retis ſtella aut Zodiaci gradus à Meridiano in Occidentem, vel vltra proceſſerit, regulæ latus datæ ſtellæ vel dato Eclipticæ puncto applicatum oſtendet: arcus enim limbi à Meridiano R vſque ad regulam dabit quæſitum, vt ex ſupra prænotatis patet. Hæc verò ſolummodo ſint in anteceſſum dicta: quæ quidem etſi rudia ſint & pauca præ ijs, quæ deinceps exponenda reſtant, ſi probè fuerint intellecta, lucis permultum ad vſuum reliquorum rationes percipiendas conferent.

NOTA

Digitized by Google

NOTA.

Omnes vſus ſequentes Aſtrolabij intelligendos eſſe reſpectu horizontis, ad quem conſtructum eſt Aſtrolabium.

VSVS II. PROPOS. XXII.

Quâ horâ Sol oriatur & occidat, item diei ac noctis quantitatem quotidie inuenire.

Schematiſmo 18. *Fig*. 24. 25.

EX ephimeride quæ in dorſo Aſtrolabij deſcribi ſolet, vel aliunde notum habeto locum Solis in Zodiaco, eumque quære in Zodiaco Retis. Tum Reti circumacto locum Solis ſtatue ſupra horizontem obliquum ad Orientem. Regula per illum extenſa deſignabit in limbo extimo Aſtrolabij horam, quâ eo die Sol oritur; ſi deſit regula, filum per centrum B & locum Solis extenſum, dabit eodem modo quæſitum. Deinde locum Solis ſtatue ſupra horizontem obliquum ad Occidentem: & regula per Solis locum extenſa oſtendet in limbo horam quâ Sol eo die occidit. Siniſter limbi ſemicirculus KCR continet horas à mediâ nocte ad meridiem, dexter verò REK horas à meridie ad noctem mediam. Ex noto porro tempore Ortus & Occaſus Solis habetur diei & noctis quantiras, vt patet.

Exemplo praxis illuſtrabitur. Conſtructum ſit Aſtrolabium (quod in omnibus deinceps exemplis ſupponam) ad poli altitudinem grad. 51; & velim ſcire 22 Febr. quâ horâ Sol oriatur. Quia 22 Febr. Sol attingit ♓ gradum tertium, hunc in Retis Zodiaco quære, & ſtatue ſupra horizontem obliquum ad Orientem: applicata illi regula oſtendet eo die oriri Solem horis 6, minutis 53 poſt mediam noctem, hoc eſt horâ 7, minuto 7. Inde ad meridiem ſunt horæ 6, 53′, quæ duplicatæ exhibent quantitatem diei 22 Febr. horarum 13.46′.

i per prop. 20. *Demonſt*. Quoniam motus diurnus [i] non variat proiecturas in Reti factas, & horizon in Aſtrolabij facie deſcriptus, eſt proiectura horizontis dati, liquet Solis orientis centrum proijci in illud punctum Aſtrolabij, in quo gradus 3 ♓, quem eo die Sol obtinet, horizontem in Aſtrolabio deſcriptum ſecat, ac proinde latus regulæ per B centrum tranſiens, eſſe proiecturam [m] Meridiani, ſiue horarij circuli per Solis orientis centrum tranſeuntis. Quare cùm Meridiani horas in Æquatore deſignent, liquet latus regulæ horam, quâ eo die Sol oritur, in limbo Aſtrolabij Æquatorem [n] repræſentantis, oſtendere.

m per prop. 3. & corol. eius.

n vide dicta prop. præc.

Ex ijs, quæ hìc & duabus præcedentibus oſtenſa ſunt, & ex demonſtrationibus proiectionum primo capite allatis, facilè lector per ſe colliget rationes vſuum ſequentium, quos proinde abſque demonſtrationibus plerumque proponam.

VSVS III. PROPOS. XXIII.

Quantitatem diei longiſſimi ac breuiſſimi inuenire.

INitium Cancri in Zodiaco Retis notatum ſtatue ſupra horizontem obliquum ad Orientem: regula illi applicata in limbo Aſtrolabij oſtendet horam quâ Sol oritur die Anni longiſſimo. Statue deinde Cancri initium in horizonte ad Occidentem: regula per illud extenſa oſtendet horam quâ Sol occumbit die longiſſimo.

Pari modo initio Capricorni ſupra horizontem conſtituto, regulâque per id extenſa cognoſces horam Ortus & Occaſus Solis die breuiſſimo.

Ex noto tempore Ortus & Occaſus diei longiſſimi ac breuiſſimi quantitas innoteſcet.

VSVS IV. PROPOS. XXIV.

Reperire Anni diem, quâ Sol dato tempore oriatur vel occidat.

TEmpus datum ſit oportet inter Ortus dierum longiſſimi atque breuiſſimi.

Oporteat inuenire diem quâ Sol oriatur horâ quintâ. Statue regulam ſupra horam quintam in ſiniſtro limbi ſemicirculo. Tum Rete eouſque verſa, donec gradus aliquis Zodiaci

pertran-

Digitized by Google

pertranſeat Horizontis punctum illud io quo regula Zodiacum ſecat. Erit is in præſenti caſu gradus 30 ♌, ſiue initium ♍, quem locum Sol attingit 24 Aug. Igitur in locis vbi polus eleuatur grad. 51, Sol oritur horâ 5, die 24 Aug.

VSVS V. PROP. XXV.

Quâ plagâ Horizontis Sol oriatur & occidat quotidie, inuenire.

GRadum Zodiaci, quem die dato Sol obtinet, ſtatue ſupra Horizontem obliquum, ſiue ad Ortum ſiue ad Occaſum. Tum gradus Horizonti adſcriptos numera ab Ortu T, vel Occaſu F vſque ad locum Solis: numerationis terminus oſtendet quot gradibus, eo die Sol extra Orientem, vel Occidentem versùs Septemtrionem vel Auſtrum, oriatur vel occidat. *Schemat.* 18. *Fig.* 24. 25.

VSVS VI. PROP. XXVI.

Ortum & Occaſum Solis Borealiſſimum & Auſtraliſſimum inuenire.

SOl oritur & occidit borealiſſimè in Cancri initio, auſtraliſſimè in initio Capricorni. Igitur Cancri initium ſtatue ſupra Horizontem primò ad Orientem, deinde ad Occidentem. Ita Solem reperies in his regionibus gradibus fere 40 versùs boream extra Orientem oriri, cùm borealiſſimè oritur; extra Occidentem occumbere, cùm borealiſſimè occumbit.

Similiter initio Capricorni ad Horizontem ducto cognoſces Ortum & Occaſum Solis auſtraliſſimum eſſe graduum circiter 40.

VSVS VII. PROP. XXVII.

Diem anni reperire, quâ Sol in datâ Horizontis plagâ oriatur vel occidat.

DEbet autem plaga data Ortum vel Occaſum borealiſſimum vel auſtraliſſimum non excedere.

Oporteat reperire diem, quâ Sol oriatur extra Orientẽ T gradibus 20 versùs Septemtrionem. Reti in orbem acto vide quis Zodiaci gradus tranſeat per punctum Horizontis datum. Is erit in his regionibus Tauri gradus quintus. In eo Sol verſatur die Aprilis 25. Sol igitur 25 Aprilis oritur extra Orientem Verum gradibus 20 ad ſeptemtrionem.

VSVS VIII. PROP. XXVIII.

Quâ horâ quotidie crepuſcula incipiant manè, veſperi finiantur, durationem quoque atque omnem earum varietatem, cognoſcere.

CRepuſcula manè incipiunt, veſperi finiunt, vbi Sol attigerit circulum Horizonti parallelum infra Horizõtem 18 gradibus depreſſum, qui idcirco circulus Crepuſculinus dicitur.

Gradum, ſeu locum Zodiaci, quem die dato Sol obtinet, duc ad lineam crepuſculinam, primò versùs Ortum, deinde versùs Occaſum. Regula per Solis locum vtrobiq; extenſa horam oſtendet, quâ crepuſcula manè incipiũt, & veſperi deſinunt. Quod ſi horam [a] quæſieris, quâ eodem die Sol oritur, & occidit, habebitur duratio tota crepuſculi tam matutini quàm veſpertini. *a per prop.* 22.

Hunc in modum cognoſces breuiſſima eſſe crepuſcula in Æquinoctijs, eaque in his regionibus horas circiter duas durare; in æſtate verò eſſe longiſſima, & in Solſtitijs per noctem totã extendi. Si enim Cancri initium duxeris ad Meridianum RK infra obliquum Horizontem, videbis illud circulum crepuſculinum non attingere, ac proinde Solem in æſtiuo Solſtitio ne quidem horâ noctis 12 infra horizontem 18 gradibus deſcendere. *Schemat.* 18. *Fig.* 24. 25.

Quod ſi placuerit cognoſcere quotâ Æſtatis parte crepuſcula durent per totam noctem, Reti ſecundum ordinē litterarum CREK circumacto, aduerte quis Zodiaci gradus Meridianum RK infra obliquum Horizontem primus tranſeat in eo puncto, quo illum interſecat circulus Crepuſculinus. In Aſtrolabio ad poli altitudinem grad. 51 conſtructo, comperies id accidere initio Geminorum. Sole igitur ibidem poſito, hoc eſt 21 Maij crepuſcula incipiunt durare nocte totâ. Reti deinde vlteriùs circumacto, conſpicies totum Signum ♊ & ♋ Meridianum pertranſire ſupra lineam Crepuſculinam, initium verò ♌ Meridianū attingere in ipſo puncto, quo illum crepuſculi circulus interſecat, gradus autem ſequentes infra illud. Quare toto eo tempore, quo Sol ſigna ♊ & ♋ perambulat, hoc eſt à 21 Maij vſque ad 23 Iulij, numquam 18 gradibus infra Horizontem deprimitur, ac proinde crepuſcula totam noctem adæquant.

VSVS IX. PROP. XXIX.

Aſcenſionem rectam dati Eclipticæ puncti, ſiue gradum Æquatoris qui cum dato Eclipticæ puncto Horizontem rectum (CE) & Meridianum (RK) attingit, inuenire.

Schemat. 18. *Fig.* 24. 25.

PRæter limbum extimum Aſtrolabij in gradus & horas diuiſum, alius præterea eſt OHIF limbus Retis in gradus etiā ſuos diſtributus, qui Reti ſupra Aſtrolabij faciem collocato, intra limbum priorem præciſè continetur. Gradus porro limbi Retis incipiunt à puncto O, quod initio Arietis X reſpōdet, in quo Colurus æquinoctiorum proiectus IPBXO limbum interſecat, & graduum ordo ſecundùm ordinem Signorum procedit ex O in H.I. Quia verò limbus etiam ille eſt Æquatori concentricus & parallelus, atque vnà cum Reti cui adhæret circumagitur, idem præſtant gradus eius, quod Æquator vnà cum Zodiaco diurno motu circumactus, efficeret gradibus ſuis, ſi in eos fuiſſet diſtributus. Numerantur autem gradus Æquatoris ſecundùm ordinē Signorum à Sectione vernâ Æquatoris & Eclipticæ, ſiue initio ♈.

Hoc præmiſſo oporteat ex. gr. inuenire cum quo gradu Æquatoris Horizontem rectum CE, adeoque & Meridianum RK attingat finis gradus 10 ♊.

Gradum 10 ♊ (hoc eſt finem gradus 10) Reti circumacto duc ad rectum Horizontem EBC versùs Ortum C. Tum vide quis gradus limbi Retis ad eamdem partē Horizontem rectum attingat. Indicabit ille gradum Æquatoris, qui cum gradu 10 ♊ ad Horizontem rectum BC, & Meridianum BR appellit.

Ratio eſt, quia gradu 10 ♊ poſito ſupra Horizontem rectum, Arietis initium X erit ex. gr. in G, & limbi Retis punctū O Arietis initio X reſpondens, ſtabit in Q, Colurus verò Æquinoctiorum BXO in rectâ BGQ. Arcus igitur GXT, eſt Aſcenſio [a] recta gradus decimi ♊, & cum eo Horizontem rectum BC aſcendit gradus, ſeu punctū Æquatoris T; quod quantùm diſtet à Sectione vernâ XG ſecundùm ordinem Signorum numerando, indicabit arcus limbi Retis QOC, eò quòd ſimilis ille ſit arcui GXT.

[a] *vide def.* 38 & 39. *Aſtron. l.* 1. *num.* 1.

VSVS X. PROP. XXX.

Obliquam dati Eclipticæ puncti Aſcenſionem & Deſcenſionem, ſiue quis gradus Æquatoris cum dato Eclipticæ puncto ſupra Horizontem obliquum aſcendat & deſcendat, inuenire.

OPorteat reperire obliquam Aſcenſionem ac Deſcenſionem 15 gradus Cancri.

Gradum prædictum duc ad Horizontem obliquum versùs Orientem C. Tum vide quis gradus limbi Retis in Horizontis recti BC puncto C exiſtat. Indicabit ille gradū Æquatoris, qui cum gradu 15 Cancri Horizontem obliquum aſcendit. Ducatur deinde gradus 15 Cancri ad horizontem obliquum versùs Occidentē E, & vide rurſum quis limbi Retis gradus in Horizontis recti BE puncto E conſiſtat. Indicabit ille gradum Æquatoris, qui cum gradu 15 Cancri infra obliquum Horizontem deſcendit.

Res patet ſi probè intelligatur definitio Obliquæ Aſcenſionis & Deſcenſionis: quam vide *Aſtron. lib.* 1 *num.* 1 *def.* 38. Gradu ſiquidem 15 Cancri poſito in Horizonte obliquo, initium Arietis X ſtabit ex. gr. in G, illique reſpondens limbi punctum O erit in Q, & Æquinoctiorum Colurus BXO in rectâ BGQ. Arcus igitur Æquatoris GXT à G vſq; ad obliqui Ho-

Horizontis

rizontis ac Æquatoris communem ſectionem T iuxta Signorum ordinem porrectus;[a] eſt [b] Aſcenſio obliqua 15 gradus Cancri, cumque illo Horizontem obliquum aſcendit Æquatoris punctum T. Iam quia Horizon rectus EBC trāſit[c] per T ſectionem obliqui Horizontis cum Æquatore, liquet arcum limbi Retis QOC ſimilem eſſe arcui Æquatoris GXT, ergo limbi Retis gradus in C exiſtens per numerum ſibi adſcriptum indicabit quantus ſit arcus Æquatoris GXT, ac proinde quotus ſit Æquatoris gradus T, qui cum 15 gradu Cancri Horizontem obliquum aſcendit.

b *defin.* 38. *nu* 1. *lib* 1. *Aſtron*
c *vide monit.* 6 *ante prop* 12.

VSVS XI. PROP. XXXI.

Aſcenſionem rectam Solis, ſiue cum quo gradu Æquatoris Sol ad Horizontem rectum, ac Meridianum appellat, quolibet anni die reperire.

PEr *prop.* 29. inquire Aſcenſionem rectam gradus Eclipticæ quem eo die Sol occupat; ea erit & Solis.

VSVS XII. PROP. XXXII.

Obliquam Aſcenſionem ac Deſcenſionem Solis quolibet anni die inquirere.

PEr *prop.* 30. reperi Aſcenſionem ac Deſcenſionem obliquas gradus Eclipticæ, quem die dato Sol obtinet: dabunt illæ quæſitum.

VSVS XIII. PROP. XXXIII.

Aſcenſionum ac Deſcenſionum proprietates per Aſtrolabium explorare.

EXemplum dabo in vnâ alteraûe.

Prima ſit, *Quâlibet artificiali die, ſeu nocte, ſiue longa ea ſit, ſiue breuis, ſex Signa oriri & totidem occidere.* Huius veritatem per Aſtrolabium ſic cognoſces. Dies data ſit Aprilis 20, quâ Sol Taurum ingreditur. Initium Tauri in Zodiaco Retis inuentum ſtatue ſupra Horizontem obliquū ad Orientem, videbiſque tum initium Scorpij ſigni Tauro oppoſiti contingere Horizontem in Occidente. Verſo deinde Reti, Tauri initium duc ad Horizontē versùs Occidentem, & conſpicies in Horizonte Orientali initium Scorpij. Liquet igitur 20 Aprilis ab Ortu Solis vſque ad Occaſum ſex Signa fuiſſe orta, ſex alia occidiſſe. Idem eodem modo quâuis die aliâ comperies.

Altera ſit, *In omni ſphærâ Aſcenſionem cuiuſuis Signi Æqualem eſſe Deſcenſioni Signi oppoſiti.*

Per *prop.* 30. Inueni gradum Æquatoris cum quo ex. gr. oritur initium Tauri, gradum item cum quo oritur Tauri finis. Inuentorum graduum interuallum dabit arcum Æquatoris cum quo toto Signum Tauri Horizontē aſcendit. Inquiratur deinde gradus Æquatoris quîcum occidit initium Signi oppoſiti, nempe Scorpij, item gradus quîcum occidit Scorpij finis. Graduum repertorum interuallum dabit arcum Æquatoris, qui cum toto Scorpij Signo infra Horizontem deſcendit: quem priori æqualem eſſe comperies. Pari modo reliquas Aſcenſionum proprietates explorabimus. Earum præcipuas vide recenſitas *Aſtron. lib.* 7 *nu.* 43.

VSVS XIV. PROP. XXXIV.

Altitudinem Solis Meridianam eiuſque Declinationem ab Æquatore, quolibet anni die inuenire.

DEtur ex. gr. dies 20 Febr. quâ Sol ingreditur Piſces. Initium Piſcium ſtatue ſupra meridianum RK versùs meridiem; videbiſque illud contingere Almincantarath Altitudinis graduum 27. Tanta igitur eo die eſt altitudo Solis Meridiana.

Fig. 16. Notam deinde habeto altitudinem Æquatoris CD, quæ eſt complementum altitudinis poli BX, & ſit ex.gr. graduum 39, quæ quia maior eſt altitudine Meridianâ Solis CO iam repertâ gr.27: hæc ab illâ ſubſtracta relinquet DO Declinationem Solis Auſtralem ab Æquatore die 20 Febr. Si altitudo Solis Meridiana reperiatur CP maior altitudine Æquatoris CD, hæc illi ſubtracta relinquet DP declinationem Solis Borealem.

VSVS XV. PROP. XXXV.

Schemat. 18. Fig. 24. 25.

Aſcenſionem rectam cuiuſuis ſtellæ in Aſtrolabio deſcriptæ, ſiue cum quo Æquatoris gradu illa ad Horizontem rectum (CE) & Meridianum (RK) appellat, inuenire.

STellam datam duc ad rectum Horizontem CE versùs Orientem, & vide quis gradus limbi Retis eundem tunc Horizontem contingat. Indicabit ille gradum Æquatoris, cum quo ſtella data ad Horizontem rectum appellit. Quod ſi ſtellam datam ad Meridianum duxeris BR, videbis eumdem gradum limbi Retis cum eâ ad Meridianum appellere. Demonſtratio eadem eſt quæ *prop.* 29.

VSVS XVI PROP. XXXVI.

Cuiuſuis ſtellæ in Aſtrolabio deſcriptæ Aſcenſionem ac Deſcenſionem obliquam, ſiue cum quo Æquatoris puncto ſupra Horizontem obliquum aſcendat, ac deſcendat, inuenire.

Schemat. 18. Fig. 24. 25. STellâ datâ ſupra Horizontem obliquum conſtitutâ ad Orientem, vide quis gradus limbi tunc exiſtat in puncto C Horizontis recti. Indicabit ille gradum Æquatoris, qui cum datâ ſtellâ ſupra obliquum Horizontem aſcendit. Ducatur deinde ſtella data ad obliquum Horizontem versùs Occidentem, gradus limbi Retis tunc conſiſtens in E, indicabit gradum Æquatoris, qui cum ſtellâ infra obliquum Horizontem deſcendit. Demonſtratio eadem eſt quæ *prop.* 30.

VSVS XVII. PROP. XXXVII.

Stellæ cuiuſlibet in Aſtrolabio deſcriptæ altitudinem Meridianam & declinationem inuenire.

STellam datam duc ad meridianum BR, & cætera perage vt *prop.* 34. in Sole. Hæc Sola eſt differentia quod altitudo Meridiana & declinatio Solis mutentur quotidie, ſtellarum verò eædem permaneant quoad ſenſum.

VSVS XVIII. PROP. XXXVIII.

Quâ horâ ſtella quælibet in Aſtrolabio ſignata, dato anni die oriatur, culminet, occidat.

Schemat. 18. Fig. 24. 25. QVæritur ex. gr. quâ horâ ſupra Horizontem aſcendat *Sirius*, ſiue *Canis maior* die 20 Iulij. Ducatur *Sirius* ad Horizontem obliquum versùs Orientem. Die Iulij 20 Sol peragrauit gradum Caneri 27. Igitur regula per finem gradus illius extenſa oſtendet horam 6 matutinam, quâ *Sirius* eo die oritur.

Pari modo *Sirio* ad Meridianum BR adducto regula per locum Solis extenſa indicabit horam, quâ eo die *Sirius* Meridianum pertranſit.

Sirio demum ſupra Horizontem obliquum versùs Occidentem conſtituto, regula Solis loco applicata deſignabit horam, quâ *Sirius* die illo occidit.

Hunc in modum euidenter cognoſces diebus ſingulis Ortus, Culminationes, & Occaſus Fixarum versùs horarum initia prorepere, hoc eſt citiùs quotidie ac citiùs contingere atque anni vnius ſpatio illam anticipationis periodum abſolui.

VSVS

VSVS XIX. PROP. XXXIX.

Quâ horizontis plagâ ſtellæ in Aſtrolabio notatæ oriantur & occidant.

STellam datam ſtatue in Horizonte obliquo ad Orientem primò, deinde ad Occidentem. *Schemat.*
Ex gradibus Horizonti adſcriptis addiſces, quàm longè versùs aquilonem vel auſtrum, ex- 18,
tra Orientem T ſtella oriatur, extra Occidentem F occumbat. *Fig.* 24.
25.

VSVS XX. PROP XL.

Cum quo gradu Zodiaci ſtellæ oriantur, culminent, occidant, reperire.

DVcatur ſtella data ad Horizontem obliquum versùs Ortum, & vide quis tum gradus Zodiaci Horizontem eumdem tangat: is eſt cum quo ſtella oritur. Pari modo ſi ducatur ſtella ad Meridianum, vel ad obliquum Horizontem versùs Occaſum, cernes illicò cum quo gradu Zodiaci Meridianum attingat, vel occidat.

VSVS XXI PROP. XLI.

Quo anni die ſtellæ in Aſtrolabio deſcriptæ coſmicè oriantur & occidant, inuenire.

STella oritur coſmicè, quando Sole oriente oritur; coſmicè occidit, quando Sole oriente occidit.

Per *praced.* inueni gradum Zodiaci, cum quo ſtella oritur. Quo die Sol illum Zodiaci gradum attinget, ſtella coſmicè orietur. Reperi deinde gradum Zodiaci cum quo ſtella occidit. Quo die Sol erit in gradu huic oppoſito, ſtella coſmice occidet. Gradus oppoſitus reperitur in margine Orientali Horizontis, vbi ſtellam poſueris in margine Occidentali.

VSVS XXII PROP. XLII.

Quo anni die ſtellæ in Aſtrolabio notatæ acronicè oriantur & occidant, inuenire.

STella acronicè oritur, quando oritur Sole occidente; acronicè occidit, quando Sole occidente occidit.

Per *prop.* 40. reperi gradum Zodiaci cum quo ſtella oritur. Quo die Sol erit in gradu huic oppoſito, ſtella orietur acronicè. Reperi deinde Zodiaci gradum cum quo ſtella occidit. Quo die Sol eum gradum obtinebit, ſtella acronicè occidet.

VSVS XXIII PROP. XLIII.

Quo anni die ſtellæ in Aſtrolabio ſignatæ heliacè oriantur & occidant, reperire.

STella oritur heliacè, quando oritur vnâ circiter horâ ante Solem; tunc enim è Solis radijs emergens, manè ſupra Horizontem Orientalem incipit apparere. Heliacè occidit, quando vnâ circiter horâ occumbit poſt Solem; exinde enim ſub Solis nimium vicini radijs occultata apparere veſperi deſinit.

Exemplum ſtatuemus in *Aquilâ*. Ducatur *Aquila* ad Horizontem obliquum versùs Ortum *Schemat.*
perque eam regulâ extenſâ, à gradu quem regula in Aſtrolabij limbo deſignat, versùs Me- 18.
ridianum R numera gradus 15, hoc eſt vnius horæ interuallum: transfer deinde ad finem *Fig.* 24.
dicti, 25.

dicti intervalli latus regulæ, eique verſo Reti *Aquilam* ſuppone. Tum vide quis tum Zodiaci gradus Horizontem aſcendat: is erit ♐ gradus 28. Manifeſtum proinde eſt ♐ gradum 28 oriri vnâ horâ poſt ortum *Aquilæ*. Vbi igitur Sol eum gradum attigerit, quod 28 Nou. contingit, orietur is vnâ horâ poſt *Aquilam*, ſiue *Aquila* vnâ horâ ante Solem, hoc eſt heliacè orietur.

Statuatur deinde *Aquila* in obliqui Horizontis margine Occidentali & à gradu quem in limbo regula deſignat, numera versùs Meridianum R gradus 15: regulæ deinde ſupra finem gradus 15 collocatæ *Aquilam* ſuppone, & nota quis tum Zodiaci gradus infra Horizontem deſcendat. Erit ille ♒ gradus 9 quem proinde liquet vnâ horâ ante occaſum *Aquilæ* occidere. Quando igitur Sol gradum 8 ♒ ingreditur, quod accidit 8 Ianuarij, occumbit is vnâ horâ ante *Aquilam*, ſiue illa vnâ horâ poſt Solem, hoc eſt heliacè occidet.

Eodem modo cuiuſuis ſtellæ in Aſtrolabio notatæ, heliacos ortus occaſuſque reperies.

VSVS XXIV. PROP. LXIV.

Quæ ſtellæ numquam occidant, quæ per Zenith quotidie pertranſeant, quæ præcisè ad Horizontem vſque aſcendant, ex Aſtrolabio cognoſcere.

Schemat. 18, *Fig.* 24. 25.

HÆc omnia Reti ſemel per integrũ circulum circumacto, licebit vno intuitu cõſpicere, pro ijs videlicet regionibus ad quas deſcriptum eſt Aſtrolabium.

Stellæ ſiquidem quæ Reti circumacto intra obliquum Horizontem in Aſtrolabio deſcriptum, ſemper remaoent, numquam occidunt: quæ tranſeunt per punctum S, ſemel quotidie Zenith pertranſeunt: quæ Septemtrionalem Horizontis cardinem N pertranſeunt, præcisè ad Horizontem vſque deſcendunt, oon vltra, & talis in altitudine poli grad. 51 eſt *Gorgon*, ſeu *Caput Meduſæ*.

VSVS XXV. PROP. XLV.

Quouis momento Aſtrolabium cælo conformare.

OPorteat ſitum totius cæli, quem habet ex. gr. 23 Ianuarij horâ poſt meridiem ſeptimâ, in Aſtrolabio repræſentare. Applica regulam horæ ſeptimæ pomeridianæ in Aſtrolabij limbo notatæ; & quia Sol 23 Ianuarij verſatur in gradu quarto ♒, Rete ita circumage vt gradus ♒ quartus regulæ ſubſit. Talis eo tempore erit in cælo Zodiaci & omnium ſtellarum ſitus, qualis in Aſtrolabio exhibetur.

VSVS XXVI. PROP. XLVI.

Aſtrolabio ad cælum conformato quàm multa ſimul conſpectui exhibeantur.

COnſpectu vno videntur ſequenda.

1. Diei hora & Zodiaci gradus in quo Sol verſatur, quamquam ea propriè habentur ex hypotheſi.

2. Si tempus diurnum eſt, Altitudo Solis ſupra horizontem: eam quippe oſtendit circulus Almincantarath, per Solis locum tranſiens.

3. Cæli plaga, quâ Sol exiſtit, hoc eſt quantùm ab Ortu vel Occaſu ad Septemtrionem vel Auſtrum declinet: id deſignat azimuth, ſeu Verticalis per Solem tranſieos.

4. Quis Zodiaci gradus ſupra Horizontem aſcẽdat, quis item infra Horizontem deſcendat. Gradus porro Zodiaci ſupra Horizontem aſcendens, ſimpliciter dicitur Aſcendens, & ſimpliciter Deſcendens, qui deſcendit infra horizontem.

5. Quâ plagâ Horizontis Aſcendens & Deſcendens exiſtant.

6. Quis gradus Æquatoris cum Aſcendente oriatur, & cum Deſcendente occidat: Gradus enim limbi Retis in Horizonte recto tunc exiſtentes, erunt quæſiti.

7. Quis gradus Zodiaci ſit in Meridiano tam ſupra, quàm infra Horizontem.

8. Item quis Æquatoris gradus in Meridiano tam ſupra quàm infra Horizontem exiſtat.

9. Ex

9. Ex ſtellis in Aſtrolabio ſignatis, quæ ſupra Horizontem, quæ infra exiſtant.

10. Altitudines ſtellarum ſupra Horizontem exiſtentium: exhibebunt illam Almincantarath per ſingulas tranſeuntes.

11. Quâ cæli plagâ ſtellæ ſingulæ ſupra Horizontem poſitæ exiſtant: oſtendent illam Verticales quos ſingulæ tangunt.

12. Gradus Zodiaci & gradus Æquatoris, cum quibus vnaquæque ſtella in Aſtrolabio notata, Meridianum pertranſit & in Sphærâ rectâ oritur atque occidit.

Hæc omnia in Aſtrolabio ad cælum conformato ſimul conſpicienda exhibentur: ex quo illius præ alijs inſtrumentis excellentia ſatis perſpicitur.

VSVS XXVII. PROP. XLVII.

Horam interdiu ex Sole cognoſcere.

ASstrolabio liberè ſuſpenſo & regulâ in Solem directâ metire Solis altitudinem ſupra Horizontem: quod etiam Quadrantis ope licebit obtinere. Reperta ſit ex.gr. altitudo graduum 48. Zodiaci gradum, quem Sol eo die obtinet, duc ad circulum Almincantarath altitudinis graduum 48. Tum regula per gradum, ſeu locum Solis extenſa horam in limbo Aſtrolabij oſtendet.

VSVS XXVIII. PROP. XLVIII.

Horam noctu ex ſtellis cognoſcere.

ALicuius ſtellæ in Aſtrolabio deſcriptæ altitudinem ſupra Horizontem explora, quæ ſit ex.gr. graduum 38. Tum ita verſa Rete vt ea ſtella contingat Almincantarath graduum 38, eoque Retis ſitu retento regulam extende per gradum Zodiaci quem eo die Sol percurrit: oſtendet illa horam quæſitam.

Idem aliter aſſequeris hunc in modũ: Obſerua vtrùm è ſtellis in Aſtrolabio notatis aliqua oriatur vel occidat. Siquam oriri deprehenderis, eam ducito ad marginem Orientalem Horizontis obliqui in Aſtrolabio deſcripti; ſi occidere, ad Occidentalem. Tum regula per locum Solis extenſa horam oſtendet.

VSVS XXIX. PROP. XLIX.

Altitudines Solis ſupra Horizontem ad ſingulas horas & momenta quolibet anni die reperire.

SCire velim ex. gr. 22 Aprilis horâ 8 matutinâ quæ futura ſit altitudo Solis. Eo die Sol percurrit ♉ gradum ſecundum. Regulæ ſupra horam datam collocatæ gradum 2, ♉ ſuppone. Circulus Almincantarath per gradum dictum incedens, indicabit Solis altitudinem graduum 24.

Vſus inſignis eſt huius praxeos in deſcribendis Horologijs quæ per Altitudines Solis horas monſtrant.

VSVS XXX. PROP. L.

Quantùm murus ab Ortu vel Occaſu versùs Auſtrum vel Aquilonem declinet cognoſcere.

LInea Orientis & Occidentis ſit CD, Aquilonis & Auſtri AB, baſis muri declinantis EF, *Schemat.*
ad quam perpendicularis eſto GZ: hæc erit communis ſectio Horizontis & Verticalis 17.
ad murum recti. Porro muri declinatio eſt angulus EZC, ſiue FZD, cuius quantitas oſten- *Fig.* 27.
dit quantùm murus ad Oriente & Occidente ad Septemtrionem vel Auſtrum declinet. 28.

Deſigna in muro ope perpendiculi lineam Horizonti perpendicularem, quam Verticalem vocabimus, eique ſtylum infige muro rectum. Liquet tam Verticalem lineam quàm ſtylum eſſe in plano circuli Verticalis ad murum recti. Obſerua deinde quando ſtyli vmbra lineæ

Verticali congruat; atque eo momento metire Altitudinem Solis ſupra Horizontem. Tum verò Zodiaci gradum quem Sol eo die percurrit, due ad Almincantarath Altitudinis inuentæ; & vide quis Verticalis ſiue Azimuth tranſeat per locum Solis: quot gradibus ille ab Oriente vel Occidente declinat, tot graduum eſt angulus GZC: quo dempto à grad.90 recti anguli GZE, notus remanet angulus CZE, quo murus declinat ab Oriente vel Occidente.

Demonſt. Quando vmbra ſtyli lineæ Verticali congruit, conſtat Solem tunc eſſe in plano circuli Verticalis ad murum recti. Quare cùm locus Solis per operationem præſcriptam ſit in Aſtrolabio legitimè determinatus, etiam Verticalis per locum Solis in Aſtrolabio tranſiens, referet Verticalem muro rectum, ac proinde declinatio eius ab Ortu vel Occaſu in Aſtrolabio reperta, dabit angulum GZC: quo dempto ab angulo recto GZE, remanet angulus CZE muri quæſita declinatio ab Ortu vel Occaſu.

VSVS XXXI. PROP. LI.

Horologium Solare debito ſitu collocare, quamuis linea Meridiana non habeatur.

Schemat. 17. *Fig.* 29. ELige diem & horam, quâ velis Horologio deſcripto ſitum iuſtum tribuere, ex. gr. diem 20 Maij, & horam 7 matutinam. Inquire per *prop.* 49. quæ futura ſit altitudo Solis ſupra Horizontem die Maij 20, horâ 7 matutinâ: Paulò deinde ante ſeptimam ita quadrantem ſtatue vt perpendiculum abſcindat arcum BC æqualem altitudini Solis inuentæ. Tum inſtrumento in eo ſitu relicto obſerua quando Solis radius per vtramque lateris AD dioptram tranſeat; tunc enim erit hora 7. Quare ſi momento eodem ita collocetur Horologium vt vmbra ſtyli incidat in lineam horæ 7 matutinæ, debitum illi ſitum aſſignaueris.

Expediet autem tempus æſtiuum eligere, & horam diei 7 aut 8 matut. vel 4 aut 5 promeridianam: tunc enim intra breue tempus Solis altitudines variantur, & parum aut nihil officiet Refractio.

Hactenus de vſu nobiliſſimi inſtrumenti, quem inſigni auctario concludo.

PROPOSITIO LII.

Aſtrolabium particulare hactenus explicatum quoad pleroſque vſus Catholicum efficere.

Schemat. 18. *Fig.* 24. IN dorſo Orbis BCREK quem Faciem Aſtrolabij appellauimus, ſiue in orbe alio huic æquali, præter Meridianum RK, Horizontem rectum CE, Æquatorem ac Tropicos, deſcribe Horizontes obliquos 89 ad ſingulos videlicet gradus altitudinis poli, eâdem prorſus methodo, quâ ad datam vnam altitudinem poli hunc deſcripſimus *prop.* 14. Si nouum orbem illum ſiue faciem Reti ſubieceris, Aſtrolabium ex particulari catholicum efficies quoad omnes vſus hucuſque recenſitos, modò eos excipias qui à circulis Verticalibus & Almincantarath dependent; qui pro ſingulis Horizontibus ob nimiam multitudinem deſcribi non poſſunt.

CAPVT IV.

Proiectio ſphæræ in planum Coluri Solſtitiorum, Oculo in principio Arietis vel Libræ conſtituto.

HOc ſitu Oculi ſphæra proiecta exhibet Aſtrolabium vniuerſale cuius vſum Gemma Friſius expoſuit, quem conſule. Modum huius proiectionis dum expono, vniuerſim

NOTA

1. Horizontis ſpecie non variari mutatâ Longitudine, ſed Latitudine, ſeu Altitudine poli. Degentibus enim ſub eodem Parallelo omnia cæli phœnomena eodem modo apparent, cum eâ tantùm differentiâ, quòd magis Orientalibus appareant citiùs. Quare ſi per initia ♈ ac ♎, hoc eſt per Æquatoris & Eclipticæ ſectiones, ad ſingulos Coluri Solſtitiorum gradus circuli

maximi

maximi deſcripti intelligantur, illi omnes Horizontium ſpecies repræſentabunt.

2. Quando igitur Oculum ſtatuimus in principio ♈ vel ♎, intelligere oportet conſtitui illum in communi interſectione Horizontis, Æquatoris & Eclipticæ; quod meminiſſe in ſequentibus propoſitionibus lector debebit.

3. Quando Oculus ponebatur in alterutro mundi polo, proiecimus aſpectu vno in planum Æquatoris non ſolùm hemiſphærium Oculo oppoſitum, ſed eius etiam, in quo erat Oculus, partem tantam, quantam capere plani dati amplitudo potuit. Verùm Oculo in principio ♈ vel ♎ conſtituto, commodius erit, ſi in planum Coluri Solſtitiorum aſpectu vno illud tantùm hemiſphærium proijciatur, quod Oculo oppoſitum eſt.

4. Oculo igitur poſito in principio ♎, hemiſphærium Arietis cum ſemiſſibus Eclipticæ, Horizontis, Æquatoris, Parallelorum, Meridianorum, in ipſo exiſtentibus in planum Coluri proijcitur, eſtque proiectura ipſi Coluro æqualis, vt patet ex *prop*. 1. Quod ſi Oculum ad ♈ initium transtuleris, in Colurum proijcietur hemiſphærium ♎ cum ſuis ſemicirculis; eritque rurſum proiectura non ſolùm Coluro æqualis, ſed etiam planè ſimilis proiecturæ hemiſphærij prioris, ac proinde factâ proiecturâ vnius, habetur & alterius.

His prænotatis, ſit

PROPOSITIO LIII.

Colurum Æquinoctiorum, Æquatorem, Parallelos, ac Meridianos proijcere.

Schemat. 18.
DEſcribatur circulus ADBEC referens Colurum Solſtitiorum, qui reliquorum circu-
lorum proiecturas excipiat: ſit B polus Borealis, C Auſtralis. *Fig.* 30.

1. Principia ♈ & ♎ proijciuntur in A centrum Coluri Solſtitiorum. Cùm enim princi-
pia ♈ & ♎ ſint poli ipſius Coluri, manifeſtum eſt ſi Oculus ſtatuatur in principio ♎, ab eo-
que radius emittatur ad principium ♈, hunc Coluro, qui iam eſt planum proiectionis, oc-
currere in ipſo centro A, ac proinde in hoc [b] proijci ♈ principium. Pari modo ſi Oculus exi- b *per def.* 2.
ſtat in principio ♈, principium ♎ in centrum A proijcietur.

2. Colurus Æquinoctiorum proijcitur in axem mundi BC. Cùm enim is tranſeat per
initia ♈ & ♎, adeóque per Oculum, liquet [c] eum proijci in rectam lineam, & quia tranſit per c *per p.* 8.
mundi polos, liquet proiici in axem BC. Verùm tum hic, tum in ſequentibus memento no-
tationis quartæ.

3. Æquator proijcitur in Solſt. Coluri diametrum DE, quæ axem BC rectè interſecat.
Nam quia Æquator tranſit per initia ♈ & ♎, hoc eſt per Oculum, etiam is proijcitur [d] in li- d *per eand.*
neam rectam, diametrum nempe Coluri Solſtitiorum: & quia à polis B, C, æqualiter diſtat,
patet eum proijci in diametrum DE axi BC perpendicularem.

4. Semicirculum DCE partire in gradus 180. Ex B per ſingula partitionum puncta e- *Fig.* 30.
miſſi radij proiecturam Æquatoris DE [d] in gradus ſuos diſtribuent in punctis P. Quare ſi & 31.
per mundi polos B, C, & ſingula puncta P deſcribantur [o] arcus circulorum BCP, erunt hi d *per p.* 4.
proiecturæ Meridianorum per ſingulos Æquatoris gradus tranſeuntium. o *per ſ.* 4.

Cùm enim gradus Æquatoris proiecti ſint in P, P, liquet Meridianorum proiecturas tran-
ſire per P, P. Tranſeunt autem & per polos B, C. Cum igitur Meridianorum proiecturæ
ſint [i] circuli, liquet eas eſſe circulorum arcus per puncta B, P, C deſcriptos. i *per p.* 7.

5. Quadrantes EB, EC diuide ſingulos in gradus 90. Radij ex D per ſingula diuiſionum *Fig.* 30.
puncta emiſſi BC proiecturam Coluri Æquinoctiorum in gradus ſuos diſtribuent in pun- & 31.
ctis, O, O. Quare ſi per gradus Coluri Solſtitiorum F, K æqualiter ab Æquatore DE di-
ſtantes, & per puncta O deſcribantur [m] circulorum arcus, erunt hi proiecturæ Parallelorum m *per ſ.* 4.
per ſingulos Latitudinis gradus tranſeuntium.

Talis Meridianorum & Parallelorum proiectio aptiſſima eſt ad deſcribendas mappas Geographicas, vt dicetur pluribus in Geographiâ.

PROPOSITIO LIV.

Tropicos, Polares circulos, & Eclipticam proijcere.

1. AB Æquatoris proiecturâ DE numerentur vtrimque gradus 23,30′. DF, DI, item EH, *Fig* 32.
EG, ducanturq; rectę DH, DG ſecantes BC in Q & R. Per tria pũcta F, Q, H, deſcrip-

tus

tus arcus erit proiectura Tropici ♋, arcus verò deſcriptus per tria puncta I, R, G, dabit proiecturam Tropici ♑.

Arcus enim AQ eſt proiectura graduum 23. 30′ Coluri Æquinoctiorum, vt patet ex *p.*4. Liquet igitur proiecturam Tropici ♋ tranſire non ſolùm per F, & H, ſed etiam per Q. Qua-
*n per p.*7. re cùm Tropici proiectura [n] ſit circulus, erit ea circuli arcus per tria puncta F, Q, H deſcriptus.

2. A polis B, C, numera vtrimque gradus 23. 30′, BK, BL, CM, CN, ducanturque rectæ DL, DN, ſecantes BC in S & T. Per tria puncta K, S, L, item M, T, N, deſcripti arcus ſunt proiecturæ circulorum Polarium.

Patet ſiquidem ex *prop*.4. BS proiecturam eſſe graduum 23. 30′ Coluri Æquinoctiorum. Quare proiectura Polaris Arctici tranſit non ſolùm per puncta K, L, ſed etiam per S. Ergo
*p per p.*7. cùm Polaris circuli proiectura ſit [p] circulus, ea erit circuli arcus per puncta K, S, L deſcriptus.

3. Ducatur recta IH; tranſibit illa per centrum A, eritque proiectura Eclipticæ.

Cùm enim Ecliptica tranſeat per Oculum in principio ♈ vel ♎ conſtitutum, proijcietur
*r per p.*3. in [r] rectam lineam: & quia Tropicos Ecliptica tangit in I & H principijs ♋ & ♑, proijcietur in rectam non aliam quàm FG.

PROPOSITIO LV.

Eclipticæ gradus ac Signa & Signorum Parallelos proijcere.

Schemat. 19. *Fig.* 32.

1. SEmicirculum INH diuide in ſex partes æquales, in punctis ω, hoc eſt in ſex arcus 30 graduum, & ex puncto K quod alterũ ſemicirculum IKH bifariam ſecat, per diuiſionum puncta ω radios emitte: quorum medius KωN tranſibit per centrum A. Secabunt illi in recta
a per p. 4. IH, proiecturas [a] ſex arcuum 30 graduum, ſiue ſex Signorum quæ ſunt in Eclipticæ ſemicirculo qui Oculo opponitur. Eædem porro etiam erunt proiecturæ ſex Signorum reliquorum, iuxta notationem 4 ſupra. Ordo Signorum proiectorum is erit, quem figura monſtrat.

2. Circa rectas HG, FI ſemicirculos deſcribe HOG, FOI. Hos in 6 arcus æquales partire in punctis O, quorum ea quæ ſunt oppoſita rectis lineis connecte ſecantibus peripherias FDI, HEG in punctis Z & X. In his Signorum paralleli ſecabunt peripheriam Coluri Solſtitiorum BDCE. Quare arcus per puncta ſingula rectæ HI, in quæ proiecta ſunt Signorum initia, & bina puncta Z, X, illis reſpondentia deſcripti, erunt proiecturæ Parallelorum per Signorum initia tranſeuntium.

3. Eclipticæ proiecturam IH in gradus diſtribues, ſi ſemicirculo INH in gradus 180 diuiſo, ex K per ſingula diuiſionum puncta rectas ipſam IH interſecantes, emiſeris, vt patet ex *prop*. 4.

PROPOSITIO LVI.

Horizontem ad datam poli Altitudinem proijcere, & in gradus diſtribuere.

Schemat. 19, *Fig.* 33.

A Polo B in Coluro Solſtitiorum BDCE numera gradus datæ Altitudinis poli vſque in F. Per F & centrum A duc rectam FAG. Hæc eſt proiectura Horizontis ſupra quem Altitudine datâ polus attollitur.

o vide not. 2. *c per p.*3.

Nam quia Oculus exiſtit [o] in communi ſectione Æquatoris, Eclipticæ, & Horizontis, liquet [c] eum proijci in diametrum Coluri qui eſt planum proiectionis. Proijcitur ergo in diametrum FG, quæ abſcindit arcum BF datæ Altitudini poli æqualem.

Hinc patet regulam mobilem circa centrum A omnes Horizontium ſpecies repræſentare.

Horizontis proiecturam FG in gradus ſuos diſtribues, ſi ſemicirculo FCG in partes 180 ſecto, ex puncto O quod alterum ſemicirculum biſecat, rectas ad ſingula diuiſionum puncta ipſam FG interſecantes, emiſeris, vt patet ex *prop*. 4.

PRO-

PROPOSITIO LVII.

Circulos longitudinum & Parallelos Eclipticæ proijcere.

PRoijciuntur eodem modo, quo Meridiani & Paralleli Æquatoris *prop.* 53. Quare ſi B, C Fig. 30.
ponantur eſſe poli Eclipticæ, & DE proiectura Eclipticæ in gradus ſuos per *prop.* 55 di-
ſtributa in punctis P, arcus BPC qui priùs erant proiecturæ Meridianorum, iam erunt pro-
iecturæ circulorum Longitudinis: arcus verò FOK, qui fuerant proiecturæ Parallelorum
Æquatori, iam erunt proiecturæ Parallelorum Eclipticæ.

PROPOSITIO LVIII.

Verticales & Horizonti Parallelos proijcere.

PRoijciuntur eodem modo vt Meridiani & Paralleli Æquatoris. Nam Schemat.
Si Poli Horizontis ponantur eſſe B, C, & DE proiectura eſſe Horizontis dati, eaque 18.
in ſuos gradus diſtribuatur in punctis P, quemadmodum *prop.* 53. *num.* 4. diſtributus eſt Æ- Fig. 30.
quator; arcus BPC erunt proiecturæ Verticalium, arcus verò FOK proiecturæ Parallelo-
rum Horizonti.

PROPOSITIO LIX.

Aſtrolabium Æquinoctiale catholicum conſtruere.

IN planum circuli ABXCZ, Colurum Solſtitiorum & loci cuiuſuis Meridianum repræ- Schemat.
ſentantis, proijce [a] Colurum Æquinoctiorum, Æquatorē, Parallelos, [d] Tropicos, Polares, 20.
Eclipticā, [e] cum ſuis Signis & gradibus Meridianos [f] ſeu horarios circulos. Planum verò Co- Figura
luri BXDZ limbus ambiat iuſtæ latitudinis, in quo gradus Coluri notentur. Deinde regu- vltima.
lam conſtrue mobilem circa centrum A, cuius latus BA ſemper tranſiens per centrum A, ſit a per prop 53
æquale aſſumptæ diametro Sphæræ, ſeu Coluri Solſtitiorū, & in gradus diſtributum [b]. Repræ- d per p. 54.
ſentabit ea & Horizontem [c] quemcumque, & quemuis maximum circulum plano proiectio- e per p. 55.
nis rectum, vt Æquatorem, Eclipticam &c. Fiat deinde regula ND æqualis ſemidiametro f per p. 53.
Sphęræ ſeu Coluri in quem Sphæra proijcitur, habens eamdem ſecundùm gradus diuiſionem b per p. 56.
quam habet regula Horizontalis & diameter Planiſphærij. Hanc deinde Horizonti Mobili c per p. 56.
BC internis excauato ita inſeres, vt, ſitu perpendiculari ſemper retento, moueri per eum ab extremitate vnâ B ad C aliam poſſit, quâ ex causâ etiā Curſor appellatur. Aptetur deniq; Brachiolum cum ſuo apice ſeu indice, vt figura exhibet, affigi hoc ſolet Curſori. Atque hęc quidem anterior Aſtrolabij pars eſt, quæ etiam abſolutè Aſtrolabium vocari ſolet. Altera pars ſeu Dorſum continere poteſt in circulis exterioribus inſcriptos totius Anni dies & menſes, & gradus ac Signa Zodiaci illis reſpondentes, item horas Aſtronomicas. Interius verò, pars ſuperior complecti poteſt horas inæquales, inferior ſcalam altimetram. Regula denique circa centrum mobilis ac binis diopetris inſtructa apponitur. Hæc conſtructio: vſum vnum alterumue ſubiungo.

VSVS PRIMVS.

Ortum & Occaſum Solis & aliarum ſtellarum; item arcum nocturnum & diurnum in quâcumque ſphærâ, inuenire.

SI ſphæra recta eſt, nulla eſt difficultas, cùm in illâ ſemper Sol & Stellæ reliquę oriantur horâ ſextâ à mediâ nocte, occidant horâ ſextâ à meridie; & arcus nocturni & diurni ſemper ſint duodecim horarum.

Si ſphæra obliqua eſt, regula Horizontalis conſtituatur ad latitudinem Horizontis propoſiti, & notetur Parallelus per locum Solis aut Stellæ deductus; hic namque vbi concurret cum regulâ Horizontali, exhibebit horam Ortus & Occaſus cognoſcendam ex circulis horarijs prope quos interſectio occurrit. Ab eo autem loco vſq; ad meridiem numerati gradus circuli

culi paralleli dabunt arcum ſemidiurnum, numerati verò vſque ad lineam mediæ noctis exhibebunt arcum ſeminocturnum.

Si Parallelus ſtellæ aut Solis ſit totus ſupra Horizontem, tunc non occident; ſi ſit infra, non orientur.

VSVS SECUNDUS.

Horam à meridie aut mediâ nocte ex Altitudine Solis aut ſtellæ inuenire.

COnſtitue regulam Horizontalem ad loci dati Latitudinem, & Apex Brachioli collocetur in Parallelo Solis aut datæ ſtellæ ad æſtimatam vtcumque horam. Transferatur deinde Horizon cum Brachiolo ad lineam quæ Æquatorem exhibet, & ſi tum Apex Brachioli incidat in circulum Parallelum Altitudinis aut datæ aut inuentæ Solis vel ſtellæ, hora aſſumpta erit vera: ſi verò indicauerit Altitudinem maiorem, quæratur hora propiùs ad meridiem: quod ſi minorem, quæratur hora remotiùs à meridie. Quare reductâ lineâ Horizontali ad loci Latitudinem ponatur Apex in Parallelo Solis aut ſtellæ remotiùs aut propiùs ad meridiem ſecundùm iam dicta, & tũ rurſum, vt ſupra, referatur ad Æquatorem. Quod tentamen toties repetatur donec Apex, in Parallelum Altitudinis Solis aut ſtellæ exactè incidat, conſtituto Horizonte ad Æquatoris lineam. Poſtquam ergo, repetito tentamine, res ſucceſſerit, collocetur iterum Horizon ad loci dati Latitudinem, & Apex Brachioli exactè horam indicabit.

VSVS TERTIUS.

Latitudinem ortiuam & occiduam Solis aut ſtellarum ex Latitudine Loci cognitâ, inuenire.

COllocetur regula Horizontalis ad Latitudinem Loci dati. Parallelus per locum Solis aut ſtellæ incedens vbi Horizontem interſecat, oſtendit amplitudinem ortiuam ſecundùm numerum graduum Horizontis qui intercipiuntur inter Regulæ centrum & dictam interſectionem. Et ſi Sol aut ſtella declinet in Auſtrum, erit Latitudo Auſtrina, ſi ad Boream, Borea; Latitudini ortiuæ, occidua æqualis eſt.

Plures vſus qui deſiderat conſulat (vt monui initio Capitis) *Gemmam Friſium alioſque: nobis ſufficit proiectionis Theoriam, ex quo omnis vſus profluit, expoſuiſſe & demonſtraſſe.*

Scholium.

Geminum hactenus Aſtrolabium expoſuimus, alterum Polare, quod Oculus dedit in Polorum alterutro conſtitutus; Æquinoctiale alterum, quod ab Oculo in principio ♈ vel ♎ poſito profluxit: quæ ſi inter ſe conferre voluerimus, alterum alteri iam præſtare, iam cedere comperiemus. Æquinoctiale vſus vniuerſalite Polari ſubinde antecellit quidem, ſed viciſſim ab illo in multis vincitur. Polare ſiquidem & diei noctiſque horam, quod in Aſtrolabijs inprimis expetitur, ex Altitudine Solis aut ſtellæ expeditiſſimè indicat, quam Æquinoctiale non niſi coniecturâ quâdam, & ſæpius pertentando exhibet. Deinde ſpectaculum oculis periucundum præbet, dum ſtellæ oriri, culminare, & occidere paulatim ad Retis motum conſpiciuntur. Adhæc cælo conformatum, res duodecim diuerſas, quas prop. 46 *recenſui, vno aſpectu videndas exhibet. Accedit his omnibus, quòd ipſum quoque quoad vſus pleroſque catholicum reddi poſſit, vt* prop. 52, *oſtenſum eſt. Quando igitur hæc inſtrumenta inuicem excedunt exceduntur que, vtrumque adhibere conſultum erit. Si quis autem etiam tertium (de quo infra) his adiunxerit, is ad omnem Aſtronomicum vſum quàm optimè fuerit inſtructus.*

PRO-

CAPVT V.

PROPOSITIO LX.

Sphæram proijcere Oculo in Zenith conſtituto.

HOc Problemate concludam genus illud proiectionis, quod Oculum in ſphæræ ſuperficie collocat. Quamuis enim ad vſus Aſtronomicos parum aut nihil faciat, ſubſeruire tamen poteſt ad Geographicos, vt ſuo loco exponam.

Res porro tota verbo prope vno abſoluitur, cùm ea proiectio non differat ab illâ, quâ Oculus in polo conſtituitur, ſi nomina circulorum permutentur. Nam circulus qui in illâ referebat Æquatorem, in hac Horizontem repræſentat; & proiecturæ Tropicorum reliquorumque Æquatori parallelorum in illa, in hac ſunt proiecturæ parallelorum Horizonti, ſeu Almincantarath: rurſum qui in illâ ſunt proiecturæ Horizontis, Almincantarath & Verticalium, in hac proiecturæ erunt Æquatoris & Parallelorum eius, ac Meridianorum. Poſtremò rectæ lineæ quæ per centrum proiectionis ductæ, erant proiecturæ Meridianorum in illâ, in hac erunt Verticalium proiecturæ. Quare qui illius proiectionis modum, quem *2. cap.* expoſuimus, probè intellexerit, hanc quoque nullo negotio perficiet.

CAPVT VI.

Proiectionis Orthographicæ fundamenta.

SPecies altera proiectionis Aſtronomicæ, vt huius libri principio dixi, ea eſt quâ ſphæra vel alia quæuis magnitudo in planum tranſcribitur radijs ad ipſum planum perpendicularibus. Quod ſi proiectionis etiam huius principium referre ad Oculum placuerit, neceſſe erit eum diſtantiâ quodammodo infinitâ à proiectionis plano remoueas: ita enim continget vt radij ab eo per ſingula magnitudinis proijciendæ puncta euibrati reddantur quoad ſenſum paralleli. Guido Vbaldo infinita illa Oculi diſtantia diſplicet: neque ego diffiteor fictitiam eſſe miniméque neceſſariam. Sed quidquid eâ de re ſenſeris, ad ſcopum hic intentum intereſt omnino nihil. Hoc certum, proiectionem, de quâ agitur, à radijs ſubiecto plano perpendicularibus dimanare.

Definitiones.

1. Proiectio orthographica eſt quâ ſphæra cum ſuis circulis, vel alia magnitudo, tranſcribitur in planum radijs ad ipſum planum perpendicularibus.
2. Punctum proijcitur in punctum quòd perpendicularis à puncto proijciendo ducta in plano proiectionis deſignat.
3. Cùm perpendiculares nomino, intellige ad planum proiectionis.

PROPOS. LXI.

Linea recta ad proiectionis planum perpendicularis, proijcitur in punctum, quo ipſa planum ſecat.

PAtet ex definitione 1.

PROPOSITIO LXII.

Recta linea (AB) proiectionis plano non perpendicularis, proijcitur in rectam (EF) à perpendicularibus extremis (AE, BF) in plano proiectionis comprehenſam.

PEr EABF ducatur planum ſecans planum proiectionis rectâ EF. Cùm AE, BF per hyp. ſint rectæ ad planum proiectionis, etiam planum ª EABF eidem rectum erit. Sumptis igitur in AB punctis quotcumque, O, ſi ab his ad communem ſectionem EF, perpendiculares *Schemat.* 18. *Fig.* 34. ª *per* 18. 11.

b patet ex def. 4. 11. c per def. 2. lares ducantur OI, hæ quoque ad proiectionis planum [b] perpendiculares erunt. Omnia igitur puncta rectæ AB proijciuntur [c] in puncta ipſius GF. Ergo ipſa quoque AB proijcitur in rectam EF.

PROPOSITIO LXIII.

Schemat. 18. Fig. 34.

Proiectura datæ rectæ (AB) maxima eſt, cùm (AB) fuerit plano proiectionis parallela.

d per hyp. i per 16 3.

CIrca datam rectam circulum deſcribe, in quo ſitum habeat primò parallelum in AB, deinde obliquum in CD, & perpendiculares demittantur AE, BF. Per *præc.* AB proijcitur in EF, & CD in GH. Iam quia anguli AEF, BFE [d] recti ſunt, eſtque AB parallela ad EF, etiam EAB, FBA recti erunt, adeoque EA, FB circulum [i] tangunt in A & B. Ergo perpendiculares CG, DH, cadunt intra perpendiculares AE, BF, ac proinde GF maior eſt quam IH. Ex quo liquet propoſitum.

Corollarium.

Ex dictis patet rectam lineam, cùm ſitum habet proiectionis plano parallelum, proijci in rectam ſibi æqualem; in rectam verò ſe minorem, quando ſitum habet obliquum.

PROPOSITIO LXIV.

Schemat. 18. Fig. 35.

Plana ſuperficies (ACBD) ac proiectionis planum recta proijcitur in rectam lineam (AB), quâ proiectionis planum ſecat.

o patet ex def. 4. 11. m per def. 2.

IN plano dato ducantur quotcumque COD, COD perpendiculares communi ſectioni AB. Quia planum datum ACBD perpendiculare eſt plano proiectionis, rectæ COD perpendiculares ſectioni communi, erunt etiam perpendiculares [o] plano proiectionis. Ergo rectæ COD, proijciuntur [m] in O, O, puncta communis ſectionis AB, ac proinde totum planum ACBD proijcitur in totam AB.

Corollarium

Hinc patet circulum rectè inſiſtentem plano proiectionis per centrum ſuum ducto, proijci in rectam AB, quà proiectionis planum interſecat.

PROPOSITIO LXV.

Schemat. 18. Fig. 35.

Circulum (ACBD) plano proiectionis rectum, cum ſuis gradibus Orthographicè proijcere.

DVcatur in eo diameter AB, quæ per *præc.* ſit ipſius proiectura. Sit autem peripheria circuli ſecta in gradus, ſeu arcus æquales in punctis C, C; D, D; ab his ducantur perpendiculares CO, CO: hæ proiecturam circuli AB in gradus diſtribuent, vt patet ex ante dictis.

Vel puncta diuiſionum oppoſita C, D, iunge rectis CD, CD, ſecabunt itidem illæ proiecturam AB in gradus ſuos.

PROPOSITIO LXVI.

Circulus proiectionis plano parallelus in æqualem ſibi circulum proijcitur; obliquus in ellipſim.

Schemat. 19. Fig. 36.

PRima pars patet; ſecundam ſic oſtendo.

Eſto circulus ACBDE proiectionis planum interſecans diametro ſuâ CAD, ad quam alia ducatur diameter perpendicularis BAE. Proiectura circuli radijs perpendicularibus BF, NI, EG, OM, aliiſque infinitis producta, ſit ACFDG, in quâ ducatur FAG. Quia BF recta eſt

ſta eſt ad planum proiectionis DFCG, etiam per 18. 11 planum ABF rectum erit eidem.
Cùm igitur DA ſit recta ad BA, erit quoque ad FA recta, vt patet ex *def.* 4. 11. Ducantur in-
ſuper IP parallela ad FA, & NP parallela ad BA. Quia igitur BA, FA ſunt rectæ ad DAC,
etiam NP, IP ad DAC rectæ erunt. Deinde quia BF, NI perpendiculares ſunt proiectionis
plano, etiam erunt ad rectas FA, IP in eo ductas [a] perpendiculares, adeoque recti ſunt & *a per def. 3. 11.*
æquales anguli BFA, NIP. Deinde cùm NP, PI, parallelæ ſint ad BA, AF, etiam anguli
BAF, NPI [b] æquales erunt. Triangula igitur BFA, NIP ſimilia ſunt, [i] ideoque FA eſt ad *b per 10. 11.*
IP, vt BA ad NP, & quadratum FA ad quadratum IP, [m] vt quad. BA ad quadr. NP. Sed *i per 4. 6.*
quadr. BA eſt ad quadr. NP, vt rectangulum CAD ad rectangulum CPD, cùm hæc illis *m per 22. 6*
ſint [n] æqualia. Ergo etiam quadr. FA eſt ad quadr. IP, vt rectang. CAD, ad rectang. CPD: *o patet ex*
quæ cùm [o] circuli & ellipſeos proprietas exiſtat, patet figuram AFDGC ellipſim eſſe vel cir- *corol. p. 17. 6.*
culum. Circulum non eſſe ſic oſtendo. Cùm BE plano proiectionis non æquidiſtet, proijci-
tur in rectam ſe [n] minorem. Atqui [r] proijcitur in rectam FAG. Ergo FAG minor eſt quàm *r per 21. 1. conic.*
BAE, hoc eſt quàm CAD, quæ æquatur ipſi BAE. Quoniam igitur figuræ CFDG diame- *n per corol.*
tri FG, CD ſunt inæquales, liquet eam non eſſe circulum. Cùm ergo ſit ellipſis vel circulus, *prop 62.*
ellipſis erit, cuius maior axis DC minor FG, eſt enim oſtenſum ſupra eſſe rectas ad ſe inui- *s per p. 61.*
cem DA, FA.

Corollarium.

In proiectione Orthographicâ ſemicirculus DBC proijcitur in ſemiellipſim DFC, alterque ſemicirculus DEC in ſemiellipſim alteram DGC. Secùs fit in proiectione priori quæ Oculum ſtatuebat in ſuperficie Sphæræ; in eâ ſiquidem inæquales proiecturæ partes æqualibus circuli proijciendi portionibus reſpondent, vt patet ex *coroll. prop.* 9.

PROPOSITIO LXVII.

Circulum proiectionis plano non Parallelum cum ſuis gradibus Orthographicè proijcere.

Detur circulus BDEC ad proiectionis planum inclinatus angulo BAF, & ſectus in æ- *Schemat. 19.*
quales arcus in punctis N, N, O, O. *Fig. 36.*
Deſcribatur in plano dato circulus *b*D*e*C æqualis dato; per cuius centrum ducantur ad *Fig. 37.*
rectos angulos B*e*, DC, & BE, conſtitutus ad centrum BA*b* angulum æqualem dato inclinationis angulo. Ex B & E perpendiculares eductæ abſcindent FG axem minorem ellipſeos, quæ proiectura eſt dati circuli. Quare ſi circa axes DC, FG deſcribatur ellipſis, habetur quæſitum.

Demonſtratio. Patet ex *præc.* ſi circa rectam FAG triangula FBA, GEA ita circumagantur, vt rectè inſiſtant plano *b*D*e*C, vnum ſupra, alterum infra, quod factum vides in *fig.* 36.

Vt proiecturam in gradus diſtribuas ita ratiocinare. In dato circulo obliquo per diuiſio- *Fig. 36.*
num puncta B, N, ducantur BA, NP perpendiculares ad DC, & ex iiſdem demittantur perpendiculares BF, NI. Patet arcus BN, NC proijci in arcus FI, IC. Item patet ſi circa rectam CD circulus obliquus reclinetur ſupra proiectionis planum in D*bn*C*e*, rectæque BA, NP in *b*A, *n*P, eas tranſire per F, & I, ac manere perpendiculares ad DC.

Efficies igitur quæſitum, ſi deſcriptum in dato plano circulum D*b*C*e* æqualem dato in gra- *Fig. 37.*
dus diſtribuas in punctis *n, n, o, o,* & à ſingulis diuiſionum punctis perpendiculares emittas *n*P, proiecturam DFCG ſecantes in punctis I & M: vel ſi oppoſita diuiſionum puncta coniungas rectis *no*.

PROPOSITIO LXVIII.

Ellipſis proijcitur in ellipſim; ſed vno caſu in circulum.

Pars prima ſimili modo oſtenditur quo *p.* 65. Alteram ſic demõſtro. Ducatur in proiectio- *Schemat.*
nis plano recta DB æqualis axi minori ellipſis datæ: cui in eodem plano æqualem deſcri- *19.*
be CE, ſic vt ambæ inuicem biſariam & rectè ſecent in A. Ex AC productâ ſume AI parem *Fig. 38.*
axi maiori. Tum centro A per I deſcribe circulum ad planum proiectionis rectum, & ex puncto C erige rectam CO proiectionis plano perpendicularem, circulo occurrentem in F. Per

Digitized by Google

F & A duc rectam FA, eamque produc in G, vt ſint æquales FA, AG, iungaturque GE, quam patet eſſe parallelam ad FC. Quare cùm ad BCDE proiectionis planum perpendicularis [a] ſit FC, erit [b] & GE. Præterea cùm BA ſit perpendicularis proiectionis plano CBED, etiam planum CFA [c] eidem erit perpendiculare. Quare cùm BA [d] ſit perpendicularis ad CA, erit quoque ad [e] FA, adeóque BD, FG inuicem ad rectos ſunt angulos. Poteſt igitur circa BD, FG tanquam axes ellipſis deſcribi DBGD, quæ eadem erit cum datâ, eò quòd illius axes axibus datæ ſint æquales.

a per conſtr. b per 8. 11. c per 18. 11. d per conſtr. e patet ex def. 4. 11.

Dico igitur ellipſim datam, ſuo axe maiori inclinatã angulo CAF proijci in circulũ BCDE. Cùm enim FC ex conſtr. & GE ex demonſtratione ſint perpendiculares plano proiectionis, liquet FG ellipſis axem maiorem proijci in [a] rectam CE, quæ quia per conſtr. æqualis eſt BD, patet proiecturam BCDE circulum eſſe: quod erat oſtendendum.

a per p. 62.

CAPVT VII.

Orthographica proiectio ſphæræ in planum Coluri Solſtitiorum.

DEmonſtratis proiectionis Ortographicæ fundamentis, facilè iam erit in quem libuerit maximum circulum Orthographicè ſphæram proijcere. Sed quia ex maximis ſphæræ circulis nullus ad vſum aptus eſt præter Colurum Solſtitiorum, in hunc Orthographicè Sphæra proijcitur: ex qua proiectione altera catholici Aſtrolabij ſpecies enaſcitur, cuius conſtructionem atque vſum Ioannes de Roias expoſuit.

PROPOSITIO LXIX.

Colurum Æquinoctiorum, Horizontem quemcumque, Æquatorem, Tropicos, Polares, Eclipticam; Orthographicè proijcere.

Schemat. 19. Fig. 39.

CVm hi circuli omnes ſint recti ad Colurum Solſtitiorum qui iam eſt planum proiectionis, & repræſentatur per circulum AFXEZ, liquet [a] eos in Coluri Solſtitiorum diametros proijci. Itaque

a ex corol. p. 64.

1. Per mundi polos X, Z, ducta diameter XAZ eſt proiectura Coluri Æquinoctiorum, & principia ♈ ac ♎ proiecta incidunt in centrum A.

2. A polo X in B numerentur gradus Altitudinis poli ſupra Horizontem datum. Diameter BAC eſt proiectura Horizontis dati. Quod ſi per quadrantis XO gradus ſingulos ducantur diametri, dabunt hæ omnes Horizontium ſpecies Orthographicè proiectas. Ex quo patet regulam mobilem circa centrum A, cuiuſcumque Horizontis proiecturam exhibere.

3. Diameter EF ad XZ perpendicularis, erit proiectura Æquatoris.

4. Ab E in D, & O, item ab F in P, & Q numera gradus vtrimque 23. 30′, ducanturque DP, OQ. Erunt hæ proiecturæ Tropicorum.

5. Ducatur recta OP, quæ tranſibit per centrum A. Hæc eſt Eclipticæ proiectura.

6. A polis X, Z, in H, & K, item in T, & V, vtrimque numera gradus 23. 30′. iunganturque rectæ HK, TV. Erunt hæ proiecturæ circulorum Polarium.

PROPOSITIO LXX.

Parallelos Signorum & graduum Eclipticæ proijcere.

Schemat. 19, Fig. 39.

1. SEmicirculos PHO, PVO, ſingulos diuide in 6 partes æquales, & oppoſita diuiſionum puncta rectis lineis coniunge: diſtribuent illæ Eclipticæ proiecturam OP in Signa, eo ordine quem characteres adſcripti indicant. Quod ſi Coluri gradus ſingulos oppoſitos rectis item lineis απ, Lω connectas, dabunt hæ proiecturas omnium graduum Eclipticæ. Vtrumque patet ex *prop. 65*. Ducanturque deinde per Signorum initia iam proiectæ rectæ

SIN,

SIN &c. ad EF Parallelæ : erunt hæ proiecturæ Parallelorum per Signorum initia tranſeuntium, vt patet ex *corol.p.63.* Quod ſi per ſingulas graduum Eclipticæ proiecturas deſcribantur Parallelæ lineæ ad EF, dabunt hæ proiecturas Parallelorum diurnorum.

2. Licebit etiam Signorum initia ac Parallelos proijcere hunc in modum. Ducantur rectæ PQ, DO, circa quas ſemicirculi deſcribantur PMQ, DRO, quos in 6 arcus æquales partire, & oppoſita partitionum puncta rectis lineis ϑφ, MR connecte : ſecabunt hæ proiecturam Eclipticæ PO in ijſdem punctis, in quibus eam ſecabant rectæ απ, Lω, ac proinde etiam ipſæ Signorum initia deſignabunt. Quod ſic demonſtro.

Sumantur ex illis binæ ſibi mutuo reſpondentes MGR, LIω. Quoniam arcus PL, PM ſimiles ſunt, ambo videlicet duæ ſextæ ſuorum ſemicirculorum PLO, PMQ, & rectæ LIC, MGR perpendiculares ſunt ad diametros PO, PQ, patet MGR ſecare PQ in eâdem ratione, quâ LIω ſecat PO. Sed, quia MGR eſt parallela ad QO, etiam MGR ſecat PO in eâdem ratione, qua eadem MGR ſecat ipſam PQ. Ergo MGR ſecat PO in eodem puncto I, in quo Lω ſecabat eandem PO. Pari modo oſtendam reliquas ϑφ ſecare PO in ijſdem punctis, in quibus reliquæ απ eandem PO interſecant. Quod erat demonſtrandum.

Proiecturæ circulorum duabus præcedentibus prop. deſcriptæ, conſtituunt inſtrumentum, quod analemma Ptolemæus appellat, vſumque habet multis in rebus ſingularem.

Corollarium 1.

Ex his patet Parallelos Signorum interſecare peripheriam Coluri Solſtitiorum in punctis N, N, S, S, in quibus eandem ſecant rectæ ϑφ, MR : quod *propoſ.55* fuerat aſſumptum.

Corollarium 2.

Si ex centro A, ad interſectiones N, N, ducantur inſuper AN, AN, deſcripta erit figura quam appellant, radiorum Zodiaci; cuius in varijs rebus non modicus eſt vſus. Sunt porro radij prædicti ſectiones Eclipticæ cum Meridiano pro diuerſo Eclipticæ ſitu. Cùm enim initium ♋ eſt in Meridiano in P, tunc ſectio communis Eclipticæ cùm Meridiano eſt AP; quando initium ♊ vel ♌ eſt in Meridiano, puta in puncto N proximo ipſi P, tunc Eclipticæ ac Meridiani communis ſectio eſt radius AN, ille qui radio AP proximus eſt, & ſic deinceps.

PROPOSITIO LXXI.

Parallelos per ſingulos Coluri, & Meridianos per ſingulos Æquatoris gradus proijcere.

1. PEr ſingulos gradus Coluri Solſtitiorum FXEZ ducantur rectæ OO, QQ, ad Æquatoris proiecturam EF parallelæ. Erunt hæ proiecturæ Parallelorum quæſitæ, vti patet ex *corol.p.64.* Schemat. 2. Fig. 40.

2. Oppoſitos Coluri gradus O, Q; rectis lineis connecte; diſtribuent illæ Æquatoris proiecturam EF in gradus ſuos Orthographicè in punctis I, P. Cùm igitur Meridiani circuli ſint obliqui ad Colurum Solſt. FXEZ, ac proinde proijciantur in ellipſes, quarum axes ſunt XZ, IP, oportebit circa XZ & ſingulas IP ellipſes deſcribere, quæ erunt Meridianorum per ſingulos Æquatoris gradus tranſeuntium proiecturæ, vti patet ex *prop.66, & 67.* Colurus Æquinoctiorum, cùm ſit ad Colurum Solſt. rectus, ſolus ex omnibus Meridianis proijcitur in mundi axem XZ, vt dictum *p.69.*

Porro ellipſes ſingulæ Orthographicè repræſentant duos Meridianos æqualiter vtrinque à Coluro FXEZ diſtantes.

PROPOSITIO LXXII.

Horarios circulos proijcere.

CVm circuli horarij Æquatorem diuidentes in 24 arcus æquales ſint de numero Meridianorum, proiectio eorum iam habetur ex præcedenti. Hæc ſola differentia eſt, quòd circulus FXEZ, ſiue planum proiectionis iam concipitur eſſe Meridianus loci dati, ad quem

o per corol. p.64. Schemat. 20. Fig.40.

quia rectus eſt horæ 6 circulus, is in ° rectam lineam XZ, nempe mundi axem proijcitur.

Poſitâ igitur Æquatoris proiecturâ EF, ſemicirculos FXE, FZE ſingulos diuide in æquales arcus 12. Rectæ lineæ oppoſita diuiſionum puncta connectentes, Æquatoris proiecturam EF diſtribuent in ſegmenta 12, quæ erunt proiecturæ 24 arcuum æqualium Æquatoris. Quare ellipſes circa axes XZ, IP deſcriptæ, ſunt proiecturæ horariorum circulorum, eo ordine quem in *Fig.* 42 numeri adſcripti oſtendunt.

PROPOSITIO LXXIII.

Circulos Almincantarath, Crepuſculi, & Verticales proijcere.

Schemat. 20. Fig.40.

HOrum proiectio non differt ab proiectione Parallelorum, Æquatoris & Meridianorum. Quare ſi EF cogitetur iam eſſe proiectura Horizontis, erunt rectæ OO, proiecturæ Almincantarath, ellipſes verò XIZP proiecturæ Verticalium.

Quod ſi ab Horizonte deorſum numerentur ex E in *n* gradus 18, recta ducta per *n* parallela ad EF dabit proiecturam circuli Crepuſculorum.

PROPOSITIO LXXIV.

Stellas Orthographicè proijcere.

Schemat. 20. Fig.41.

NOtas habeto diſtantias ſtellæ ab Æquatore & Eclipticâ, hoc eſt Declinationem & Latitudinem ſtellæ. In peripheriâ Coluri Solſtitiorum versùs polum ſeptentrionalem numera gradus Declinationis ſtellæ ex D in K, & ex E in I, ſi ſtella declinat Borealiter, numerandi ſiquidem eſſent gradus dicti in partem oppoſitam, ſi declinaret ſtella Auſtraliter. Ducatur recta KI: hæc eſt proiectura Paralleli ſtellæ. Numerentur deinde gradus Latitudinis ſtellæ ex Q in P, ex O in F, ducaturque recta PF: hæc eſt proiectura circuli Latitudinis ſtellæ, ſecabitque KI ex.gr. in S. Dico ſtellam proijci Orthographicè in Coluri punctum S. Cùm enim ſtella ſit in circulis vtriſque, quorum proiecturæ ſunt KI, PF, neceſſe eſt proijci illam in communem earum ſectionem S.

PROPOSITIO LXXV.

Aſtrolabium vniuerſale Ortographicum conſtruere.

Fig. 42. a per prop. 69.70. 71.72. b per p.65. c per p.69. num.2.

IN planum circuli ABXCZ, Colurum Solſtitiorum & loci cuiuſuis Meridianum repræſentantis proijce ª Colurum Æquin., Æquatorem, Tropicos, Polares, Eclipticam, Parallelos Signorum & graduum Eclipticæ, Meridianos, ſeu horarios circulos. Planum verò Coluri BXDZ limbus ambiat iuſtæ Latitudinis, in quo gradus Coluri notentur. Deinde regulam conſtrue mobilem circa centrum A, cuius latus BA ſemper tranſiens per centrum A ſit æquale diametro Sphæræ, & in gradus ᵇ Orthographicè diſtributum. Repræſentabit ea & Horizontem ᶜ quemcumque, & quemuis maximum circulum plano proiectionis rectum, vt Æquatorem, & Eclipticam &c. His peractis reſtant Paralleli Horizontis, Æquatoris, Eclipticæ; quos ſi deſcribere omnes voluerimus, innumeris lineis Planiſphærium confundi intricarique neceſſe ſit. Sed bene habet: quando regulâ vnica ſupplere horum omnium vices poteſt, cuiuseiuſmodi eſt conſtructio. Ex regulâ AQ accipe longitudinem AB ſemidiametro Sphæræ æqualem, quam in gradus 90 ᵈ Orthographicè diſtribues. Hanc deinde Horizonti mobili BC interiùs excauato, ita inſeres, vt, ſitu perpendiculari ſemper retento, moueri per eum ab extremitate vnâ B ad C aliam poſſit, quâ ex causâ etiam Curſor appellatur. Quod ſi regulam mobilem BC ſupra Æquatorem conſtituas, curſor ab extremo vno motus in aliud, ſuis gradibus Parallelos Æquatoris deſignabit; ſi regulam BC ſtatueris ſupra Eclipticam, deſignabit Curſor Parallelos Eclipticæ. Semper autem Horizontis Parallelos deſcribet, quemcumque ſitum habuerit regula BC, vtpote Horizontem cum libitum fuerit, ſemper repræſentans. Quod ſi regulâ BC circumactâ, Curſorem in partes oppoſitas dirigas, ibidem eoſdem omnes Parallelos deſignabit. Quorum omnium ratio ex *Corollario p.64* eſt manifeſta. Poſtremò ſtellas aliquot primarias ſuis locis inſcribes. In Aſtrolabij dorſo hæc deſcribentur. Limbus dorſi diſtribuitur in gradus, horarum numeris ad quindenos quoſque gradus adſcriptis.

Schemat. 20. Fig. 43. d per p.65.

Intra

Intra limbum ſic diuiſum tympanum circa centrum verſatile conſtituitur, in quo deſcripta ſunt 12 Signa Zodiaci cum gradibus ſuis ſecundùm Aſcenſiones ſuas rectas proiectis, item menſes, ac dies ſinguli prout Signorum gradibus reſpondent. Adhæc eædem ſtellæ, quas parti anteriori inſcripſiſti, etiam dorſo inſcribes ad eos gradus Zodiaci, cum quibus Meridianum attingunt. Ne verò ſtellæ gradus perturbent, ex centro ad gradum Zodiaci, cum quo ſtella culminat, radius emittitur, ad cuius punctum quodcumque * aſteriſcum ſigna; & ſtellæ nomen adſcribe. Regula denique circa centrum mobilis ac binis dioptris inſtructa apponitur. Hæc Aſtrolabij Orthographici forma eſt, cuius non modò ſtructuram iam dedi, ſed etiam quod Roias non fecit, demonſtrationem aperui. Reliquum eſt vſuum huius organi ſpecimina nonnulla adiungam.

VSVS PRIMVS.

Ad Altitudinem poli quamcumque, quouis anni die horam Ortus & Occaſus Solis, atque inde diei noctiſque quantitatem cognoſcere.

DEtur ex.gr. Altitudo poli grad.49, & Aprilis dies 20, quâ fere Sol initium ♉ ingreditur. A polo X in B numera gradus 49 datæ Altitudinis poli, & regulam Horizontalem BC ſtatue ſupra B. Obſerua deinde punctum I, in quo Parallelus DP per initium ♉ incedens Horizontem BC interſecat. Tum vide quam ex horarijs ellipſibus interſectio dicta I attingat, vel cui proxima ſit. Competies eam proximè attingere ellipſim horæ 5 matutinæ ac 7 veſpertinæ. Sol igitur in locis omnibus, quibus polus attollitur gradibus 49, die Aprilis 20 oritur paulò poſt horam 5, occumbit verò aliquantò ante 7. *Schemat.* 19. *Fig.* 42.

Demonſtratio ex proiectionis Orthographicæ legibus ſupra demonſtratis eſt manifeſta.

Interuallum porro ab horâ ortus ad meridiem duplicando, habebis quantitatem diei: quâ ſubtractâ ab horis 24, etiam noctis quantitas prodibit.

VSVS SECVNDVS.

Diei longiſſimæ quantitatem pro quâuis Altitudine poli inuenire.

HOrizonte mobili DB ad datam poli altitudinem ex. gr. graduum 49 conſtituto, nota punctum S, quo is Parallelum ♋ interſecat, & vide quam ex horarijs ellipſibus interſectio S contingat, in caſu dato tangit ellipſim horæ 4 matutinæ & 8 veſpertinæ. Quibus igitur polus attollitur grad.49, die longiſſimâ Sol oritur horâ 4; occidit autem horâ 8, adeóque dies longiſſima ijs eſt horarum 16. *Schemat.* 20. *Fig.* 41.

VSVS TERTIVS.

Vbicumque Terrarum fueris, diei horam ex notâ Altitudine Solis inuenire.

HOrizonte mobili BC ad datam poli Altitudinem, ex.gr. graduum 49 conſtituto, inquire locum Solis ad diem datum, qui ſit ex.gr. in principio ♉. Reperta ſit autem Altitudo Solis ex.gr. graduum 18. Curſorem moue per Horizontem BC, & nota punctum O, quo gradus 18 Curſoris Parallelũ ♉ DP interſecat. Obſerua deinde quam ex horarijs ellipſibus interſectio O attingat; quæ in caſu dato eſt horæ 7 matutinæ, & 5 Pomeridianæ; ac proinde ſi tempus antemeridianum ſit, cognoſces inſtare ſeptimam; ſin tempus Pomeridianum, quintam aliquantulò iam tranſijſſe concludes. *Schemat.* 20. *Fig.* 41.

Demonſtratio eſt manifeſta. Cùm enim eo momento Sol exiſtat & in Parallelo Altitudinis gr.18, quem Curſoris gradus 18 deſignat, & in Parallelo ♉, in communi eorũ ſectione O exiſtat neceſſe eſt. Quare cùm Solis locus proximè attingat ellipſim XOZ in quam circulus horæ 7 matutinæ & 5 veſpertinæ, ea vtique horam indicabit.

Itaque Aſtrolabium Orthographicum, quod nec Polare nec Æquinoctiale præſtare poſſunt, Horologium Sciatericum vniuerſale exhibet ſanè perquam expeditum, tui id vnum deeſt, quòd ſpatium horæ 11 & 1, nimiùm coarctetur.

Digitized by Google

ANDREÆ TACQVET

E SOCIETATE IESV

CATOPTRICA

TRIBVS LIBRIS

EXPOSITA.

Digitized by Google

Digitized by Google

PRÆFATIO.

TRiplici viâ in ſuis operationibus natura vtitur rectâ, reflexâ, refractâ. Prima ad Opticam pertinet, tertia ad Dioptricam, media ad Catoptricam, cuius affectiones adeò ſunt multæ, & admirabiles, vt mihi ea inter ſcientias Mathematicas ex præcipuis ac iucundiſſimis vna videatur. Scripsêre de Catoptricâ Ptolemæus & Euclides ieiunè admodum, copioſiſſimè & plurima Alhazenus ac Vitello: verùm tantâ prolixitate verborum, adeò implexis ac longis demonſtrationum ambagibus, vt moleſtiam legendi ac tædium ſuperare vix poſſis. Erit igitur fortaſſe ſtudioſis non ingratus tractatus hic noſter, quo methodo nobis vſitatâ inuenta aliorum ac noſtra ita complexi ſumus, vt ea ſperem & legenda abſque tædio & notitiam huius ſcientiæ ſuis Lectoribus ſufficientem paritura.

CATOPTRICÆ

LIBER PRIMVS

DE FVNDAMENTIS CATOPTRICÆ.

Definitiones.

1. *SVperficiem politam* voco, quæ eſt vel perfectè plana, vel perfectè curua abſque vllo angulo.

2. *Superficiem* verò *aſperam*, quæ licet plana vel curua videatur, minutis tamen valliculis monticuliſque reſperſa eſt.

3. *Speculum* voco omne corpus ſuperficiem politam habens, & rei ſibi incidenti inperuiam.

4. *Radius Incidentiæ* eſt linea ſecundùm quam res in ſpeculum dilabitur.

5. *Radius Reflexus* eſt, linea ſecundùm quam res à ſpeculo repulſa regreditur.

6. *Via Reflexionis* eſt (ACB) quæ ex radijs incidentiæ ac reflexionis componitur. *Fig.* 4. 8. 9

7. *Punctum reflexionis* (C) eſt illud ſpeculi punctum, ad quod radius incidens à ſpeculo repellitur.

8. *Perpendicularis*, ſiue *Cathetus* in ſpeculis Sphæricis eſt recta (XZC) per ſpeculi centrum ad ſuperficiem emiſſa. *Fig.* 8. 9.

9. In ſpeculis irregulariter curuis *Perpendicularem* voco (XC) quæ ad planum tangens in ipſo contactus puncto perpendicularis eſt. *Fig.* 10. 11.

10. *Planum reflexionis*, eſt quo radij incidentiæ & reflexionis continentur.,
Hoc eſſe rectum ſpeculo patebit ex *prop.* 2.

11. *Linea reflectens* eſt ſectio communis plani reflexionis cum ſpeculo.

12. In curuis ſpeculis *Tangentem* voco rectam lineam (FG), quæ in plano reflexionis exiſtens lineam reflectentem (HCK) tangit. *Fig.* 10. 11.

13. *Angulus Incidentiæ*, in ſpeculis planis eſt (ACG), qui à radio incidente (AC) ad lineam reflectentem (FCG) conſtituitur: angulus reflexionis eſt (BCF) qui fit ad eamdem à radio reflexo (CB). *Fig.* 4.

14. In ſpeculis irregulariter curuis *Angulus incidentiæ* eſt (ACG), qui à radio incidente fit ad tangentem (FCG): *Angulus Reflexionis* eſt (BCF), qui ad eamdem à radio reflexo conſtituitur. *Fig.* 10. 11.

15. In

15. In ſpeculis ſphæricis *Anguli Incidentiæ ac Reflexionis* perinde eſt, ſiue ad Tangentem, ſiue ad Reflectentem accipiantur.

Fig. 8. 9. *Angulus* igitur *Incidentiæ* in illis eſt tam ACG, quàm ACK; & *Reflexionis angulus* tam BCF, quàm BCH.

16. *Cathetus Incidentiæ* in planis & ſphæricis eſt quæ à puncto obiectiuo ad lineam reflectentem perpendicularis eſt: *Cathetus oculi*, ſiue *Reflexionis*, quæ ab oculo.

Reflexionis prima ac perpetua lex eſt, vt angulus ſub quo lumen, ſpecies, ſonus, vel aliud corpus quodcumque in ſuperficiem reflectentem incidit, æqualis ſit ei, ſub quo ab eâdem ſuperficie excluſum regreditur. Hanc igitur & alia Catoptricæ fundamenta primo libro demonſtrabimus.

PROPOSITIO I.

Radius in quamuis ſuperficiem perpendiculariter incidens, in ſeipſum reflectitur.

Fig. 1. 2. 3. PAtet experientiâ, & poteſt experientiæ hæc ratio dari. Radius AB ad ſuperficiem CD perpendicularis, in omnem partem ſuperficiei CD æqualiter propendet, ſic vt nullam in partem magis inclinetur, quàm in aliam. Nihil eſt igitur quod determinet, vt potiùs in vnam partem reflectatur, quàm in aliam. Ergo æqualiter in omnes, hoc eſt in ſeipſum, reflectitur, eâdemque regreditur viâ, quâ illapſus eſt.

PROPOSITIO II.

Planum reflexionis ad ſpeculum quodcumque rectum eſt.

Fig. 4. COnſtat experientiâ, quam vide *prop. ſequenti*. Et poteſt ratione oſtendi ferè eâdem, quâ præcedens. Cùm enim ſit diuerſitas inclinationum infinita, quas ſortiri poſſet planum KL, in quo exiſtunt AC radius incidens, & reflexus CB, nihil eſt quod ad inclinationem vnam præ alterâ determinet. Caret igitur inclinatione omni, adeòque ſpeculo rectum eſt.

In ſpeculis curuis planum reflexionis rectum eſt plano ſpeculum tangenti, & tranſit per punctum contactus.

Corollaria.

EX his patet.

1. Planum reflexionis tranſire per centrum ſphæræ.
2. Cathetos incidentiæ & reflexionis eſſe in plano reflexionis. Sequitur ex hac & *def. 16*.

PROPOSITIO III.

Ad planam ſuperficiem anguli incidentiæ & reflexionis æquales ſunt.

Fig. 5. COnſtat experientiâ. Modus experiendi vnus è multis hic eſt. Speculo BC perpendiculariter impone ſemicirculum FKG in gradus diuiſum, & numera arcus vtrimque æquales FO, GE, puta graduum 40. Applicato deinde viſibili quopiam, ſed paruo in O, Oculus in E conſtitutus intuebitur in ſpeculo obiectum O; & ſi tegatur ſpeculi punctum A ſemicirculi centro ſuppoſitum, non intuebitur. Ex quo manifeſtum eſt punctum reflexionis eſſe A; ac proinde radium incidentem eſſe OA, & reflexum AE, angulum verò incidentiæ OAF, & reflexionis EAG: qui quòd æqualibus arcubus FO, GE menſurentur, æquales ſunt. Exactior operatio erit, ſi oculus per dioptras collimet in A.

Fig. 6. Idipſum Mineruâ rudiori licebit in menſâ trochorum, quam vocant, ludendo experiri. Ad menſæ latus vnum deſignentur duo æquales arcus BC, EG. Si centrum globuli C dirigatur per C in A, reſiliet ex A per G in F, per angulum videlicet EAG æqualem angulo CAB ſub quo inciderat in A. Hæc

Hæc angulorum incidentiæ & reflexionis perpetua æqualitas præcipuum Catoptricæ fundamentum eſt, cuius rationem Phyſicam, ſiue cauſam quamuis multi ſint perſcrutati, tamen haud ſcio an vllus dederit. Referam breuiter, quid nonnulli ſenſerint : ſed rem, non verba tranſcribam.

Ratio Vitellonis.

Libro 5. *prop.* 20, ita ratiocinatur. Axioma Phyſicum eſt : *natura agit viâ breuiſſimâ.* Hoc dato, ſuperficies eſto plana DE, & duo quælibet dentur puncta A, B; ſitque planum reflexionis KL & linea reflectens FG. Via breuiſſima quâ reflexio fieri poteſt ex A in B, ea eſt, quæ fit per æquales angulos ACG, BCF : quod *prop.* 6. demonſtrabitur. Ratio igitur quòd incidentiæ & reflexionis anguli æquales ſint, ea eſt, quia natura viam breuiſſimam affectat. *Fig.* 4.

Sed hæc ratiocinatio non eſt vniuerſaliter vera : in cauis enim ſpeculis incidentiæ & reflexionis anguli æquales eſſe poſſunt, & tamen reflexio viâ peragi longiſſimâ, vt *prop.* 8. demonſtrabitur. Quare ex axiomate prædicto deſumi vniuerſim nequit vera cauſa æqualitatis angulorum incidentiæ ac reflexionis. An igitur falſum eſt axioma? minimè verò : Sed ita debet intelligi, vt natura viam breuiſſimam teneat, cùm eſt poſſibilis aliqua breuiſſima. Quod ſi breuiſſima nulla ſit, vt euenire in cauis ſpeculis patebit ex *prop.* 8, nullum fit axiomati præiudicium, ſi alia via teneatur, nimirum longiſſima, quæ ſola inter infinitas inæquales determinata eſt.

Ratio [a] *Carteſij.*

Supponatur ſuperficiem, quæ reflectit, eſſe perfectè duram, & motus celeritatem reflexione non diminui. [a] *in ſuâ Dioptricâ.*

Hoc poſito, circulus deſcribatur CFBG, per cuius centrum C recta incedens EG reflectentem ſuperficiem repræſentet. Tum ex aliquo peripheriæ puncto A agatur obliquè pila in centrum C. Quia poſitum eſt reflexione celeritatem non diminui, quanto tempore pila venit ex aliquo puncto peripheriæ A ad centrum C, tanto inde ad aliud aliquod peripheriæ punctum reſiliet. Ducatur deinde AD perpendicularis ad EG, ſumptâque QC æquali CD, ex C & Q perpendiculares erigantur CI, QBF. Motus quo pila ex A defertur in C componitur ex motu perpendiculari deorſum per lineam ex gr. AD, & ex motu parallelo ad EG puta AIB. Motui perpendiculari ſoli reſiſtit ſuperficies reflectens EG, nequaquam autem motui parallelo, quo pila defertur à lineâ AD versùs BQ. Cùm igitur hunc motum reflexio non afficiat, & æqualia ſint DC, QC interualla perpendicularium AD, IC, BQF, quanto tempore delata eſt pila ex A in C, hoc eſt à lineâ AD ad lineam IC, tanto tempore reſiliet à lineâ IC ad lineam BQF, hoc eſt tanto tempore ex puncto C reflexum pertinget ad aliquod punctum rectæ BQF. Atqui oſtenſum ſupra tanto etiam tempore ex C reſilire ad aliquod punctum circumferentiæ. Eodem igitur inſtanti pila appellit, & ad aliquod punctum rectæ AQF, & ad punctum aliquod peripheriæ. Ergo ad punctum vtrique commune, nimirum ad B vel F. Non ad F, quia impedit ſuperficies EG. Ergo ad B. Inde verò conſequitur neceſſariò æqualitas angulorum ACD, & BCQ: ſiquidem ACD æquatur FCQ, & hic ipſi BCQ. *Fig.* 7.

Sed hæc ſpeculatio procedit in caſu ficto quo ſupponitur ex motus celeritate per reflexionem nihil deperdi.

Ratio alia.

Ponatur rurſum motus celeritatem reflexione non diminui.

In lineam reflectentem EG pila obliquè incidat per radium AC, ſumptoque vltra C puncto Q, per id ducatur perpendicularis SX. Cùm ex hypotheſi reflexio non debilitet motum pilæ, æquali tempore ac celeritate ex C reflexa pertinget ad rectam SX, quâ ad eamdem perueniret recta procedens ex A per C versùs F. Ergo per vias CB, CF æquales. In triangulis igitur BQC, FQC rectangulis ad Q quia BC, CQ æquantur FC, CQ, facilè oſtenſu eſt ex 47. 1, æquari etiam BQ, FQ. Igitur per 8. 1. anguli BCQ, FCQ æquales ſunt. Sed FCQ [a] æquatur ACG. Ergo ACG, BCQ æquales ſunt. *Fig.* 7. [a] *per* 15. 1.

Sed hæc ratiocinatio idem de motus celeritate non minutâ ſupponit, quod præcedens.

Ratio alia.

Ponatur radium incidentem AC; à ſuperficie EG impeditum rectà progredi, viam tenere ſimilem illi, quam tenuiſſet recta procedens ex A per C in F : quod quidem maximè videtur eſſe conſentaneum naturæ. Hoc dato liquet reflexionem fieri per radium CB, qui cum *Fig.* 7.

Digitized by Google

ſpeculo EC angulum efficiat BCE æqualem angulo FCE, quem feciſſet cum ſpeculo ſi rectâ proceſſiſſet: ſic enim via radij incidentis AC non immutatur ſed transfertur: Æqualitatem porro angulorum FCQ, BCQ, conſequitur neceſſariò æqualitas angulorum incidentiæ ACG, & reflexionis BCE.

Idem breuiùs ſic probabitur. Si radius incidens AC rectâ procederet, angulum cum ſpe-
b per 15.1. culo conſtitueret FCE æqualem [b] angulo incidentiæ ACG. Atqui prohibitus rectâ pergere, viam eamdem, ſiue ſimilem retinet, quantùm poteſt. Ergo prohibitus rectâ tendere, hoc eſt reflexus, efficiet etiam cum ſpeculo angulum BCE æqualem incidentiæ angulo ACG.

Licebit etiam hunc in modum ratiocinari. Si radius incidens AC reflecteretur per angulum inæqualem angulo incidentiæ ACG, cùm inæquales ſint numero infiniti, omnes magnitudine differentes, nihil eſt cur per vnum potiùs ex iſtis inæqualibus reflectatur, quàm per alium ex illis quemcumque. Ergo per nullum ex illis. Ergo per æqualem angulo incidentiæ, qui vnicus, ac proinde determinatus eſt.

Quando his meliora ab alijs proferentur, libenter ea amplectemur.

PROPOSITIO IV.

Fig. 8. 9. Non ſolùm ad planam ſuperficiem, vt prop. præcedenti oſtenſum eſt; ſed etiam ad ſphæricam tam conuexam, quàm concauam radius incidens (AC) & reflexus (CB) cum reflectente lineâ (HCK) conſtituunt æquales angulos (ACK, BCH).

PAtet experientiâ. Ratio ſumi poteſt, ex *prop. præced.* Ea quæ à viâ breuiſſimâ petitur, etiam ſphæricis conuexis conuenit, vt patebit ex *prop.* 7. ſed cauis non ſemper, vt oſtendam
d p. 8. [d] infra.

Vera eſt propoſitio in quâuis etiam curuâ ſuperficie axem habente, ſi radius incidat in punctum illud, vbi axis ſuperficiei occurrit: tunc enim incidentiæ & reflexionis æquales anguli ſunt poſſibiles.

Corollarium.

In ſphæricis conuexis ac cauis etiam ad tangentem GF, incidentiæ & reflexionis anguli ACG, BCF, æquales ſunt.

PROPOSITIO V.

Fig. 10. 11. Cum ſuperficies curua (ſiue conuexa ea ſit, ſiue concaua) eſt eiuſmodi, vt æquales ad reflectentem lineam (HCK) anguli ſint impoſſibiles, reflexio fit per æquales ad tangentem (FG) angulos (ACG, BCF).

COnſtat experientiâ; cuius alia ratio melior nõ occurrit ea quàm quæ *prop.* 3. primo loco allata fuit, quam facilè erit huic loco accommodare. Porro incidentiæ angulo ex.gr. ACK æqualis dari nequit angulus reflexionis vllus BCH, cùm lineæ reflectentis partes CK, CH ſint curuaturæ diſſimilis; tunc enim & anguli ipſi diſſimiles erunt, ac proinde impoſſibilis erit eorum æqualitas, vt in ſcholio ad *prop.* 16. *lib.* 3. *elem.* oſtenſum eſt.

THEOREMA VI. PROP. VI.

Fig. 12. Ad planam ſuperficiem reflexio à puncto dato (A) in punctum datum (B) breuiſſimâ fit viâ.

VIa reflexionis eſto ACB. In plano dato ſumatur quoduis punctum F, quod primò ſit in lineâ reflectente GK, ducanturque AF, FC. Oſtendam viam ACB breuiorem eſſe viâ AFB.

a per 15. 1. Duc perpendicularem AO, cui occurrat BC in M, & iunge FM. Angulus MCO [a] æqualis

qualis eſt angulo GCB. Sed GCB eſt æqualis [b] angulo incidentiæ ACO. Ergo MCO æ- b per 3 hu-
qualis eſt ACO. Sunt verò AOC,& MOC per conſtructionem recti,adeóque æquales.Er- ius.
go in triangulis ACO, MCO latera AC, MC,itemque AO, MO, æqualia [c] ſunt. Ergo ſi c per 26.
æqualibus AC, MC,addatur communis CB,erit via ACB æqualis rectæ MB. Iam verò quia l.1.
in triangulis OFA, OFM, duo latera AO, OF, æqualia ſunt duobus MO, OF, anguliſque
ijs contenti ad O æquales, etiam baſes AF, MF æquales [d] erunt. Quare ſi addatur vtriſque d per 4 l.1.
communis FB, via AFB, rectis MF, FB æqualis erit. Atqui MB vnum latus trianguli M-
BF minus [e] eſt duobus MF, FB. Ergo etiam via ACB,quam ſupra oſtendi parem eſſe ipſi e per 20.l.1
MB, minor eſt quàm MF, FB, hoc eſt vt iam oſtendi, quàm via AFB. Igitur via reflexionis
ACB, omnium ad lineam reflectentem GK exiſtentium breuiſſima eſt,

Accipiatur deinde in ſuperficie planâ datâ quoduis punctum P, extra lineam reflecten- Fig. 13.
tem GK. Ducanturque AP, PB. Oſtendam viam ACB etiam eſſe breuiorem viâ APB. Ex
P duc PO perpendicularem ad GK, & iunge AO, OB. Quoniam planum AKCOB re-
ctum [e] eſt plano QS, erit PO perpendicularis ad GK communem ſectionem, etiam perpen- e per 2. hu-
dicularis plano AKCOB, vt patet ex *def.4.lib.11*. Ergo per *def.3.lib.11*, PO cum lineis AO, ius.
BO in plano AKCOB exiſtentibus,angulos efficiet rectos POA, POB. Anguli igitur [f] O- f per Corol.
PA, OPB ſunt acuti. In triangulo igitur APO latus AO oppoſitum acuto OPA minus [g] eſt 5 p.32.l.1.
latere AP, quod opponitur recto POA. Pari de cauſa latus BO minus eſt latere BP. Igitur g per 19.l.1
via tota AOB minor eſt viâ APB. Atqui via reflexionis ACB per 1. partem adhuc minor
eſt viâ AOB. Ergo reflexionis via ACB, multò minor eſt viâ APB. Ergo eſt abſolutè om-
nium breuiſſima quæ ad planum datum reflectens QS haberi poteſt. Quod erat demonſtr.

PROPOSITIO VII.

Etiam ad conuexam quamcumque ſuperficiem reflexio à puncto dato (A) in punctum datum (B) breuiſſimâ fit viâ.

VIa reflexionis eſto ACB: linea reflectens FCQ. Sumatur in curuâ ſuperficie quoduis Fig. 14.
punctum; quod primò ſit E in lineâ reflectente FCQ, ducanturque rectæ, AE occur-
rens tangenti in O, & EB, ac BO. Per *præc.* via ACB eſt breuior viâ AOB. Atqui via AOB eſt breuior quàm AEB (nam per 20.*lib.*1 BE, EO ſunt maiores quàm BO, ac proinde, additâ cõmuni OA,erit via BEA maior viâ BOA). Ergo via ACB multò minor eſt viâ AEB.

Sumatur deinde punctum quoduis in ſuperficie conuexâ, extra lineam reflectentem; eodemque diſcurſu, quo partim hìc,partim in 2 parte demonſtrationis *præced.* vſi ſumus, oſtendetur via ACB eſſe breuior eâ, quæ ad punctum aſſumptum conſtituitur. Ergo via reflexionis eſt abſolutè omnium breuiſſima, quæ ad conuexam ſuperficiem haberi poſſunt. Quod erat demonſtr.

PROPOSITIO VIII.

Ad concauam ſuperficiem ſphæricam reflexio à puncto in punctum viâ fieri poteſt longiſſimâ.

COſtat experimento, & demonſtrari poteſt reflexionem ex A in B fieri ad ſegmenti me- Fig. 15.
dium punctum C: nam ſi in C tangat XZ, erunt anguli ACX, BCZ æquales: quod quia ad nullum ſegmenti punctum aliud contingit, neceſſe eſt per 5 huius reflexionem fieri ad C, viâ ACB. Atqui hæc aliâ quâuis AFB, AEB, &c. longior eſt, ac proinde omnium longiſſima; vt demonſtrat Serenus *lib.2.p.44*. Ergo hìc reflexio fit viâ longiſſimâ.

Neque tamen, corruit axioma: naturam viâ agere breuiſſimâ, id enim eâ cautione intelligi debet, ſi via aliqua breuiſſima non ſit impoſſibilis, vt hìc contingit, cùm à Sereno demonſtratum ſit vias omnes à longiſſima BCA, versùs A, & B perpetuò decreſcere; ſic vt ea, quæ puncto A vicinior eſt, ſemper remotiore ſit breuior.

PROPOSITIO IX.

Fig. 16. In planam ſuperficiem KL incidat ex A ſpecies, ſiue lux ſub figurâ quacumque ABQD, quæ reflectatur per viam ſolidam BQD-MPN. In peripheriâ baſis incidentiæ BQD ſume quoduis punctum Q. Deinde per A & Q ſeca ſolidam reflexionis viam ABQ-DMPN, plano ad KL recto, faciente in KL ſectionem OG, in ſuperficie autem viæ ſolidæ reflexionis ſectiones AQ, QP. Dico angulos AQO, PQG æquales eſſe.

D*Emonſtr.* Quoniam ex hypotheſi planum AQP eſt rectum plano reflectenti KL, per 1. huius radij AQ radius reflexus erit in plano AQP. Rurſum quia radius incidens AQ eſt in ſuperficie lucis incidentis, etiam reflexus ipſius radius, eſt in ſuperficie lucis reflexæ. Quare cùm radij AQ reflexus radius ſit & in plano AQP, & in ſuperficie BQDMPN, neceſſariò eſt communis vtriuſque ſectio, quæ eſt QP per hypotheſim. Cùm igitur radius AQ reflectatur per radium QP, erunt per 3. huius, anguli AQO, & PQG æquales. Quod erat demonſtr.

PROPOSITIO X.

Quæ hactenus demonſtrata ſunt de ſuperficiebus æquabiliter extenſis, tam planis quàm curuis, cuiuſmodi ſunt ſphærica, conica, cylindrica, elliptica, parabolica, hyperbolica, & aliæ infinitæ, eadem omnia particulis ſuperficierum aſperarum conueniunt.

NAm aſperitas omnis oritur à minutis ſuperficieculis rectis, concauis, & conuexis, inter ſe variè commixtis; neque enim alia ſuperficiei inflexio præter iam enumeratas excogitari poteſt. Cùm igitur illa ſuperficieculatum rectarum, conuexarum, & concauarum mixtura nequeat in infinitum procedere, neceſſe eſt, vt particulæ omnes, quæ totius ſuperficiei aſperitatem componunt, ſingulæ ſint vel rectæ, vel conuexæ, vel concauæ. Quare ſuperficies aſpera nihil aliud eſt, quàm innumerabilium ac minutiſſimorum ſpecillorum mixtura, quorum alia recta ſint, alia caua, conuexa alia, à quibus proinde ſingulis incidentes radij iuxta leges hactenus demonſtratas reflectantur.

Vide plura de his *Aſtronomiæ lib.*8. in tractatu de luce & maculis Solis ac Lunæ *num.*2.

PROPOSITIO XI.

Radius obliquè in quoduis ſpeculum incidens ad maioris anguli partes reflectitur vltra perpendicularem (CX) ex incidentiæ puncto erectam.

Fig. 17. 8.9.. LInea reflectens, ſeu reflectentem tangens eſto FG, in quam radius obliquè incidat AC ſub acuto nimirum angulo ACG. Dico eum reflecti ad perpendicularis partem alteram B. Aliàs enim angulus reflexionis (BCF) non poſſet æqualis eſſe angulo incidentiæ ACG.

PROPOSITIO XII.

Punctum reflexionis (C) in quouis ſpeculo exiſtit inter incidentiæ ac reflexionis perpendicula (AG, BN).

Fig. 18. DEtur primò ſpeculum planum, & C punctum reflexionis cadat extra (ſi fieri poteſt) in F, & via reflexionis eſto AFB. Tum verò radius incidens AF ſecabit BN in O. Quoniam

niam igitur angulus incidentiæ AFG eſt [m] æqualis angulo reflexionis BFK, is verò maior *m per prop.*
eſt interno [n] BNF; etiam AFG, ſeu OFN, maior eſt quàm BNF, acutus recto: quod eſt *3*
abſurdum. Quod ſi velis cadere in N, vt via reflexionis ſit ANB, tum verò acutus inciden- *n per 32.1*
tiæ angulus ANG æqualis eſt recto reflexionis angulo BNK: quod denuò abſurdum eſt.

Detur deinde ſpeculum ſphæricum conuexum, & in eo linea reflectens FCG. Obiecti *Fig. 19.*
punctum in A, oculus in B: perpendiculares ad ſpeculum BNZ, AGZ. Dico C punctum *20.*
reflexionis ex A in B verſari inter cathetos AGZ, BNZ. Sit enim (ſi fieri poteſt) extra in F, ducanturque tangens KFL, & ex centro cathetus ZFP. Hæc neceſſariò cadet vltra BNZ. Cùm igitur radius incidens AF, per 18. reflecti debeat vltra cathetum ZFP versùs O, non poterit reflexio pertingere in B. Ac proinde reflexionis punctum nequit eſſe extra arcum NCG. Eodem modo oſtendam non poſſe incidere in puncta G, vel N. Igitur intra arcum NCG exiſtat neceſſe eſt: quod erat demonſtr.

De concauis idem commodiùs demonſtrabitur lib. 3.

PROPOSITIO XIII.

In ſpeculo quocumque angulus (ACB) ab radio incidente & re- *Fig. 18.*
flexo comprehenſus, ſecatur bifariam ab eâ, quæ ad re- *8. 9. 10.*
flexionis punctum (C) perpendicularis eſt ſpeculo. *11.*

Linea reflectens aut reflectentem tangens eſto FG. Incidentiæ & reflexionis anguli ACG, BCF æquales [a] ſunt. Anguli autem XCG, XCF ſunt recti, adeoque æquales per hy- *a per p. 3.*
potheſim. Ergo etiam reliqui XCA, XCB æquales ſunt. Ergo ACB, à perpendiculari XC ſecatur bifariam.

Corollarium.

Hinc patet cùm anguli circa perpendicularem ACX, BCX, æquales exiſtunt, reflexionem peragi viâ ACB in ſpeculo quocumque.

Cùm enim etiam æquales ſint XCG, XCF, vtpote recti, patet reliquos ACG, BCF æquales fore. Ergo per 3. 4. 5. reflexio fiet viâ ACB.

PROPOSITIO XIV.

Ab vno ſpeculi cuiuſuis puncto (A) non poſſunt reflecti radij duo *Fig. 20.*
(BA, CA) ad punctum vnum (D).

Linea reflectens aut reflectentem tangens eſto FN. Si fieri poſſit, quod propoſitio negat,
erunt incidentiæ anguli tam BAF, quàm CAF æquales [b] vni reflexionis angulo DAN; *b per 3. 4. 5*
ac proinde BAF, CAF æquales inter ſe, pars & totum. Non igitur &c.

PROPOSITIO XV.

Radius vnus (DA) in ſpeculo quocumque non reflectitur in duo *Fig. 20.*
puncta (B, C).

Linea reflectens, aut reflectentem tangens eſto FN. Si fieri poſſit id, quod negat propo-
ſitio, erit vnus incidentiæ angulus DAN æqualis duobus [c] reflexionis angulis CAF, BA-
F. Ergo etiam hi ſunt æquales, pars & totum. Non igitur &c. *c per 3. 4. 5 huius.*

PROPOSITIO XVI.

In planis & conuexis ſpeculis non poſſunt ex puncto vno (A) duo *Fig. 21.*
radij (AC, AP) reflecti ad vnum punctum (B). Siue non poſſunt *22.*
duo puncta (A, B) reflecti ad inuicem à pluribus ſpeculi plani
aut conuexi punctis, quàm ab vno.

DVcantur perpendiculares AGZ, BNZ, & radij ambo AC, AP (ſi fieri poteſt) reflectantur in B. Per 12. reflexionum puncta C, P cadunt intra G, N. Angulus autem ACG

i per 3. & 4. æqualis eſt [i] angulo BCN. Atqui ACG quia perpendiculari AGZ vicinior, eſt maior angulo APG. Ergo etiam BCN eſt maior quàm APG. Atqui APG æquatur [m] BPN. Ergo etiam BCN maior eſt quàm BPN: quod eſt abſurdum; angulus enim BCN, vtpote remotior à perpendiculari BNZ, minor eſt quàm BPN, Non igitur &c.
m per 3. & 4.

In concauis ſpeculis poſſe duo puncta reflecti ad inuicem à pluribus punctis quàm vno patebit ex lib. 3.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 26. 25. In planis & conuexis ſpeculis, ſi plura puncta, vt A, B, ad vnam incidentiæ cathetum exiſtentia, ad vnum viſum C reflectantur, punctum A à ſpeculo remotius reflectetur à ſpeculi puncto O diſtante minùs à viſu C quàm punctum Q, à quo reflectitur punctum B ſpeculo vicinius.

DEmonſtr. Reflectatur enim, ſi fieri poteſt, in puncto remotiore, puta N. manifeſtum eſt AN occurſuram rectæ BQ in X. Ergo punctum X reflectetur ex N in C, & quia idem punctum etiam eſt in rectâ BQ, reflectetur etiam ex Q in C. Quod eſt abſurdum per *prop. 16.* huius.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 24. 23. In planis & conuexis ſpeculis, ſi lineæ AB extremitate reflectantur ad viſum C à ſpeculi punctis O, Q, tota AB ad viſum reflectetur à totâ lineâ OQ.

Quomodo ſe iſta habeant in concauis patebit ex lib. 3.

DEmonſtratio. Accipiatur, rectæ BA, punctum quodlibet N, &, ſi fieri poteſt, reflectatur extra QO in M, vel V. Manifeſtum eſt NM, NV occuſuras rectis BQ, AO in D & X, adeóque punctum D reflectetur ex M in C & ex Q in C, item punctum X reflectetur ex O in C, & ex V in C: quod abſurdum eſt per 16. huius.

PROPOSITIO XIX.

In omni ſpeculo plano ac conuexo rectæ lineæ ad ſpeculum perpendicularis eſt imagini ſuæ indirectum.

CErtum eſt experientiâ, quam centies exploraui. Qui id in ſphæricis conuexis & cauis negant contingere, eos opinor vel experimentum non ſumpſiſſe, vel imperitè & oſcitanter. Cùm enim recta ad ſphæricam ſuperficiem perpendicularis nulla ſit, niſi ea, quæ producta tranſit per centrum, oportebit longitudinem, quam in ſpeculo vis indirectum apparere, ita ſpeculo obuertere, vt ſi produceretur per centrum tranſiret. Quâ in re niſi cura adhibeatur, cum facilè errari poſſit, non erit mirum, ſiquis fallaci deceptus experimento fidem deneget experimento vero.

Cur verò ſemper perpendicularis ad ſpeculum ſit imagini ſuæ indirectum, hæc eſſe ratio videtur. Cùm perpendicularis recta in nullam ſpeculi partem magis inclinet, quàm in aliam; nihil etiã eſt, cur imago in vllam partem magis quàm in aliam inclinet, ac proinde vnam cum prototypo ſuo debet rectam lineam efficere.

PROPOSITIO XX.

In omni ſpeculo plano & conuexo vnumquodque punctum obiecti, apparet in ſuo catheto incidentiæ.

Fig. 27. 28. 29. INſpiciantur tria ſchemata ad marginem indicata; quarum prima ſpeculis planis inſeruit, altera ſphæricis conuexis, tertia ſphæricis concauis.

Oculus

Oculus eſto in A, obiecti punctum F, eius incidentiæ cathetus FBZ. Dico punctum F apparere in catheto FB productâ. Statuatur enim inter punctum F & ſpeculum ſtylus quiſpiam ad ſpeculum perpendicularis, repræſentans cathetum FB. Imago huius ſtyli, ex. gr. BG, erit ipſi ſtylo indirectum per præcedentem, hoc eſt ſtylus & imago vnam conficient rectam lineam ſpeculo perpendicularem FBG. Cùm igitur punctum F per conſtructionem ſit in extremitate ſtyli, etiam imago puncti F erit in G puncto extremo imaginis ſtyli; ac proinde in catheto, ſeu perpendiculari FB productâ.

Vera eſt propoſitio etiam tum, quando in cauis ſpeculis obiectum apparet ante ſpeculum. *Quouſque veritas huius aſſertionis ſe extendat in cauis ſpeculis, patebit ex dicendis lib. 3.*

PROPOSITIO XXI.

In omni ſpeculo obiecti punctum vnumquodque apparet in radio reflexo.

Eſto obiecti punctum F, quod ad oculum poſitum in A ſui ſpeciem propaget viâ reflexâ FDA. Dico punctũ F apparere in radio reflexo AD, producto quidem ſi punctum appareat poſt ſpeculum, in non producto, ſi (quod in cauis ſpeculis poteſt accidere) appareat ante ſpeculum. *Fig. 27. 28. 29.*

Eſt certum experientiâ: ſi enim interponatur quidpiam quod intercipiat lineam iungentem punctum reflexionis & oculum, illicò diſparet imago puncti F; quod non contingeret, ſi imago non exiſteret in rectâ lineâ per A & D incedente, hoc eſt in radio reflexo AD. Ratio eſt; quia res apparent in radio, qui viſus organum immediatè afficit. Is verò cùm ſit radius reflexus, ſecundùm eius directionem, hoc eſt in eo, obiecta apparere neceſſe eſt.

PROPOSITIO XXII.

In omni ſpeculo plano & conuexo obiecti punctum vnumquodque non alibi apparet quàm in concurſu radij reflexi cum catheto incidentiæ.

Eſto punctum F viſum ab oculo A viâ reflexâ FDA: cathetus incidentiæ ſit FBZ, cum quâ radius reflexus DA concurrat in G. Dico punctum F oculo A apparere in G. *Fig. 27. 28. 29.*

Id verò ex iam præmiſſis manifeſtum eſt. Nam per 20. punctum F apparet in catheto FBZ, & per 21. apparet etiam in radio reflexo AD. Neceſſe eſt igitur vt appareat in vtriuſque concurſu G.

Hoc theorema totius Catoptricæ fœcundiſſimum eſt, ex quo fere omnia ſpeculorum planorum & conuexorum phœnomena demonſtrantur, vt ex toto libro ſecundo, ac tertio fiet manifeſtum. Vnde viciſſim eiuſdem veritas egregiè ſtabilitur, cùm id falſum eſſe non poſſit, quod phœnomenis omnibus, nullo excepto, mirabiliter conſentit.

Vtrum verò & quando locum habeat hæc propoſitio in cauis ſpeculis, planum fiet ex dicendis lib. 3.

FINIS LIBRI PRIMI.

E

S

da-
ies
ant
ple-



am

ens
dius
ppa-
ten-
rgo
culi:

dius
rebat
ipſa
ca-
ap-

di-

Ocu-
con-
com-
hoc eſt
ſt ſpe-
culum,

culum, quanto B ante ſpeculum. Idem eodem modo demonſtrabitur de imagine S cuiuſlibet puncti G in obiecto deſignabilis. Ergo imago tota PSQ eo diſtat interuallo poſt ſpeculum, quo obiectum BGF ante ſpeculum. Quod erat demonſtr.

PROPOSITIO III.

In plano ſpeculo diſtantia imaginis ab Oculo, viæ reflexionis æqualis eſt.

COnſtruantur eadem quæ in præcedenti. Quoniam in triangulis KBC, KPC latus KC *Fig. 1.*
commune eſt, & duo anguli æquales, vt in præced. oſtenſum eſt, erunt [f] BC, PC æqua- *f per 26. 1.*
les: additâque communi CA, erit PA diſtantia imaginis P ab Oculo A, par viæ reflexionis
BCA. Quod erat demonſtr.

PROPOSITIO IV

Imagines in planis ſpeculis ſunt obiectis æquales, & ſimiles, & ſimiliter poſitæ.

OBiectum eſto quodcumque BGF Oculo A apparens in PSQ. Manifeſtum eſt [a] omnes *Fig. 1.*
radios reflexos AC, AO, AE cum perpendiculis incidentiæ BK, GN, FI, concurrere *a ex 22. 1.*
in imagine PSQ, quæ ex illis concurſibus determinatur. Deinde ex 17. 1. *Catopt.* patet eun- *Cat.*
dem eſſe ordinem punctorum reflectentium C, O, E, qui eſt punctorum obiectiuorum *b per 15. 1.*
BGF. Ex quo liquet imaginis punctum P reſpondere obiecti puncto B, & S ipſi G, & Q *c per 3. 1.*
ipſi F, ac proinde eundem eſſe ſitum imaginis qui obiecti, quod erat ex demonſtrandis alte- *Catop.*
rum. Iam verò, quia angulus PCK æquatur [b] angulo ACL, hoc eſt [c] angulo BCK, etiam re- *d per 13. 1.*
liqui [d] PCE, BCE æquales erunt. Eodem modo oſtendam ſingulos angulos SOE *e per 15. 1.*
ſingulis GOE æquales eſſe. Deinde angulus QEC [e] æquatur angulo AEL; hoc eſt [f] an- *f per 3. 1.*
gulo FEC: eodemque modo demonſtrabimus ſingulos SOC ſingulos GOC eſſe æquales. *huius.*
Eſt autem & demonſtratum in præced. ſingulos radios PC, SO, QE æquari ſingulis incidentiæ radijs BC, GO, FE. Liquet ergo pyramidis Catoptricæ PAQS, ſegmentum SPCEQ eſſe ſimile & æquale, ſimiliterque poſitum viæ incidentiæ GBCEF, adeóque etiam ſegmenti baſim PSQ, ipſam videlicet imaginem, obiecto BGF, quod viæ incidentiæ baſis eſt, debere ſimilem eſſe & æqualem: quod reſtabat demonſtrandum.

Corollarium.

Plana ſpecula obiecta ſibi parallela & inclinata non inuertunt. Patet ex demonſtratis hic.

PROPOSITIO V.

In planis ſpeculis dextra apparent ſiniſtra, & contra.

CVm intueris quempiam ad te conuerſum eius dextra reſpondet tuæ ſiniſtræ, & eius ſi- *Fig. 1.*
niſtra dextræ tuæ: ac proinde vt dextra appareat dextra, debet ea reſpondere tuæ ſiniſtræ. Cum verò teipſum contemplaris in ſpeculo, dextra imaginis dextræ tuæ reſpondet; atque hoc eſt dextram apparere ſiniſtram.

Eſto igitur obiectum BF, in quo dextra ſit B, ſiniſtra F, & conſtructis iiſdem quæ in
præcedenti, imago ſit PSQ. Cùm igitur [a] partes imaginis obiecti partibus ordinatim reſpon- *a per præc.*
deant, punctum imaginis P refert obiecti punctum dextrum B, & Q ſiniſtrum, adeóque P eſt imaginis dextra, Q ſiniſtra. Quando igitur ſpectator ad ſpeculum ſe conuertet, eius dextra reſpondebit imaginis dextræ P, hoc eſt obiecti dextra B in ſpeculo viſa, illi apparebit ſiniſtra. Quod erat propoſitum.

PRO-

unctum
ulum

F reflecti-
ijs reflexis
in N ; B

lum alioſ-

ælum ap-
appareat

ſum

tens eſto
cta ND,
is B, A,
A, IA ſe

m in FI,

i anguli
ctus erit.
reliquus
D, CKD
vtrique
tera IK,
ecti, an-
æqualis
xus eſt
o A ap-
odo de-
A appa-
A appa-
llelam,

m

a ſufficiat

Linea

Linea horizootalis eſto NZ, eum quâ angulum ſemirectum conſtituat recta infinita NX. *Fig.* 5.
Statura ſe intuentis ſit primò in CB, concurrens com NX in D, eiuſque Oculus in A. Per D ducatur DI parallela ad NC. Ex B autem & C ducantur ad ND perpendiculares BF, CI, atque ex I & F ad Oculum A rectæ IA, FA ſecantes ipſam ND iu P & O. Speculo conſtituto in PO, videbis CB, hoc eſt teipſum, ſublimem in IF horizonti parallelum, vt *prop. præced.* demonſtratum eſt.

Procede deinde ex C in *c* versùs ſpeculum, & ſtatura tua iam ſit in *cb* occurrens infinitæ NX in *d*, Oculus verò ſit in *a*. Per *d* ducatur rurſum *di* parallela ad NC. Ex *b* autem & *c* ad NX perpendiculares emittantur *bf*, *ci*, atque ex *i* & *f* ad Oculum *a* rectæ *ia*, *fa* ſecantes ipſam NX in *p* & *o*. Si ſpeculum ſtatuatur in *po*, videbis rurſum *bc*, teipſum nempe, ſublimem in *fi* & horizonti parallelum, vt in præcedenti demonſtrauimus. Quare ſi vitra ſpecularia diſponantur per totum ſpatium *pod*PO, & ex *bac* retrocedas vſque in BAC, conſpicies te moueri ſitu ſemper ad horizontem parallelo, ac proinde ſi brachia extendas atque agites, quodammodo ſurſum euolantem. Verùm quia, vt dicetur *prop.* 10, ſimul etiam pauimentum CN, eui inſiſtis, erectum apparet, imo & inceſſus ipſe pedum, oportebit viſum quantùm fieri poterit inde auertere, atque eum dirigere potiſſimum versùs brachia & caput imaginis: ſic enim volantis illa ſpecies minùs interturbabitur.

Vitello (vt dixi ſupra) *cùm fruſtra binis ſpeculis vtitur, tum inſuper paralogiſat in loco imaginis per bina ſpecula viſæ aſſignando. Errorem viâ propoſitione noſtrâ* 27, *facilè lector deprehendit, ſi ipſum adeat.*

PROPOSITIO IX.

In ſpeculo ad angulum ſemirectum inclinato, obiecta quæuis ſupra terram erecta, apparent terræ parallela.

Similis eſt demonſtratio ei quam *prop.* 7 attulimus. Linea terræ eſto NC, & ſupra eam perpendicularis longitudo EC, Oculus vbiuis in A. Ducatur infinita ND faciens cum NC angulum ſemirectum DNC, eique CE occurrat in D. Per D duc infinitam DI parallelam ad NC, ad quam ex E & C duc EKL, CBI perpendiculares ipſi ND; tum ex L, atque I ad Oculum A iungantur LA, IA ſecantes ND in O & P. *Fig* 6.

Dico, ſi ſpeculum plaoum ponatur io PO, longitudinem CE Oculo A apparere in IL parallelam horizonti.

Ducantur enim EO, CP. Cùm ID, NC ſint parallelæ, anguli IDN, DNC æquales [a] ſunt. a *per* 27.1.
Quare eum DNC ſit [b] ſemirectus, etiam IDN erit ſemirectus. Et quia [c] DCN rectus eſt, b *per conſtr*
DNC verò ſemirectus, etiam [d] CDN erit ſemirectus, adeóque par ipſi IDN, ſeu LDN. Sunt c *per hyp.*
autem [i] etiam recti, adeòque æquales LKD, EKD, & latus DK duobus triangulis commu- d *per* 32.1.
ne. Ergo LK, KE æquales [m] ſunt. Cùm igitur LK, KO æquentur ipſis EK, KO, & anguli i *per conſtr.*
LKO, EKO æquales ſint, vtpote recti, etiam EOK [n] æqualis erit LOK, hoc eſt [o] ipſi AOP. m *per* 26.1.
Ergo puoctum E ad Oculum A [r] reflectitur viâ EOA, & apparet in [s] puncto L parallelæ n *per* 4.1.
DI, in quo per conſtr. radius reflexus AO concurrit cum catheto incidentiæ EK. Eodem o *per* 15.1.
modo oſtendam punctum C ad Oculum A reflecti viâ CPA, & apparere in I. Ergo tota EC r *per* 3.1. *Catop.*
apparet in tota LI parallela terræ. Quod erat demonſtr. s *per* 22.1. *Catop.* m *per* 18.1. *Catop.*

PROPOSITIO X.

In plano ſpeculo ad angulum ſemirectum inclinato, Oculo infra eius planum conſtituto ſuperficies terræ apparet perpendiculariter erecta ſurſum: Oculo autem ſupra ſpeculi planum exiſtenti, cælum & laquearia apparent erecta deorſum.

Conſtructio & demonſtratio eadem quæ præcedentis. Si enim pro primâ parte figuram ſic inuertas, vt CD ſit deorſum, repræſentans terræ ſuperficiem, ipſius portio CE reflexa à ſpeculo PO apparebit Oculo A in IL ſurſum erecta. Si autem figuram ita inuertas vt IN deorſum ſpectans terram referat, CD verò ſurſum ſit terræ parallela, portio illius CE reflexa à ſpeculo PO Oculo A apparebit in IL erecta deorſum. *Fig.* 6.

PRO-

Digitized by Google

Si obiectum datum ſit ſuperficies aut corpus, in ambitu eius deſignentur quotlibet puncta, quorum ſingulorum [a] inueniantur reflexionis puncta, hæc ſuperficiem reflectentem determinabunt. *a per præc.*

QVÆ PROPORTIO IN PLANIS SPECVLIS EXISTAT SVPERFICIEI REFLECTENTIS AD OBIECTVM.

Pulchra eſt huius rei diſquiſitio, & cum egregijs planorum ſpeculorum affectionibus connexa; quam proinde vehementer miror ex Opticis nullum vel leuiter attigiſſe.

PROPOSITIO XV.

Radij (BD, PO, CE) à plano ſpeculo in vnum punctum (F) reflexi, ſi poſt ſpeculum producantur, concurrunt cum perpendiculo incidentiæ (FG) in eodem puncto.

RAdius PO concurrat cum FG in H, & linea reflectens eſto GK. Angulus FOG per 3. *lib.* 1, huius æquatur angulo POK, hoc eſt [a] angulo GOH: anguli quoque OGF, OGH æquantur, vtpote recti, & OG vtrique triangulo latus commune eſt. Ergo [b] HG, FG æquantur. Concurrat deinde radius CE cum FG in I, & linea eius reflectens ſit GR. Angulus FEG æquatur [c] angulo CER, hoc eſt [d] angulo IEG: anguli quoque FGE, IGE æquantur, quia recti; latus verò EG utrique triangulo commune eſt. Ergo [e] IG, FG æquantur inter ſe. Quoniam igitur tam HG, quàm IG æquantur eidem FG, inter ſe æquales erunt. Ergo puncta concurſuum H, & I, eadem ſunt. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 11. a *per* 15 1. b *per* 26.1. c *per* 3.1. *Catop.* d *per* 15.1. e *per* 26.1.

Corollarium.

Ex demonſtratione patet etiam HE, FE, & HO, FO, & HD, FD æquales eſſe per *26. 1.*

PROPOSITIO XVI.

Radij à ſuperficie (BPC) plano ſpeculo parallelâ, incidentes, ſuis quique reflexis ſunt proportionales.

ACcipiatur incidens quiuis radius CE, cum quo cæteri omnes comparentur, vt PO, BD & alij infiniti, ducantur rectæ PC, & OE. Quoniam ſuperficies BPC, DOE ſunt parallelæ, erit per 17. 11. vt HE ad EC, ſic HO ad OP. Pari ratione oſtendam eſſe vt HE ad EC, ſic HD ad DB. Ergo HO eſt ad OP, vt HD ad DB. Atqui per *corol. præc.* HE, HO, HD æquantur radijs reflexis FE, FO, FD. Ergo vt FE ad EC, ſic FO ad OP & FD ad DB. Quod erat demonſtr.

Fig. 12. & 13.

Corollarium.

Radij reflexi ad ſuas reflexionum vias eandem omnes habent proportionem.

Nam cùm ſit vt FE ad EC, ita FO ad OP, & FD ad DB, etiam compon. erit vt FE ad viam FEC, ita FO ad viam FOP, & FD ad viam FDB.

PROPOSITIO XVII.

Cum longitudo (BC) plano ſpeculo parallela, ad vnum punctum (F) reflectitur, linea reflectens (DE) ad ipſam (BC) eam habet proportionem quam radius quilibet reflexus (DF) ad ſuam reflexionis viam (BDF).

PRoducantur longitudinis datæ radij extremi BD, CE, donec concurrant cum perpendiculo incidentiæ FG: concurrent autem per 15 in vno puncto, puta in H. Quoniam igi-

Fig. 12. & 13.

a per corol. 1 p.4. lib.6. tur ex hyp. BC eſt parallela ad DE, erit DE [a] ad BC, vt HD ad HB, hoc eſt per *coroll. p.* 15 vt FD radius reflexus ad viam reflexionis FDB. Quod erat demonſt.

PROPOSITIO XVIII.

Cum ſpecies ſuperficiei (BPC) plano ſpeculo parallelæ, ad vnum punctum (F) reflectitur, proportio ſuperficiei reflectentis (DOE) ad ipſam (BPC) eſt duplicata proportionis, quam habet radius quiuis reflexus (DF) ad reflexionis viam (BCF).

Fig. 12. 13. SVperficies reflectens DOE eſt Sectio coni ſeu pyramidis Catoptricæ BPIC ad baſim [a] BPC parallela. Ergo DOE ſimilis eſt obiecto BPC; & quidem ſi BPC circulus eſt, etiam DOE circulus erit; ſi BPC rectilineum planum eſt, etiam erit DOE, & [b] illi ſimile. Ergo proportio DOE ad BPC eſt duplicata proportionis [c] DE ad BC; hoc eſt proportionis DI ad BI; hoc eſt (quia demonſtratum in *corol. prop.* 15 DI æqualem eſſe DF) proportionis DF ad reflexionis viam BDF. Quod erat demonſt.

a Ex elem. conic.
b ex demonſt. in lem. 1. ante 5. 12.
c per 2. 12. vel per 20. 6.

PROPOSITIO XIX.

Vt in plano ſpeculo te ipſum à vertice ad pedes contemplari poſſis, eius longitudo debet eſſe tuæ dimidia.

Fig. 14. PLanum ſpeculum in quo te à capite ad pedes vſque conſpicias, eſto NP: ſtatura tua BF ſpeculo parallela: Oculus in A: linea reflectens CO. Demonſtrandum eſt hanc eſſe dimidiam longitudinis tuæ BF.

Ab Oculo A duc perpendiculum AGL, cum quo radius BC concurrat in L, & radius FO in K: ducanturque AC, AO. Quoniam CO ex hypotheſi ad Oculum A reflectit ſpeciem puncti B, via reflexionis erit BCA, ac proinde angulus ACG [a] æqualis eſt angulo BCX, hoc eſt [b] angulo LCG. Eſt verò etiam AGC æqualis LGC, cùm ambo recti ſint ex conſtr. latuſque GC vtrique triangulo commune. Ergo AG, LG [c] æquales ſunt, ac proinde AL dupla eſt GL. Cùm igitur in triangulo ALB, recta GC ſit [d] parallela ad BF, ideoque [e] vt AL eſt ad GL, ita AB ſit ad GC, etiam AB dupla erit GC. Eodem modo oſtendam AF eſſe duplam GO. Ergo tota BF longitudo tua dupla eſt totius CO, quæ eſt longitudo ſpeculi reflectentis. Quod erat demonſtr.

a per 3. 1. Catop.
b per 15. 1.
c per 26. 1.
d per hyp.
e per corol. 1 p. 4. l. 6.

Aliter. Quoniam ob XZ & BF parallelas, angulus XCB [f] par eſt alterno B, & GCA [g] alterno BAC, iamque ſupra oſtenſum eſt ipſos XCB, GCA æquales eſſe, etiam B & BAC æquales erunt. Ergo [i] AC, BC æquantur, adeóque AC radius reflexus, dimidius eſt viæ reflexionis BCA. Atqui GC [e] eſt ad AB, vt AC ad reflexionis viam ACB. Ergo etiam GC dimidia eſt AB. Eodem modo demonſtrabitur GO dimidia eſſe AF; Ergo tota CO, longitudo videlicet ſpeculi reflectentis, dimidia eſt longitudinis tuæ BF. Quod fuit demonſtrandum.

f per 27. 1.
g per 6. 1.
i per 17.

Idem adhuc aliter demonſtrabitur ductis perpendiculis ex B, & F, vel ex C, & O.

Corollarium.

Eodem modo demonſtrabitur vt te ipſum in ſpeculo videre poſſis totum in latitudinem, ſpeculi latitudinem debere ſimiliter eſſe dimidiam tuæ.

PROPOSITIO XX.

Longitudines etiam aliorum obiectorum plano ſpeculo parallelorum, & æqualem cum Oculo diſtantiam à ſpeculo habentium, vt totæ apparere poſſint in ſpeculo, debet huius longitudo eſſe illarum dimidia.

DEmonſtratur vt præcedens.

PROPOSITIO XXI.

Cum teipſum aliaque obiecta ſpeculo parallela & eodem interuallo diſſita quo tu, tota vides in ſpeculo, portio ſpecularis reflectens obiecti ſubquadrupla eſt.

PEr 18 *huius* ſuperficies reflectens ad obiectum proportionem habet duplicatam eius, quam habet radius reflexus AC ad viam reflexionis BCA. Atqui in caſu aſſertionis per demonſtrata in 19 *huius* proportio AC ad BCA eadem eſt quæ 1 ad 2, cum radius AC dimidius ſit viæ BCA. Ergo proportio ſuperficiei reflectentis ad obiectum in caſu aſſertionis duplicata eſt proportionis 1 ad 2, ac proinde par proportioni 1 ad 4. Quod erat demonſtr. *Fig.* 14.

PROPOSITIO XXII.

Cum teipſum in aliquo ſpeculo vides præciſè totum; ſiue accedas, ſiue recedas, perges te ſemper totum videre.

Pari modo ſi obiecta, quæ tecum æqualiter à ſpeculo remota vides tota, tecum accedant vel recedant, perges ſemper videre tota.

QVod non habere locum in obiectis quæ magis minuſſue à ſpeculo diſtant, quàm Oculus, patebit ex *prop.* 23. & 24.

Demonſtr. Quocumq; interuallo abſis à ſpeculo, ſemper linea reflectens, ſiue ſpeculi longitudo, eſt dimidia [a] tuæ. Ergo ſemper ſibi ipſi illa æqualis eſt. Pari modo quocumq; interuallo abſis à ſpeculo, ſemper reflectens ſuperficies eſt tuæ [b] ſubquadrupla, ac proinde ſemper æqualis ſibi ipſi. Eodem diſcurſu de alijs obiectis ſpeculo parallelis & æqualiter tecum diſſitis, idipſum probabitur. Ergo ſpeculum quod ſufficit vt te tibi totum aliaque obiecta tecum æqualiter remota à ſpeculo exhibeat in aliquâ diſtantiâ, ſufficit vt exhibeat in omni. Quod erat demonſt.

a *per* 19. *huius.* b *per* 21. *huius.*

PROPOSITIO XXIII.

Eſto obiectum BR ab Oculo in A totum præciſè viſum in ſpeculo CG. Si id manente Oculo propiùs ad ſpeculum parallelè admoueatur, deſinet videri totum ab Oculo A; & quò erit propinquius, eò pars eius videbitur minor: ſemper tamen maior dimidia longitudinis, & maior quam quarta ſuperficiei. *Fig.* 15.

QVoniam obiectū totum BR ex hyp Oculo A totum apparet in ſpeculo CG. Ergo viæ reflexionum, per quas ſpecies extremitatum B, & R perueniunt ad Oculum A, ſunt BCA, RGA, ad ſpeculi extremitates [o] terminatæ. Manifeſtum eſt ſi inter extremos incidentiæ radios BC, RG ducantur, longitudines MQ, SI, has quoque ab Oculo A videri præciſè totas in eodem ſpeculo CG; ac proinde eas, quę hoſce extremos radios excedunt, vt MT, SV, non [o] poſſe apparere totas. Atqui BR, ſi parallela ſpeculo propiùs admoueatur, excedet neceſſariò radios extremos BC, RG; cùm enim CG per 20 huius ſit dimidia BR, adeóque ipsâ minor, etiam MQ minor erit quàm BR. Ergo patet ſi BR propiùs ſpeculo admoueatur in MT, SV, Oculo A in ſpeculo CG non amplius apparere totam. Deinde quia SI eſt minor quàm MQ, liquet etiam quò BR accedet propiùs ad CG, eò minorem eius videri partem. Quia tamen MQ, SI, ſiue lineæ ſint, ſiue ſuperficies, ſemper maiores ſunt quàm CG; CG autem, ſi pro lineâ reflectente capiatur, ſit dimidia lineæ BR [p], ſi verò capiatur pro ſpeculo, ſit quarta pars ſuperficiei obiecti BR, ſemper ex obiecti longitudine apparebit plus quam dimidium, & ex ſuperficie plus quàm pars quarta. Quæ erant demonſtranda.

o *per* 18. 1. *Catop.* o *ex eadem.* p *ex* 20 *huius.*

PROPOSITIO XXIV.

Iiſdem poſitis, quæ in præcedenti; ſi Oculo manente obiectum longiùs remoueatur, poterit in eodem ſpeculo CG apparere totum, licet augeretur in infinitum.

Fig. 15. a ex p. 17. 1. Catop.

PRoducantur enim extremi incidentiæ radij CB, GR versùs P & H infinitè. Manifeſtum eſt [a] quidquid inter hos radios comprehenditur, ab Oculo A videri totum in eodem ſpeculo CG. Et quia ſi versùs PH recedatur longiùs ac longiùs, inter radios iam dictos interponi poteſt longitudo quâcumque datâ maior, liquet obiectum BR ſi longiùs ſemper ac longiùs Oculo manente recedat, videri totum in eodem ſpeculo CG, licet augeatur in infinitum. Quod erat demonſt.

Quæ Theor. 23. & 24 *dicta ſunt proponemus vniuerſaliùs in ſequenti.*

Obiectum ſpeculi adæquatum voco, quod apparet in ſpeculo totum, & ſic, vt imago totum præcisè occupet ſpeculum, cuius proinde nulla ſit pars, quæ non reflectat.

PROPOSITIO XXV.

Eiuſdem determinati ſpeculi obiectum adæquatum, ſi obiecti augeatur diſtantia, fit quocumque dato maius: imminutâ verò diſtantiâ, etiam ipſum minuitur quidem, ſemper tamen manet ſpeculo maius.

SIt primò obiectum lineare, longitudo videlicet aut latitudo rei cuiuſcumque. Quò obiectum longiùs à ſpeculo remouetur, Oculo immoto, eò maior euadit proportio radiorum incidentium ad radios reflexos, ſic vt ea tandem fiat quacumque datâ maior. Quare etiam componendo proportio radij incidentis cum reflexo ad reflexum, hoc eſt proportio viæ reflexionis ad radium reflexum fiet quâcumque datâ maior. Atqui [a] longitudo obiecti ſpeculo parallela eſt ad lineam reflectentem vt via reflexionis ad radium reflexum. Ergo proportio longitudinis obiectiuæ ſemper eiuſdem in lineam reflectentem fiet quâuis datâ maior. Ergo etiam ipſa longitudo, tota à ſpeculo dato repræſentabilis præcisè, poteſt eſſe quâuis datâ maior.

a per 17. huius.

Deinde obiectum eſto ſuperficies. Iam oſtendi augendo diſtantiam, proportionem viæ reflexionis ad radium reflexum fieri quâuis datâ maiorem. Ergo etiam proportio, quæ illius duplicata eſt, nempe proportio [b] ſuperficiei obiectiuæ ſemper eiuſdem ad ſuperficiem reflectentem, fiet quâuis datâ maior. Ergo etiam ſuperficies obiectiua, adæquatum videlicet ſpeculi obiectum, fiet quâuis datâ maior. Quæ erant demonſt.

b per 18. huius.

Similiter facile demonſtrantur reliqua in propoſitione aſſerta.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 15.

Datis Oculo (A), ſpeculo (CG) & obiecti longitudine (K) quæ longitudine ſpeculi ſit maior, locum reperire, in quo longitudo data (KO) fiat obiectum ſpeculi adæquatum in longitudinem.

DVcatur ab Oculo A perpendicularis AZS, ſic vt SZ, AZ æquales ſint. Tum ex puncto S per ſpeculi margines emittantur rectæ infinitæ SCP, SGH: fiatqoe vt CG ad NO differentiam longitudinis ſpeculi CG & longitudinis datæ KO, ita SC ad quartam CP.

Dico, ſi longitudo data ſtatuatur in P, inter radios CP, GH, ſpeculo parallela, eam fore obiectum ſpeculi adæquatum in longitudinem.

a in 13. & alibi. b per 17. 1. Catop.

Demonſt. Ducatur PH, ad ſpeculi longitudinem CG parallela. Iam ſæpiùs oſtenſum [a] eſt, cùm perpendicularis AZS æqualiter vtrimque producta eſt, æquari angulos AGZ, & HGX, item ACZ, & PCX. Ergo [b] ſpecies rectæ PH reflectitur ad Oculum A per viam inter extremos

mos radios PCA, HGA interceptam, ac proinde eſt obiectum ſpeculi adæquatum, cùm à totâ ſpeculi longitudine CG reflectatur. Atqui PH eſt æqualis datæ K; quod ſic oſtendo: per conſtr. vt CG, ſeu KN eſt ad NO, ſic SC eſt ad CP. Ergo [c] etiam KN, ſeu CG, eſt ad KO vt SG ad SP, hoc eſt [o] vt eadem CG eſt ad PH. Cum ergo CG ad KO, & ad PH eandem habeat rationem, KO & PH æquales erunt. Liquet ergo quæſitum.

c patet ex corol. 2. p. 18. 5.
o per corol. 2. p. 4. 6.

DE REFLEXIONE AD MVLTA PLANA.

PROPOSITIO XXVII.

Planis quotcumque poſitione datis (LD, DE, EM) dato quoque reflexionis principio (B) ac termino (A) puncta reflexionis (O, T, X) inuenire.

Fig. 16.

HOc Problema vnum eſt ex præcipuis Catoptricæ planæ.

In planis datis lineæ reflectentes ſint, LD, DE, EM, quæ ſunt in eodem reflexionis plano cum punctis datis B, & A. Ex B reflexionis principio ducatur ad LD perpendiculum BCF, ſic vt BC, FC ſint æquales. Item ex F ad ED productam duc perpendiculum FGH, ſic vt FG, HG ſint æquales. Rurſum ex H ad ME productam duc perpendiculum HIK, ſic vt HI, KI, ſint æquales. Tum ex K ad reflexionis terminum datum A, duc KA, ſecantem ME in X; & ex H rectam HX, ſecantem DE in T; & ex F rectam FT ſecantem LD in O. Dico reflexionum puncta eſſe O, T, X, ac proinde viam reflexionis eſſe BOTXA.

Quod ſi ſectio X contingat inter E & I, aut ſectio T inter D & G, Problema eſt impoſſibile.

Demonſtr. Quoniam BC, FC perpendiculum vtrimque æquale eſt, erit (quod iam [a] ſæpè oſtenſum eſt) angulus BOC æqualis angulo TOD. Pari modo quia perpendiculum FGH vtrimque æquale eſt, erit angulus FTG par angulo XTE. Denique quia perpendiculum HIK vtrimque æquale eſt, etiam anguli HXI, AXM æquales erunt. Ergo [b] via reflexionis ex B in A (vel contra) eſt BOTXA. Quod erat quæſitum.

a in 13. & alibi.
b per 5. 2. Catop.

Corollarium.

Hinc patet ad quas datorum planorum partes ſpecula ſint applicanda, nimirum circa O, T, X, vt Oculus A in ſpeculo circa X poſito, videat obiectum B reflexum ad omnia ſpecula.

PROPOSITIO XXVIII.

Diſtantia apparens obiecti per reflexionem ad vnum vel plura ſpecula plana viſi toti viæ reflexionis (BOTXA) æqualis eſt.

Fig. 16.

MAnentibus iiſdem, quæ in præcedenti, ſpecies obiecti B, ex B ita peruenit ad Oculum A, ac ſi veniret ex F, eò quòd BO, FO ſint æquales, & FOT vna recta. Rurſum ſpecies ex F ita refertur ad Oculum A, ac ſi veniret ex H, quia iterum æquales ſunt FT, HT, & HTX vna recta. Ergo etiam ſpecies ita defertur ex B in Oculum A, ac ſi veniret ex H. Atqui ſi eſſet in H, appareret in K [d] quia perpendiculum incidentiæ HI cum radio reflexo AX concurrit in K. Ergo obiectum B Oculo A apparet in K.

d per 22. 1. Catop.

Atqui diſtantia KA æqualis eſt toti viæ BOTXA. Quod ſic demonſtr. Quoniam BO, FO, æquales ſunt additâ communi OT, erit via BOT æqualis FT. Rurſum quia FT, hoc eſt (vt iam oſtendi) via BOT, æquatur HT, [m] additâ communi TX, etiam via BOTX par erit HX. Quare cùm HX par [n] ſit KX, etiam via BOTX ipſi KX æqualis eſt. Additâ igitur communi XA, erit via reflexionis tota BOTXA æqualis KA. Quod erat demonſtrandum.

i per cor. p. 15.
m ibid.
n ibid.

Corollarium.

Longè igitur alius eſt locus imaginis in plano (EM) ſpeculo, dum ſpecies obiecti B, in

illud mediatè incidit, priùs nempe reflexa ad alia ſpecula, quàm dum immediatè. Nihilominus etiam hic eum quâdam analogiâ verum eſt obiectum apparere in concurſu radij reflexi eum perpendiculo incidentiæ. Cùm enim oſtenſum ſit ſpeciem obiecti B eodem modo allabi ad oculum A ex B & ex H, cenſeri poteſt obiectum eſſe in H. Tum verò perpendiculum incideotiæ erit HI, cum quo in K eoncurrit radius reflexus AX.

PROPOSITIO XXIX.

Cùm res per plures reflexiones cernitur, dextra apparent ſiniſtra, ſi numerus reflexionum eſt impar; ſi autem par fuerit, dextra apparent dextra.

CVm enim per vnam reflexiooem dextra appareant ſiniſtra iuxta 5. *huius*, manifeſtum eſt per duas reflexiones dextra apparere dextra, nam ſecuoda reflexio reſtituit, quod prima eonuerterat. Quod ſi accedat reflexio tertia, ea rurſum eonuertet, quod reſtituerat ſecunda; & quarta reſtituet, quod eonuerterat tertia, & ſic deioeeps.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 17. Si in polygono quocumq; ordinato (F, G, H, I, K) ex lateris alicuius medio puncto (A) obiecti ſpecies aut pila quæpiam dirigatur, in lateris vicini medium punctum (B); ad omnia latera polygoni reflexa, redibit in punctum idem (A): eritque reflexionis via polygonum ſimile ordinatum, priori inſcriptum.

BIſeca etiam latera reliqua in C, D, E. Ducanturque præter AB iam ductam, rectæ BC, CD, DE, EA. Quoniam in triangulis P, Q, R, S, T anguli F, G, H, I, K ſunt æquales, vtpote polygoni ordinati, & latera æquales angulos ambientia æqualia ſint, æquales erunt [a] anguli FBA, GBC; item GCB, HCD; item HDC, IDE; item IED, KEA. Ergo pila ex A incidens in B [b] reflectitur in C, & ex C in D, & ex D in E, & ex E in A: ac proinde via reflexioois eſt ABCDE.

a *per* 4 1. b *per* 3. *l.* 1. *huius.*

Quod autem via reflexionis ſit polygonum regulare priori ſimile, ſic demooſtro. Quia triangula P, Q, R, S, T ſibi mutuo æquiangula ſunt per 1. partem, etiam ſibi mutuo æquilatera erunt, ac proinde æquales ſunt AB, BC, CD, DE, EA. Deinde, quia tres anguli ad B æquantur tribus ad C, & duo FBA, GBC, duobus GCB, HCD æquales ſunt ex 1 parte, etiam reliqui ABC, BCD æquales erunt. Eodem modo oſtendam omnes polygoni ABCDE angulos inter ſe eſſe æquales. Ergo polygonum ABCDE eſt ordioatum. Liquet ergo quæſitum

Corollarium.

Si in A ponatur oeulus videbit ſeipſum per tot reflexiones vnâ minus quot ſunt latera polygoni.

PROPOSITIO XXXI.

Oculo E, & obiecto A poſitione datis, datum numerum ſpeculorum ita diſponere, vt obiectum ad omnia ſpecula reflexum in vno ſpeculo videatur.

Fig. 17. SVpra AE diſtantiam oculi & obiecti deſcribe polygonum ordinatum ABCDE, habens latera binario plura numero ſpeculorum: vt, ſi dentur tria ſpecula, deſcribe pentagonum. Deinde angulum ABC obiecto A proximum biſecet recta BV, & ponatur primum ſpeculum in B perpendiculariter ad BV. Si eodem modo conſtituantur reliqua ſpecula in C, & D; Dico oculum E in ſpeculo HDI videre obiectum A, reflexum ad tria ſpecula in B, C, D, exiſtentia.

Demonſt.

Demonſtr. Cùm BV ſit recta ſpeculo exiſtenti in B, etiam planum ABCDE per BV ductum erit ᵃ rectum ſpeculo in B exiſtenti, ac proinde & alijs ſpeculis eodem modo poſitis in C, & D. Ergo ABCDE planum reflexionis eſt, eiuſque ſectiones eum ſpeculorum planis, ſunt FG, GH, HI, quæ proinde ſunt lineæ reflectentes. Reſtat vt probemus angulos ABF, CBG, &c. æquales eſſe. Quoniam BV eſt perpendicularis plano ſpeculi, etiam erit perpendicularis ad lineam ᶜ FG in plano ſpeculi exiſtentem. Quia igitur anguli FBV, GBV recti, adeóque æquales ſunt, ſi auferantur æquales per conſtr. ABV, CBV, reliqui ABF, CBG æquales erunt. Eodem modò oſtendam æquales eſſe BCG, DCH; & CDH, EDI. Ergo ſpecies obiecti A reflectitur ex B in C, & ex C in D, & ex D ad oculum E. Quod erat quæſitum. *a per 18. rt.* *c per def. 3. 11.*

Corollarium

Hinc patet quomodo Oculo E videri poſſit obiectum A, licet murus interpoſitus directam viſionem impediat.

PROPOSITIO XXXII.

Oculo (A) & obiecto (E) poſitione datis, efficere vt diſtantia imaginis ab oculo, ſit multiplex ad lubitum diſtantiæ datæ (AE) Oculi ab obiecto *Fig. 17.*

EXempli grat. quadrupla. Super AE deſcribe polygonum ordinatum, cuius denominator ſit vnitate maior multiplo deſiderato diſtantiæ datæ AE. In caſu dato quoniam diſtantia imaginis petitur quadrupla ipſius AE, deſcribendum erit ſuper AE pentagonum. Angulis D, C, B, applicentur tria ſpecula, vt in præcedenti prop. factum. Oculo A ſpeculum in B poſitum intuenti apparebit imago obiecti E, diſtans ab Oculo interuallo AE quater ſumpto. *Fig. 17.*

Nam, vt patet ex demonſtratione præced. via reflexionis erit EDCBA, quatuor videlicet pentagoni latera, quæ reliqui AE quadrupla ſunt. Atque per 28, diſtantia imaginis ab oculo viæ reflexionis æqualis eſt. Ergo etiam diſtantia imaginis ab Oculo eſt quadrupla interualli dati AE. Quod erat quæſitum.

PLANORVM SPECVLORVM ÆQVIDISTANTIVM AFFECTIONES.

PROPOSITIO XXXIII.

Si duo plana ſpecula ſibi fuerint parallela, in ſingulis apparent vnius obiecti inter ſpecula conſtituti duæ ſeries rectæ imaginum infinitarum, in longitudinem infinitam excreſcentes.

INter duo plana ſpecula parallela, ſint Oculus A, & obiectum B poſitione data, per quæ tranſiens planum reflexionis, faciat in ſpeculis lineas reflectentes ZE, XF: & per oculum A, ac obiectum B ducantur perpendiculares ZX & RBK infinita. In hac fiat FG æqualis ipſi FB. Tum diſtantia ſpeculorum EF duplicata, transſcribatur ex G in H, & ex H in I, & ex I in K, & ſic in infinitum. Pari ratione ſpeculorum diſtantia EF duplicata, transferatur ex B in α; ex α in β; ex β in γ; & ſic in infinitum. *Fig. 18.*

Dico I. Oculo A, intuenti ſpeculum XF, obiectum B apparere in locis G, H, I, K, L, & alijs infinitis. Item in locis α, β, γ, δ, & infinitis, quantum videlicet vis ſpecierum finita, per multiplicatas reflexiones ſenſim langueſcens, patitur.

Et in G quidem apparet obiectum B per reflexionem vnam: in H, per tres, in I, per quinque, in K per ſeptem, & ſic deinceps per numeros impares. At verò in α obiectum B cernitur per reflexiones duas, in β per 4; in γ per 6; in δ per 8; & ſic deinceps per numeros pares.

Dico II. Si EP fiat par EB, & diſtantia ſpeculorum EF duplicata transſcribatur ad partem alteram in infinitam FER, primò ex P, deinde ex B, Oculo A intuenti ſpeculum ZE eadem omnia apparebunt.

Demonſtratio.

Fig. 19. Claritatis gratiâ eam in plura membra partiemur.

1. Rectis FH, FI, FK, & reliquis infinitis, æquales accipiantur FL, FM, FR, &c. Oſten-
dam etiam EL, EM, ER &c. æquales fore, rectis EG, EH, EI &c. Per conſt. GH dupla
eſt FE. Ergo FH (hoc eſt per conſt. FL) continet FE bis, & FG. Ergo EL continet FE
c per conſt. ſemel & FG, ac proinde par eſt EG. Deinde quia FI par eſt [c] FM; FI autem [d] continet FE
d per conſt. quater & FG; etiam FM continebit FE quater & FG. Ergo EM continet FE ter & FB.
e patet ex conſt. Atqui etiam EH continet [e] FE ter, & FB. Ergo EM æquatur EH. Pari ratione oſtendam
ER æquari EI, & ſic deinceps in infinitum.

Fig. 20. 2. Rectis Fα, Fβ, Fγ &c. ſumantur æquales FP, FR, FS &c. Oſtendam etiam EP, ER,
f per conſt. ES, ipſis EB, Eα, Eβ &c. æquales eſſe. Quia αB [f] dupla eſt FE, continebit Fα ipſam FE
i per conſt. bis, minùs FB. Ergo & FP par [i] ipſi Fα, continet FE bis, minus FB. Ergo EP continet FE
k per conſt. ſemel, minùs FB. Atqui etiam EB æquatur FE, minùs FB. Ergo EP, & EB æquales ſunt.
l conſt. Rurſum, quia Bβ continet [k] FE quater, continebit Fβ, adeóque & FR [l] ipſi par, rectam FE
quater, minùs FB. Ergo ER continet FE ter, minùs FB. Atqui etiam Eα continet FE ter,
m conſt. minùs FB, (nam Bα continet [m] FE bis, ac proinde Fα continet FE bis, minùs FB; ideó-
que Eα continebit FE ter, minùs FB). Ergo ER & Eα æquales ſunt. Eodem planè modo
demonſtrabimus ES, & Eβ æquales eſſe, & ſic in infinitum.

Fig. 21. 3. His demonſtratis, reliqua demonſtratio omnis in promptu eſt. Nam quia per conſtr.
perpendiculares FB, FG vtrimque æquales ſunt, & latus FC vtrique triangulo commune,
n per 4.1. angulique BFC, GFC recti, idcoque æquales, erit [n] angulus BCF etiam par angulo GCF,
o per 15.1. hoc eſt [o] ACX. Ergo BCA eſt [p] via reflexionis, radiuſque reflexus eſt AC: qui quia con-
p per 3.1. cat. currit cum perpendiculo incidentiæ BF in G, obiectum B [q] oculo A apparet in G.
q per 22.1. cat. 4. Quod etiam obiectum B, Oculo A, appareat in H, per reflexiones tres, ſic oſtendo.
Fiat rectæ FH æqualis FL: ducanturque rectæ AH ſecans XF in D; DL ſecans EZ in
Fig. 22. N; NG ſecans XF in O, ac demum OB. Quoniam BF, GF æquantur, erunt, vt *num.* 3.
r conſt. iam oſtendi, æquales anguli BOF, NOD. Deinde quia FH, FL [r] æquales ſunt, etiam per
demonſtrata *num.* 1. EG, EL, æquales erunt. Ergo rurſum anguli ENG, ZND æquales.
s conſt. Denique quia FH, FL [s] æquales ſunt, anguli NDF, XDA iterum æquales erunt. Ergo ſpe-
cies obiecti B reflexa ter in O, N, D, defertur ad Oculum A per viam BONDA; radiuſque
ad Oculum pertingens eſt AD.

Deinde ſpecies ex B ita defertur ad Oculum A, ac ſi veniret ex G, quia BO, GO æqualis
ſunt, & GON vna recta; ex G verò ſic, ac ſi veniret ex L, quòd pares ſunt GN, LN; & L-
ND vna recta; denique ſic ex L, ac ſi veniret ex H, quia pares ſunt LD, HD, & HDA
t per 22.1. cat. vna recta. Atqui L [t] appareret in H; quia AD radius ad Oculum pertingens cum perpendicu-
lo incidentiæ LF concurrit in H. Ergo obiectum B, Oculo A apparet in H, quod eidem
Oculo A *num.* 3, oſtenſum eſt apparere etiam in G.

Fig. 23. 5. Eodem planè ratiocinio, & adminiculo eorum quæ *num.* 1. & 4 oſtenſa ſunt, demon-
ſtrabitur (non variatâ vnquam obiecti B, vel Oculi A poſitione) obiectum B apparere in I
per reflexiones quinque, ſi rectis FG, FH, FI accipiantur æquales FB, FL, FM, ac tum
ducantur AI ſecans in Q, QM ſecans ZE in N, NH ſecans in O, OL ſecans in D, DG ſe-
cans in C, ac tandem CB: erit enim via reflexionis BCDONQA.

Fig. 19. Quòd ſi rectis FG, FH, FI, FK, fiant æquales FB, FL, FM, FR, ducanturque AK ſe-
cans in Q, QR in S, SI in Y, YM in T, TH in V, VL in D, DG in O, ac tandem OB; eo-
dem diſcurſu demonſtrabitur Oculo A, obiectum B apparere in K per reflexiones ſeptem.
Atque ita in infinitum.

Fig. 24. 6. Tranſeamus modò ad imagines in α, β, γ, δ &c. apparentes. Oſtendam primò obie-
ctum B, Oculo A (ſeruatâ vtriuſque eâdem ſemper poſitione) apparere in α per reflexiones
duas. Fiat rectæ Fα æqualis FP, ducanturque Aα ſecans in D; DP ſecans in C; & CB. Quo-
niam ex conſt. Fα, FP, æquales ſunt etiam per *num.* 2. EB, EP æquales erunt. Patet igitur
angulos BCE, DCZ æquales eſſe. Deinde quia Fα, FP æquales ſunt, etiam angulos CDF,
XDA liquet eſſe æquales. Ergo ſpecies obiecti B reflexa bis in C, D, defertur ad Oculum A
u per 3.1. Catop. per [u] viam BCDA; radiuſque ad oculum pertingens eſt DA, concurrens cum perpendicu-
i per 21.1. Cat. lo incidentiæ PF, in α. Ergo P apparet in [i] α. Atqui ſpecies veniens ex B ita defertur ad O-
culum A, ac ſi veniret ex P. Ergo etiam B, Oculo A apparet in α.

Fig. 25. 7. Quod verò B, Oculo A appareat etiam in β per reflexiones quatuor, ſic demonſtro
Rectis Fα, Fβ æquales fiant FP, FR, ducanturque Aβ ſecans in M, MR ſecans in N, Nα
x conſt. ſecans in D, DP ſecans in C, ac tandem CB. Quoniam [x] Fα, FP æquantur, etiam per *num.*
2. EB, EP æquales ſunt. Anguli igitur ad C ſunt pares. Et quia æquantur Fα, FP, anguli
quoque

quoque ad D pares erunt. Iam quia Fβ, FR æquantur, etiam per *num.*2. Eα, ER æquales
erunt. Æquantur ergo anguli ad N. Et quia pares ſunt Fβ, FR, etiam anguli ad M æquales
erunt. Species igitur ex B reflexa quater in C, D, N, M, pertingit ad Oculum A per viam [a] a *per* 3.1.
β CDNMA, radiuſque ad oculum pertingens eſt AM: qui quia cum incidentiæ perpendi- *cat.*
culo RF concurrit in β, idcirco R [d] apparet Oculo A, in β. Atqui ſpecies obiecti ex B io d *per* 22.1.
oculum A ita incidit, ac ſi veniret ex R, quod oſtenditur vt *num.*4. Ergo etiam B, Oculo A *cat.*
apparet in β.

8. Quod ſi rectis Fα, Fβ, Fγ, æquales ſumantur FP, FR, FS, ducanturque rectæ AOγ, *Fig.* 20.
OMS, MQβ, QLR, LCα, CNP, NB, eodem ratiocinio & adminiculo eorum, quæ *num.*
2 & 4 oſtenſa ſunt, demonſtrabitur obiectum B, Oculo A, per reflexiones ſex apparere in γ
atque ita in infinitum.

Omnes igitur theorematis partes demonſtrauimus

PROPOSITIO XXXIV.

Iiſdem poſitis, Dico quamlibet imaginum ſupradictarum tanto interuallo diſtare ab oculo A, quanta eſt tota via reflexionis ſuæ.

DEmonſtr. Accipiamus in *Fig.*22, imaginem in H apparentem. Quoniam per conſtr. æ-
quantur BF, GF, & OF vtrique triangulo communis eſt, anguli verò ad F recti, erunt *Fig.* 22.
BO, GO [a] æquales. Additâ igitur communi NO, erit GN æqualis viæ BON. Rurſum
quia per *num.*1.*praced.prop.* EG, EL æquales ſunt, & NE communis, anguli verò ad E recti, a *per* 4.1.
etiam [b] GN, (hoc eſt BON) & LN æquales erunt. Additâ ergo communi DN, erit LD b *per eand.*
viæ BOND æqualis. Sed LD eſt par [c] HD, quod per *num.*1.*praced.* æquales ſint FL, FH; c *per eand.*
DF communis; & anguli ad F recti. Ergo via BOND, æqualis eſt HD. Additâ igitur com-
muni AD, erit HA diſtantia imaginis in H apparentis, toti viæ reflexionis BONDA æqua-
lis. Quod erat demonſtrandum.

Eodem planè modo idem demonſtrabitur de imagine I in *Fig.*23, & de imagine K in *figura* 19. & ſic de cæteris: item de imagine α *in figura* 24, & de imagine β in *Fig.*25, & de imagine γ in *Fig.*20, & ſic de cæteris.

PROPOSITIO XXXV.

Iiſdem poſitis, ſtet in B homo facie conuerſus ad ſpeculum XF, quod intuetur oculus A.

Dico imagines in G, H, I, K &c. fore conuerſas ad Oculum A, *Fig.* 18.
auerſas verò in α, β, γ &c. ſiue in G, H, I, K &c. apparere faciem Oculo A; in α, β, γ &c. tergum.

NAm pro apparentiâ imaginum G, H, I, K, reflexio prima fit ad ſpeculum XF, vti pa-
tet ex *num.*3.4.6. *propoſitionis præcedentis.* Cùm igitur ad ſpeculum XF non tergum ho- *Fig.* 21.
minis B ſed facies per hypotheſim conuerſa ſit, manifeſtum eſt per reflexionem primam, adeó- 22. 23.
que & per eam ſubſequentes deferri ad Oculum A ſpeciem non tergi, ſed faciei. 19.

At verò quia pro apparentiâ imaginum α, β, γ reflexio prima (vt patet ex *num.*6.7.8.)
fit ad ſpeculum ZE, cui tergum [a] obuertitur hominis B; liquet per reflexionem primam *Fig.* 24.
eamque ſubſequentes deferri ad Oculum A ſpeciem non faciei, ſed tergi, ac proinde imagi- 25.20.
nes in α, β, γ cerni auerſas ab oculo A, quæ in G, H, I, K ad eumdem conuerſa videbantur. a *per hyp.*
Quod erat propoſitum

PRO

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 18. Iiſdem poſitis, quæ in duabus præcedentibus: Dico conuerſas ad inuicem eſſe facies hominis B, & imaginis G, item facies imaginum α & H: β & I: γ & K: auerſas autem eſſe ab inuicem facies imaginum G & α: H & β: I & γ.

DEmonſtratio patet ex *præcedenti.* Nam per hyp. facies hominінis B eſt conuerſa ad ſpeculum XF, imaginis autem G facies ad Oculum [b] A, adeóque & ad ſpeculum XF. Ergo facies hominis B, & imaginis G ad inuicem conuerti neceſſe eſt. Rurſum cùm imago α ſit [c] auerſa ab Oculo A, imago autem H ad eundem [d] conuerſa, liquet eas eſſe conuerſas ad inuicem. Eodem modo idem patet de imaginibus β & I.

Deinde cùm imago G [i] conuerſa ſit ad Oculum A, imago autem α [m] auerſa ab eodem, liquet eas auerſas eſſe ab inuicem. Idem eodem modo patet de imaginibus H & β: I & γ.

b *per præc.*
c *per eand.*
d *per eand.*
i *per eand.*
m *per eand.*

PROPOSITIO XXXVII.

Fig. 18. Iiſdem poſitis, ſi obiectum B moueatur versùs ſpeculum XF. 1. Imagines G, H, I, K, L &c. ad Oculum A videntur accedere, 2. imagines verò α, β, γ, δ &c. recedere. 3. Accedunt ad inuicem obiectum B & imago G, item imagines α & H; β & I; γ & K, & ſic deinceps. 4. Ab inuicem recedunt imagines G & α: H & β: I & γ: K & δ.

Quod ſi obiectum B moueatur versùs ſpeculum ZE, omnia eueniunt contraria.

NImirum imagines G, H, I, K &c. recedunt ab Oculo A: imagines verò α, β, γ, δ &c. accedunt: ab inuicem autem recedunt obiectum B & imago G, imagines item α & H: β & I: γ & K &c. Accedunt ad inuicem imagines G & α: H & β: I & γ: K & δ &c.

Demonſt. Quoniam imago G determinatur interuallo FB tranſlato in FG, patet accedente obiecto B ad XF minui FG, adeoque G locum imaginis accedere ad XF, & ad Oculum A. Deinde quia loca imaginum H, I, K, &c. determinantur per duplicatum ſpeculorum interuallum EF tranſlatum ex G in H, & ex H in I, & ex I in K, & ſic deinceps; manifeſtum G, vt iam oſtendi, accedente ad XF, accedere etiam H, I, K, adeoque & imagines iſthic apparentes. Quod erat primum.

Quoniam verò loca imaginum α, β, γ, &c. determinantur per duplicatum ſpeculorum interuallum EF tranſlatum ex B in α, & ex α in β, & ex β in γ, & ſic deinceps, manifeſtum eſt, obiecto B accedente ad XF, hoc eſt recedente ab A Oculo, recedere etiam ab A, puncta ſingula α, β, γ, δ &c. adeóque & imagines iſthic apparentes. Quod erat alterum.

Deinde quia obiecto versùs XF moto, iam oſtendi imagines α, β, γ, δ, &c. recedere ab Oculo A, imagines verò H, I, K, L &c. ad eundem accedere, patet appropinquare ad inuicem imagines α & H; β & I: γ & K &c. Quod erat tertium.

Denique quia obiecto B moto versùs XF, imagines G, H, I, K &c. ad Oculum A accedunt, imagines verò α, β, γ, δ, &c. recedunt ab eodem, manifeſtum, eſt etiam recedere has ab illis, nimirum G ab α: H à β: I à γ, & ſic deinceps. Quod erat quartum.

Atque ex his facilè intelligetur omnia euenire contra, obiecto B moto versùs ZE.

AFFECTIONES PLANORVM SPECVLORVM INCLINATORVM, SIVE DE REFLEXIONE INTRA ANGVLVM.

Ad duo plana ſibi inuicem inclinata à puncto dato in punctum datum reflexiones contingunt, non quidem infinitæ, vt in planis parallelis, ſed tamen eò plures, quò ſub minori angulo plana concurrunt. Hinc ſi duo plana ſpecula ſibi mutuo ad angulum acutum ſtatuantur, Oculo vtrumque ſpeculum intuenti propriæ faciei ſiue obiecti alterius cuiuſcumque imagi-

nes

nes 14, imò 16 vel etiam 18 apparent quaſi in ellipſeos formam diſpoſitæ; cùm in parallelis vix ſex ſeptemúe videantur. In his enim quamuis, vt *prop.* 33. oſtenſum eſt, obiecti ſpecies infinities poſſit reflecti; tamen quòd repetitis reflexionibus ſpecies ſenſim debilitentur; neque viſus poſſit in vtrumque parallelum ſpeculum ſimul intendere, pauciores imagines ſitus parallelus exhibet, quàm angularis. Huius igitur phœnomeni ſanè peramœni cauſas aperiam, atque ita finem huic libro imponam.

PROPOSITIO XXXVIII.

Intra rectum angulum (A) vel obtuſum plures fieri reflexiones non poſſunt, quàm duæ. *Fig. 26.*

IN latus BA incidat radius FD ſub quocumque acuto angulo FDB.: acutus enim [a] ſit: oportet vt reflexio fieri poſſit in latus alterum AC. Quia angulus reflexionis ADE par eſt angulo incidentiæ FDB, etiam ADE acutus erit. Atqui A eſt rectus vel obtuſus. Ergo AED acutus eſt: cui cùm par ſit reflexionis angulus CEG, etiam ipſe acutus erit, ac proinde minor quàm A. Ergo radius EG non concurret cum latere AB. Quare plures in recto vel obtuſo angulo reflexiones haberi nequeunt, quàm duæ. a *per* 11. *Catop.*

PROPOSITIO XXXIX.

In duobus planis ſpeculis ad angulum rectum CAB conſtitutis, ſi Oculus exiſtat extra rectam lineam AQ quæ ab anguli vertice ducitur per punctum obiecti datum G, ſemper tres puncti dati imagines apparent, & non plures. *Fig. 27.*

POnatur Oculus extra rectam AQ, vbiuis inter ſpecula CA, BA, puta in F. In ſingulis ſpeculis CA, BA, puncti G apparere imagines ſingulas per reflexionem vnam patet ex *prop.* 13, *huius libri.* Supereſt vt exhibeatur & tertia. Ex puncto dato G ad ſpeculum CA ducatur perpendicularis GM: quâ æqualiter protractâ in I, ex I ad BA productam ducatur perpendicularis IN; eâque æqualiter productâ in X, ab X ad Oculum F ducatur recta XF, quæ (vt mox oſtendam) ſecabit neceſſariò AB, vltra A versùs B, puta in D. Ex D ad I ducatur recta DI ſecans AC in E. Dico puncti G imaginem tertiam conſpici in X ab Oculo F per reflexiones duas ad E ac D. Demonſtratum eſt *propoſ.* 27. *huius.* Quod autem XF occurrat ſpeculo AB ſic oſtendo. Ducatur XG ſecans rectam CE in O. Quia [a] GM, MI æquales ſunt, erit IG dupla MG. Quare cùm æquidiſtent IX CEO, erit vt [b] IG ad MG, ſic IX ad MO, adeoque IX ipſius MO dupla eſt. Atqui IX etiam dupla MA (cùm enim æquales ſint [c] IN, NX, erit XI dupla ipſius IN hoc eſt MA). Ergo MA, & MO æquales ſunt, ac proinde XG tranſit per A verticem anguli CAB. Ergo XF ſecat ſpeculum AB in D.

a *per conſtr.* b *per cor.* 2. *p.* 4. *l.* 6. c *per conſtr.*

PROPOSITIO XL.

In duobus planis ſpeculis ad angulum rectum poſitis, ſi Oculus (F) exiſtat in rectâ per A verticem & G punctum datum tranſeunte, duæ ſolùm poſſunt puncti G imagines apparere. *Fig. 28. 29.*

QVod duæ appareant patet ex *prop.* 13, *huius.* Tertiam non poſſe ſic oſtendo. Ex puncto dato G ad ſpeculum vtrumlibet (puta CA) ducatur perpendicularis GM; quâ productâ æqualiter in I, ex I ad alterum ſpeculum BA productum ducatur perpendicularis IN, quâ protractâ æqualiter in X, ab X ad Oculum F ducatur XF occurrens ſpeculo BA in D. Quoniam IM æqualis [a] eſt GM, erit IG dupla MG. Sed quia IX parallela eſt ad MO, vt IG ad [b] MG, ſic IX eſt ad MD. Ergo etiam IX dupla eſt MD. Atqui etiam IX dupla eſt MA (cùm enim [c] æquales ſint IN, NX, erit IX dupla IN, hoc eſt MA). Æquantur ergo MD, MA,

a *per conſtr.* b *per cor.* 2. *p.* 4. *l.* 6. c *per conſtr.*

MA, ac proinde XF tranſit per verticem A. Atqui deberet XF ſecare ſpeculum BA vltra A verſùs B, vt haberi poſſet imago tertia, quemadmodum patet ex diſcurſu præcedentis, & ex *prop. 27 huius.* Quare imago tertia hic eſt nulla.

PROPOSITIO XLI.

Acuto angulo & binis intra eum punctis poſitione datis, maximum numerum reflexionum, quibus puncta ad inuicem poſſunt reflecti, cùm primus radius in latus ſiniſtrum incidit, inuenire.

Fig. 30. ANgulus acutus eſto ZTϑ, & intra eum puncta poſitione data A, B; latera autem anguli vltra verticem producantur infinitè.

Conſtructio prima. Ex puncto A ad ZTλ latus anguli ſiniſtrum duc perpendicularem Aω, & extende in I, vt Iω ſit æqualis Aω. Ex I ad latus dextrum ϑTα duc perpendicularem Iβ, & extende in D, vt Dβ par ſit Iβ: & ſic deinceps alternatim ad anguli latera ZTλ, ϑTα perpendiculares æqualiter vtrimque productæ continuentur, vt DVL, LYF, FφN, NαH, donec veniatur ad aliquam Hψϑ, cuius producta ſemiſſis ψϑ intra angulum αTλ terminetur.

Ducatur deinde ex ϑ ad punctum alterum datum B recta occulta. Si ea latus anguli ZTλ ad quod vltima perpendicularis Hψϑ eſt ducta, ſecat ſupra verticem T verſùs λ, vt in hoc ſchemate contingit: Dico ſingulis perpendicularibus, demptâ vltimâ reſpondere, reflexionem vnam ad illud latus ad quod vnaquæque perpendicularis ſpectat: atque is maximus eſt reflexionum numerus, qui hiſce datis haberi poteſt.

Hæc demonſtro, vnáque reflexionum puncta ſingula, totamque adeò reflexionis viam exhibeo hunc in modum.

Conſtr. altera. Ex H extremitate perpendicularis NαH ducatur ad punctum B recta HB, ſecans latus anguli ϑTα in X. Tum ex N ad X ducatur NX, ſecans latus ZTλ in S. Rurſum ex F ad S recta FS, ſecans ϑTα in R: & ex L ad R recta LR, ſecans ZTλ in Q: item ex D ad Q recta DQ, ſecans ϑTα in P. Tandem ex I ad P recta IP, ſecans ZTλ in O; & ex O ad punctum datum A ducatur OA.

Dico reflexionum puncta eſſe O, P, Q, R, S, X totamque reflexionis viam ex A in B
a per conſtr. eſſe AOPQRSXB. Quod ſic oſtendo. Quoniam IOP eſt recta [a] linea, erunt ad verticem
b per 15.1. anguli IOω, [b] POT æquales. Sed in triangulis IωO, AωO latera Iω, ωO æquantur [c] lateri-
c per conſtr. bus Aω, ωO, & anguli ad ω ſunt recti. Ergo [d] angulus AOω incidentiæ primus æquatur
d per 4.1. angulo IOω, hoc eſt angulo POT primo reflexionis. Eodem modo IPβ [e] æquatur DPβ,
e per eand. hoc [f] eſt TPQ: & DQV æquatur LQV, hoc eſt TQR: & LRY æquatur FRY,
f per 15.1. hoc eſt ϑRS: & FSφ æquatur NSφ, hoc eſt ZSX: & NXα æquatur HXα, hoc eſt ϑXB. Quare cùm ad puncta ſingula O, P, Q, R, S, X incidentiæ ac reflexionis anguli ſint æ-
g per 3.1. quales, reflexio ex A in B fit [g] per viam AOPQRSXB. Atque ex hoc proceſſu manifeſtum
Catop. eſt, vt perpendicularium prædictarum quæcumque, adeóque & vltima Hψϑ nouum reflexionis punctum prioribus ſuperaddat, neceſſe eſſe, vt recta ab eius termino ϑ pertingens ad B, anguli latus, ad quod ipſa pertinet (nempe hic ZTλ) ſecet infra verticem T verſùs Z: quod quia in hac figurâ non contingit, tot hic erunt reflexiones poſſibiles, quot ſunt perpendiculares, demptâ vltimâ Hϑ, ſex nimirum in ſchemate præſenti.

Quod ſi recta procedens ex ϑ in B, ſecaret latus ZTλ (ad quod vltima Hψϑ perpendicularis eſt) infra verticem T, tot, & non plures, haberi reflexiones poſſent, quot fuêre perpendiculares deſcriptæ, annumeratâ etiam ipſâ Hψϑ intra angulum terminatâ. Quæ quidem ſuperiùs conſtructa ac demonſtrata expendenti erunt perſpicua.

PROPOSITIO XLII.

Iiſdem poſitis, quæ in præcedenti, inuenire maximum reflexionum numerum, primâ incidentiâ factâ in latus anguli dextrum ϑTα.

Fig. 31. EX puncto dato A ad latus anguli dextrum ϑTα ducatur perpendicularis prima AQ, & protrahatur in Q, vt CQ ſit æqualis AQ. Tum ex C ad latus ſiniſtrum ZTλ perpendicularis ducatur CR, producaturque in K, vt KR, CR ſint æquales: & ſic deinceps alternatim

tim ad latus dextrum ſiniſtrumque perpendiculares æqualiter vtrimque productæ deſcribantur KPE, EαM, MβG, donec veniatur ad aliquam Gπζ, cuius producta ſemiſſis πζ intra angulum αTλ terminetur.

Deinde ex ζ ad alterum punctum datum B ducta intelligatur recta linea: hæc ſi latus ZTλ, ad quod vltima Gζ perpendicularis exiſtit, interſecat infra verticem T, reflecti poterit A in B tot reflexionibus, quot perpendiculares ſunt ductæ: ſi interſecat ſupra T, tot haberi reflexiones poterunt, quot ſunt perpendiculares, demptâ vltimâ Gζ.

Demonſtratio quamuis ſit eadem, quæ præcedentis, iuuabit tamen claritatis causâ exhibere reflexionis puncta, quæ in caſu huius figuræ haberi poſſunt. Ex G ad B ducatur recta GB ſecans latus anguli dextrum δT in ω. Tum ex M ad ω recta ducatur Mω ſecans latus ſiniſtrum ZT in Y. Ducatur rurſum EY ſecans δT in V; & KV ſecans ZT in S; & CS ſecans δT in O, iungaturque demum OA. Dico viam reflexionis ex A in B eſſe AOSVYωB. Quod ex conſtructione per 4, & 15. *lib. 1. elem.* ſic oſtendes. AOQ æquatur COQ, hoc eſt TOS: & CSR æquatur KSR, hoc eſt TSV: & KVP æquatur EVP, hoc eſt δVY: & EYα æquatur MYα, hoc eſt ZYω: & Mωβ æquatur Gωβ, hoc eſt δωB. Cùm igitur ad ſingula puncta O, S, V, Y, ω incidentiæ & reflexionis anguli ſint æquales, reflexio ex A in B fit per viam AOSVYωB.

Corollarium ad duas præcedentes.

Quò datus angulus (FOG) acutior, eò plures haberi reflexiones poſſunt ex puncto dato in punctum datum. Quia plures duci poſſunt ad anguli latera alternatim perpendiculares, priuſquam veniatur ad aliquam quæ intra angulum dato ad verticem poſitum finiatur. *Fig. 34.*

PROPOSITIO XLIII.

Intra acutum angulum ZTδ punctis A & B poſitione datis, datum reperire numerum reflexionum, ſed maximo minorem. *Fig. 32.*

OPorteat ex. gr. punctum A reflectere ad punctum B per reflexiones tres.

Ex A ducatur perpendicularis Aω prima ad latus anguli ſiniſtrum ZT, æqualiter extenſa in I; & ex I ad δT perpendicularis ſecunda Iβ æqualiter protracta in D; & ex D ad ZT perpendicularis tertia DV æqualiter producta in L. Tum ex L ad B ducatur recta LB ſecans ZT in X; & ex D ad X recta DX ſecans δT in S; & ex I ad S recta IS ſecans ZT in R; iungaturque RA. Dico pilam ex A emiſſam in latus ſiniſtrum anguli ZT ſub angulo ARZ, peruenire in B viâ ARSXB per reflexiones tres factas in R, S, X. Demonſtratio patet ex diſcurſu duarum præcedentium.

Ducatur deinde ex A perpendicularis prima AQ in latus anguli dextrum δT, producaturque æqualiter in C; tum ex C ad ZT perpendicularis ſecunda CR æqualiter producta in K; ac demum ex K ad δT perpendicularis tertia KP, æqualiter extenſa in E. Deinde ex E ad B ducatur recta EB ſecans δT in Y; & ex K ad Y recta KY ſecans ZT in V; & ex C ad V recta CV ſecans δT in O. Dico Pilam ex A emiſſam. Sub angulo AOδ in latus anguli dextrum δT, peruenire in B viâ AOVYB per reflexiones tres factas in O, V, Y. Demonſtratio quæ ſupra. *Fig. 33.*

Eodem modo per duas perpendiculares habentur reflexiones duæ, & reflexiones quatuor per 4 perpendiculares, & reflexiones 5 per 5 perpendiculares: ac ſic deinceps.

Ex tribus præcedentibus propoſitionibus planorum ſpeculorum ſub acuto angulo ad ſe inuicem inclinatorum phænomena demonſtrabimus.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 34. Duo plana ſpecula ſe mutuo tangant ſub angulo acuto ZTδ, cuius latera vltra verticem ſint producta infinitè. Intra angulum ZTδ ſit poſitione datum alicuius obiecti punctum A: Oculus autem intra angulum ſit vbiuis in B.

Oporteat demonſtrare quot in binis hiſce ſpeculis puncti dati B imagines appareant: item loca imaginum, & quot ſingulæ reflexionibus videantur, exhibere.

Fig. 34. Conſtruct. Ex dato pũcto A ad anguli latera ZTλ, δTα, initio facto à latere ſiniſtro ZTλ ducantur alternis perpendiculares vtrimq; ſemper æqualiter protractę AαI, ID, DL, LF, FN, NH, donec veniatur ad aliquam Hθ, quæ terminetur intra angulum αTλ. Deinde incipiendo à dextro latere δTα ducantur ijſdem legibus perpendiculares AQC, CK, KE, EM, MG, donec rurſum ad aliquam veniatur Gζ, quæ intra αTλ angulum finiatur.

Fig. 34. *Dico I.* Quocumque loco intra angulum datum ZTδ Oculus conſtiterit, obiecti A tot imagines apparebunt, quot vniuerſim duci potuēre perpendiculares extra angulum terminatæ: loca autem ipſa imaginum in dextro ſpeculo δT apparentium, ſunt in C, D, E, F, G, H; loca apparentium in ſiniſtro ZT, ſunt in I, K, L, M, N.

a Fig. 30. *Demonſtrationis* initium faciam ab imagine vltimâ H. Inſpiciatur deinceps ſchema a aliud citatum in margine. Quoniam perpendicularis NαH terminatur extra angulum αTλ, vbicumque fuerit Oculus intra angulum datum, recta ex H ad Oculum ducta ſemper occurret, puta in X, ſpeculo Tδ, ad quod protractum ipſa NH erat perpendicularis; ac proinde (vt ex dictis *prop.* 41 patet) exhiberi poteſt reflexionis punctum X, reſpondens vltimæ perpendiculari NαH. Reperiantur deinde reliqua reflexionum puncta perpendicularibus cæteris inter ſe connexis NF, FL, LD, DI, IA reſpondentia, adeoque tota exhibeatur reflexionis via AOPQRSXB per *prop.* 41; cuius proinde conſtructio tota huc reuocanda. Quare eâ tota hîc

b per 4. 1. ſuppoſitâ, ſic vlteriùs ratiocinabimur. Quoniam IO, AO b æquales ſunt, & IOP eſt vna c recta,

c per conſtr. p. 41. ſpecies obiecti A ex A ita defertur ad Oculũ B per viam AOPQRSXB, ac ſi veniret ex I per viam IPQRSXB. Et ob eandem cauſam, ſic ex I, ac ſi veniret ex D per viam DQRSXB; & ex D, ac ſi veniret ex L per viam LRSXB; & ex L, ac ſi veniret ex F per viam FSXB, & ex F, ac ſi per viam NXB. Igitur à primo ad vltimum ſpecies puncti A ſic defertur ad Oculum B per

d per 12. 1. Catop. viam AOPQRSXB, ac ſi veniret ex N per viam NXB. Atqui ſi veniret ex N, appareret in d H concurſu radij reflexi XB cùm catheto incidentiæ NαH. Ergo etiam A apparet in H.

Fig. 34. Quod ſi per *prop.* 42, exhibeatur reflexionis via tota reſpondens 5 perpendicularibus inter ſe connexis GM, ME, EK, KC, CA, oſtendam eodem modo A apparere in G. Rurſus ſi per *prop.* 43. exhibeatur via reflexionis debita perpendicularibus 4, FL, LD, DI, IA, demonſtrabitur vt ſupra, punctum A apparere in F. Eodemque ratiocinio probabitur A apparere etiam in E, D, C. Ex quo proceſſu imagines in ſiniſtro ſpeculo ZT apparentes, N, M, L, K, I, haud difficile iam erit demonſtrare.

Dico II. Vnaquęq; imago per tot reflexiones apparet, quot ad ipſam vſq; ab obiecto perpendiculares inter ſe colligatæ exiſtũt. Quare in ſpeculo δT imago prima videtur per vnam reflexionem ob vnam perpendicularem AC: imago ſecunda D per reflexiones duas propter duas perpendiculares AI, ID; imago tertia E per tres reflexiones propter tres perpendiculares AC, CK, KE; quarta F per reflexiones 4 propter 4 perpendiculares AI, ID, DL, LF: & ſic deinceps. Atque eadem accidunt in altero ſpeculo ZT. Demonſtratio patet ex *prop.* 43. 42. 41.

Dico III. Cùm teipſum in duobus ſpeculis ad acutum angulum conſtitutis, intueris, conuerti ad ſe inuicem videntur tu & imago prima C; ſecunda D & tertia E; quarta F & quinta G; & ſic deinceps: auerſæ autem ab inuicem, prima & ſecunda, tertia & quarta, & ſic deinceps. Ratio patet ex aſſertione 2. & ex *prop.* 29.

Dico IV. Diſtantia vniuſcuiuſque imaginis ab Oculo æqualis eſt toti viæ reflexionis, quâ ad Oculum defertur.

Fig. 30. Exemplum demonſtrationis ſtatuamus in imagine H; idem quippe erit proceſſus in reliquis. Per *prop.* 41. reperiatur via AOPQRSXB, quâ ſpecies puncti A apparentis in H defertur ad Oculum B, & tota conſtructio ad hanc requiſita, hîc ſupponatur. Quoniam AO par

a per 4. 1. a eſt IO, additâ communi OP, erit AOP æqualis IP, hoc eſt DP. Ergo communi adiectâ PQ, erit AOPQ æqualis DQ, hoc eſt LQ. Additâ ergo rurſum communi QR, erit AOPQR par LR hoc eſt FR. Ergo communi adiectâ RS, erit AOPQRS par FS, hoc eſt NS: adiectâque iterum

Digitized by Google

iterum communi SX, erit AOPQRSX æqualis NX, hoc eſt HX. Quare adiectâ demum communi XB, erit tota reflexionis via AOPQRSXB æqualis diſtantiæ HB imaginis ab Oculo. Fig. 34.

Dico V. Si ex terminis ζ, θ perpendicularium intra angulum αTλ finitarum per T verticem dati anguli ducantur infinitæ θTO, ζTP, & Oculus ponatur inter ſpeculum ZT, & rectam TO; tunc præter imagines puncti A aſſertione primâ determinatas, apparebunt inſuper imagines in ζ & θ, & aliæ præter has nullæ.

Tum enim rectæ ex ζ & θ emiſſæ ad Oculum, interſecare poterunt ſpeculum TZ infra T: quod requiri ad imaginum apparentiam patet ex diſcurſibus iam ante factis.

Quod ſi Oculus ſtatuatur inter rectas TO, TP, præter imagines aſſertionis tertiæ apparebit inſuper tantùm vna in ζ.

Dico VI. Quò ſpecula ſub acutiori angulo conueniunt, eò plures eiuſdem obiecti imagines apparebunt. Ratio eſt quia tantò plures duci poterunt perpendiculares antequam veniatur ad aliquam, quæ intra angulum MON finiatur.

In angulo FOG graduum 11. quantùm eſt ex vi reflexionum apparere poſſunt imagines 31, quia totidem duci poſſunt ad anguli latera alternatim perpendiculares. Vide *fig.* 35. in quâ imaginum loca ſunt, 1, 2, 3, 4, 5 &c. *Fig* 35.

PROPOSITIO XLV.

Pilam in anguli acuti latus ita ex puncto intra angulum dato immittere, vt per datum numerum reflexionum, qui maximo non ſit maior, ad punctum idem redeat.

INtra acutum angulum FOG datum ſit punctum A; ex quo iuxta conſtructionem propoſitionis 44, ducantur ad anguli latera perpendiculares omnes, quæ ad determinandas reflexiones idoneæ eſſe poſſunt. Tum initio facto à latere GO numera perpendiculares coniugatas tot A1: 1, 2: 2; 3: &c. quot reflexiones deſideras, ex. gr. 13. Et ex termino vltimæ ducatur ad punctum A recta 13A, ſecans latus GO in C. Dico pilam ex A ſub angulo ACG immiſſam in latus GO, poſt reflectiones 13 rediturum in A. *Fig.* 35

Idem continget ſi numerentur perpendiculares coniugatæ 13 initio facto à latere FO, ductâque rectâ 13NA ſecante latus FO in N, pila dirigatur in latus FO ſub angulo ANF.

Demonſtratio patet ex ratiocinijs propoſitionum 43. 42. 41.

PROPOSITIO XLVI.

Pilam ex puncto intra acutum angulum dato (B) in latus anguli ita dirigere vt poſt aliquot reflexiones versùs anguli verticem peractas, eâdem viâ regrediatur. *Fig.* 36. 37. 38.

P. Guilielmus Boelmans meus olim in Mathematicis Magiſter ita conſtruebat.

Ab angulo recto SNP aufer toties angulum datum A, donec relinquatur XNP vel æqualis dato A, vel proximè minor. Ex dato deinde puncto B duc rectam BD, quæ cùm latere CA faciat angulum BDC æqualem angulo illi reſiduo XNP.

Dico pilam ſub angulo BDC in latus CD directam poſt aliquot reflexiones versùs A verticem factas, eâdem, quâ venerat, regredi viâ in B. [a] per 27. 1.

Demonſtr. Reflexio ſecunda contingat in E, ducaturque EM parallela ad AC. Angulus MED [a] æquatur angulo ADE, hoc eſt [b] BDC, hoc eſt [c] XNP: angulus autem YEM æquatur [d] angulo A, hoc eſt per conſt. XNT. Ergo totus YED, æquatur angulis PNX, XNT, hoc eſt toti PNT. Deinde ex tertio reflexionis puncto F ducatur FK parallela ad AY. Angulus EFK [i] æquatur AEF, hoc [m] eſt YED, hoc eſt [n] PNT: & KFD [o] æquatur dato A, hoc eſt [r] angulo TNV. Ergo totus EFD æquatur ipſis PNT, TNV, hoc eſt toti PNV. Eodem modo oſtendam quartum incidentiæ angulum FGE æquari angulo PNZ, atque b per 1. 2. Catop. c per conſtr. d per 27. 1. i per eand. m per 3. 2. Catop. n [illegible] o per 27. 1. r per conſtr.

Digitized by Google

CATOPTRICÆ

LIBER TERTIVS

DE

SPECVLIS CVRVIS.

CONVEXORVM SPHÆRICORVM AFFECTIONES PRÆCIPVÆ.

Reuocanda hìc ſunt ad memoriam, quæ dicta fuêre *prop.* 2. *lib.* 1. *Catop.* videlicet planum reflexionis (hoc eſt in quo peragitur puncti reflexio) rectum eſſe ad ſpeculum quodcumque, ac proinde ſi ſpeculum ſphæricum eſt, tranſire per centrum ſphæræ. Ex quo patet punctum incidentiæ centrum viſus, radios tam incidentem, quàm reflexum, centrum ſphæræ in vno eſſe plano ad ſpeculum recto. Adhæc circulum reflectentem voco eum, quo ſphæram ſpeculi interſecat planum reflexionis: quod quia per ſphæræ centrum tranſit, liquet reflectentem circulum eſſe maximum vnumque eius ac ſphæræ centrum exiſtere.

PROPOSITIO I.

In ſpeculis ſphæricis conuexis vnius obiecti vni viſui apparet imago tantùm vna.

Fig. 1.

ESto obiecti punctum B, viſus in A. Per 16. 1. *Catop.* in planis & conuexis ſpeculis ex puncto (B) ad punctum (A) reflexio fieri nequit à pluribus ſpeculi punctis quàm vno, ac proinde vnicus ſolùm eſt radius reflexus, puta CA. Quare cùm imago ſit in concurſu ª radij reflexi cum catheto incidentiæ BEF, neceſſe eſt vt imago quoque tantùm ſit vna, ex. gr. in D.

ª per 11. 1. Catop.

PROPOSITIO II.

Sola portio ſphæræ conſpicua radios ſibi incidentes poteſt ad Oculum reflectere.

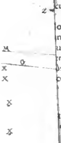
Fig. 2.

AB Oculo A ducatur radius AQT ſphæram contingens in Q, & alius AFL per centrum F. Si angulus TAF circa immobilem AFL circumagatur, tangens AQ determinabit portionem ſphæræ QNGSP conſpicuam Oculo A, cuius baſis eſt circulus QNSP à puncto Q deſcriptus. Dico hanc ſolam incidentes ſibi radios poſſe reflectere ad oculum A.

Sumatur in eâ punctum quoduis G, ducaturque AG; per quam ducto reflexionis plano, circulus reflectens eſto LQGS: hunc quia tangunt ex hyp. AQ, AS, patet ſecari ab AG. Alia igitur recta MR circulum tanget in G, efficiens cùm AB angulum MGB recto non maiorem, vt patet. Quare poterit illi ad partem alteram fieri æqualis RGB. Quoniam igitur

d Oculum A.
cuâ fieri poſſe

o ducti ſphæ-
ngente diuer-
uli TQH, æ-
rtingere non
ıs ad Oculum
ppoſitum.



tionibus infi-
exiſtens, re-



pecularis
nor

Per A & C-
ntingant in

D radium

uartâ parte

Quodlibet
BD, FD
hoc eſt
um quan-
tione pro-
O remo-
remotio-
o inciden-
à ſpeculo
æ. Ergo

16



a capiatur
heriam in
uoniam æ-
or * eſt an-
DI. Ergo
um igitur
A in ſpe-
hetto con-
IE. Ergo
nor quàm
at demon-

MD minor
inor quar-

PRO-

PROPOSITIO IV.

Sphæra ſpecularis per Oculum A & centrum F ſecta, reflexionis plano exhibeat circulum reflectentem DHD, cuius ac ſphæræ centrum ſit F, eumque tangant in Q ductæ ab Oculo rectæ infinitæ AQω. Eumdem circulum ex Oculo A ita ſecet recta ABD, vt intercepta BD ſit æqualis ſphæræ radio, ſiue lateri hexagoni. Deinde in arcus QD punctum quoduis C incidat cathetus infinita ZCF tangentem ſecans in K. *Fig.* 4. 5.

Dico catheti ZC partem KC non videri in ſpeculo, reliquam verò ipſius partem infinitam KZ partim intra ſpeculum, partim extra apparere.

Claritatis cauſâ propoſitionis partes ſingulas ſingulis aſſertionibus demonſtrabo. Sit ergo

Aſſertio I.

Dico CK omnino non videri.

Id verò ex corollario *prop.* 2. manifeſtum eſt; cùm enim CK exiſtat inter perpheriam QDL, & tangentem Qω, nullum eius punctum reflecti poteſt ad Oculum A.

Aſſertio II.

Ab Oculo A ad C ducatur recta AC reflectenti circulo occurrens in O, & ex centro F per O recta FOV; fiatque angulo VOA æqualis VOω. Concurret Oω cum CZ (vt mox oſtendam) alicubi in G. Intelligatur deinde ſic eſſe ducta APN, vt intercepta PN ſit æqualis FN, quam cadere vltra rectam AD versùs F mox oſtendam. *Fig.* 4.

Dico punctum G apparere in ipsâ ſpeculi ſuperficie, portionem verò catheti infinitam GZ apparere intra ſphæram, eiuſque imaginem eſſe CN, & minorem quartâ parte diametri.

Demonſtr. Quoniam OC [a] minor eſt quàm BD; hæc autem per hyp. par ſit radio FD, ſeu FC, erit OC minor quàm FC. Ergo angulus OFC minor eſt [b] angulo FOC, hoc eſt [c] VOA. Sed VOω eſt [d] æqualis ipſi VOA. Ergo etiam OFC minor eſt quàm VOω. Ergo Oω [i] concurret cum FC puta in G. Quod erat è præmonſtrandis primum. Ducatur deinde ex F per B recta FBX, & ex π, vbi ABD ſecat FC, recta πδ parallela ad FD. Quia igitur BD [m] par eſt radio FD, etiam Bπ [n] par erit ipſi πδ. Et quia æquales ſunt BD radiuſque FB, pares erunt [o] anguli BFD, FBD. Sed Fδπ [p] maior eſt quàm FBD. Ergo etiam Fδπ maior eſt quàm BFD, adeoque multò maior quàm BFπ, ſeu δFπ. Ergo Fπ maior [r] eſt quam δπ, hoc eſt (vt iam oſtendi) quàm Bπ. Ex quo patet rectam APN, quæ ſic eſt ducta vt FN interceptæ PN ſit æqualis, cadere vltra ipſam ABD versùs F. Quod erat è præmonſtrandis alterum. a per 15.3. b per 18. 1. c per 15.1. d per hyp. i patet ex 27 1. m per hyp. n per 4. 6. n per 5. 1. p per 32.1. r per 18.1.

His poſitis, oſtendam punctum G apparere in C, quoduis autem punctum infinitæ GZ imaginem habere in rectâ CN, & quoduis punctum rectæ GN imaginem eſſe alicuius puncti infinitæ GZ. Vnde conſequens erit infinitæ GZ imaginem adæquatam eſſe CN.

Quoniam angulus VOω, ſeu VOG æqualis eſt angulo [s] VOA; liquet punctum G [t] reflecti ad Oculum A viâ GOA, & radium reflexum eſſe OA: qui quia cum incidentiæ catheto GCF concurrit in C, apparebit G Oculo [u] A in C. s per hyp. t per 13. 1. Catop. u per 22. 1. Catop.

Sumatur deinde in infinitâ GZ punctum quoduis T, ductâque ex F centro per P rectâ FPR, fiat angulus RPM æqualis angulo RPA. Quoniam æquales [x] ſunt FN, PN, erit angulus PFN, ſeu RFN æqualis angulo FPN, hoc [z] eſt RPA, hoc eſt [a] RPM. Æquidiſtant ergo [b] PM, FGZ. Igitur TCF cathetus incidentiæ puncti T longiùs diſtat à viſu A quàm cathetus incidentiæ puncti cuiuſuis, puta M, in rectâ PM. Atqui ob æqualitatem angulorum RPM, RPA punctum M ad viſum A [c] reflectitur in P. Ergo T ad viſum A reflectitur à puncto aliquo B, quod ſit vltra P, vt facilè oſtenditur eo ratiocinio quo vſi ſumus *prop.* 17. 1. *Catop.* ſed tamen [n] citra O, à quo reflectitur punctum G. Ergo radius reflexus AB cum incidentiæ catheto TCF concurrit in π inter N & C. Ergo [m] T apparet in puncto π rectæ NC. x per hyp. z per 15. 1. a per conſt. b per 27. 1. c per 13.1. Catop. n per 17.1. Catop. m per 22.1. Catop.

Sumatur viciſſim in rectâ NC punctum quoduis π, ducaturque Aπ ſecans in B, ductâque

Digitized by Google

PROPOSITIO VI.

Iiſdem poſitis: ducta ſit FLV parallela tangenti AQω, ſecans ſpeculi circulum in L, & arcum DL qui interiacet lateris hexagoni terminum D ac punctum L, ſecet vtcumque cathetus infinita TSF tangenti occurrens in C. Dico partem SC non apparere: portionem verò reliquam CT infinitam apparere totam extra ſpeculum: poſtremò catheti VL apparere omnino nihil, *Fig. 7.*

QVod ad viſum A omnino nihil reflectatur, ſiue ex portione SC, ſiue ex catheto totâ LV patet ex *Coroll. prop.* 2.

Imaginem verò portionis infinitæ CT extra ſphæram apparentem ſic exhibeo. Ducatur ad contactum ex centro recta FQ. Quia rectus [c] eſt FQC, erit [k] FCQ acutus. Ergo [l] QC minor eſt quàm FC. Rurſum quia BD per hyp. æqualis eſt radio FS, & DE maior [m] quàm SE, erit BE maior quàm FE. Ergo ſi ducta ſic fuerit AP, vt interceptæ OP, FP ſint æquales, cadet ea inter rectas AQC, & ABDE. Dico CP eſſe imaginem adæquatam infinitæ CT. Demonſtrabitur vt propoſitio 5, vel vt aſſertio 2. *prop.* 4. c *per* 18. 3. d *per* 32. 1. l *per* 19. 1. m *per* 8. 3.

PROPOSITIO VII.

Quæ obiecta intra ſpecularem ſphæram appareant, quæ extra, determinare. *Fig. 8.*

PEr Oculum exiſtentem in A, & ſphæræ centrum F ducto reflexionis plano producatur circulus FECD, quem ab Oculo A tangant in P & Q rectæ infinitæ AI, AK. Tum ſic ducantur AD, AE, vt interceptæ BD, CE ſint æquales lateri hexagoni, ſiue radio FD. Ductis deinde per D, & Q cathetis infinitis FQN, FDM; inter has aliæ quotcumque deſcribantur FX, FX etiam infinitæ, ſecantes tangentem in punctis φ. Oſtenſum eſt *prop.* 4. *Aſſertione* 2. *&* 3. infinitas OX partim intra ſphærâ, partim extra apparere; & quænam illæ ſint, ibidem fuit determinatum. Partes igitur extra ſphæram apparentes ſint φG, φG. Per harum extremitates incedit curua linea verticem habens in contactu Q; quæ, quòd φG, φG fiant tandem [a] quauis datâ maiores, protenditur in infinitum: neque tamen cum rectâ infinitâ SM vnquam concurret quamuis illi ad interuallum quouis dato minus appropinquet, eò quòd SM, quæ infinita eſt, & per *prop.* 5. tota extra ſpeculum apparet, ſit terminus in quem apparentes extra ſpeculum finitæ φG ſemper creſcentes deſinunt. Similis porro ad partem alteram linea porrigitur PV. a *per aſſert.* 4 *p.* 4.

Dico I. igitur: puncta omnia versùs Oculum A citra curuas infinitas QG, PV exiſtentia apparent Oculo A intra ſphæram. Quæ verò ſita ſunt inter curuas infinitas QG, PV, & tangentes infinitas QI, PK, extra ſphæram apparent. Poſtremò quæ exiſtunt inter tangentes infinitas PK, QI, & arcum PαQ, omnino non apparent.

Demonſt. Sit primò quoduis punctum X inter curuam QG, & cathetum QN ductam per contactum, vel inter curuam PV & cathetum PR, atque à puncto illo X ducatur cathetus XGF. Per *aſſert.* 2. *prop.* 4. quâ geneſis curuarum prædictarum continetur, recta XG apparet viſui A intra ſpeculum. Ergo & punctum A. Accipiatur deinde, ſiue in cathetis infinitis QN, PR, ſiue in ſpatio inter ipſas conſtituto punctum quoduis H, ab eoque ducatur cathetus HBF. Per *prop.* 3. HB apparet intra ſpeculum, adeòque & punctum eius H. Ergo puncta omnia citra curuas infinitas versùs Oculum A conſtituta intra ſpeculum apparent: quod erat primum.

Sit deinde in ſpatio MSQG punctum quoduis ω, perque illud ducatur cathetus ωφF. Per *aſſert.* 3 *prop.* 4. recta ωφ apparet extra ſpeculum. Ergo & punctum ω. Rurſum intra angulum ISM vel in ipsâ SM, ſume punctum quoduis Z, à quo ducatur cathetus ZβF. Per *prop.* 6 vel 5, recta Zβ extra ſpeculum apparet. Ergo & punctum Z. Igitur puncta omnia inter curuam QG, & tangentem QI exiſtentia, extra ſphæram apparent. Atque idem eodem modo de exiſtentibus inter curuam PV, & tangentem PK demonſtrabitur: quod erat alterum.

Vltimum patet ex *Coroll. prop.* 2.

Dico II.

Digitized by Google

Scholium.

Quæ hactenus demonſtrata ſunt cum experimentis congruere euidenter comperies præſidio ampullæ, ſeu ſphæræ vitreæ tranſparentis. Imagines quippe obiectorum ab eius conuexa ſuperficie reflexas contineri intra ſphæram & quidem citra centrum manifeſtò conſpicies.

PROPOSITIO X.

Cur res in conuexis ſpeculis paruæ appareant.

CAuſa ex hactenus demonſtratis in promptu eſt. Quantauis enim fuerit longitudo obiecti, longitudo imaginis inter arcum ſpeculi & lineam DπE continetur, neque adæquare vnquam poteſt rectas ςπ, quæ ſunt radij ſemiſſe minores. Rurſum quantacumque fuerit obiecti latitudo, ex. gr. RN, latitudo imaginis continetur cathetorum extremarum RPF, NQF, ſegmentis Pζ, Qϑ. *Fig. 8.*

Poterit aliter propoſitio demonſtrari hunc in modum. Detur linea AB & Oculus Z in vno reflexionis plano, faciente in plano ſpeculo lineam reflectentem EF. Reflectatur autem ad viſum Z lineæ datæ extremitas A vià ACZ, & extremitas B vià BDZ. Tota igitur AB ᵃ reflectetur à tota GD, & viſus Z ſpectabit in plano ſpeculo lineam AB ſub angulo CZD. Deſcribatur deinde per puncta C, D, in eodem reflexionis plano circulus POQ. Linea AB ad viſum Z non reflectetur à toto arcu COD, ſed ab eius particulâ aliquâ OS; aliàs enim anguli incidentiæ & reflexionis æquales minimè poterunt obtineri; quod quidem facilè per ſeipſum demonſtrabit lector. Ergo AB à viſu Z in ſpeculo conuexo ſpectabitur ſub angulo OZS multò minori quàm CZD, ſub quo in ſpeculo plano ſpectabatur, ac proinde multò apparebit minor. Atqui in plano ſpeculo AB apparet tanta, ᵇ quanta directè viſa. Ergo in conuexo apparet minor quàm viſa directè. *Fig. 10.* ᵃ *per p. 18.1 Catop.* ᵇ *per 42. Catop.*

PROPOSITIO XI.

Cur recta in ſpeculis conuexis curua appareant.

RAtio eſt, quia ſpeculi conuexitas efficit, vt puncta, in quibus radij reflexi cùm incidentiarum cathetis concurrunt, in curuam lineam vel ſuperficiem diſponantur. Cuius rei demonſtrationi, cùm neque admodum ſit difficilis, & ob caſuum varietatem valde prolixa, non eſt animus immorari.

Sed neque illa hic deducere opus erit, in quibus conuexa ſpecula cum planis conueniunt: Cuiuſmodi ſunt partes imaginis obiecti partibus ordinatim reſpondere, ac proinde obiecta ſpeculo parallela non inuerti; item illa quæ *lib. 2. prop. 5. & 6* demonſtrantur de planis. Ea enim omnia ſunt eiuſmodi, vt per ſe quemuis illa haud difficulter aſſequi poſſe exiſtimem.

PORISMA.

Si ellipſis & circulus ſe mutuò tangant, recta quæ alterutram figuram in contactus ipſarum puncto tangit, vtramque tangit.

TAngant ſe ellipſis & circulus primò exteriùs in A, & circulum ibidem tangat recta CA. Dico hanc etiam tangere ellipſim. Si non; ergo CA producta ellipſim ſecet in A & S, ſitque vna recta CAS. Sumpto in arcu SA puncto quouis P, ab eo ducatur recta PA. Cadet ea intra arcum SPA. Sed arcus SPA totus extra circulum eſt, cùm ellipſis ponatur circulum contingere. Ergo etiam recta PA tota eſt extra circulum. Ergo inter SAC tangentem circuli & circulum cadit recta PA contra 16.3. Ergo circulum tangens CA producta ellipſim non ſecat, ac proinde illam tangit. *Fig. 11.*

Tangant

Fig. 12. 13 Tangant deinde circulus & ellipſis ſeſe inuicem interiùs. Si circuli arcus tangens DAE cadat intra ellipſim ducatur recta BC tangens ellipſim in A. Hæc à fortiori (quod aiunt) etiam circulum continget. Quod ſi ellipſeos arcus tangens DAF intra circulum cadat, ducatur recta circulum in A contingens. Multò magis eadem ellipſim continget. Liquet ergo propoſitum.

PROPOSITIO XII.

Data ſint duo puncta quæcumque O, Q, à ſpeculo ſphærico DAE, ſiue conuexo, ſiue concauo ad ſe mutuò reflexa. Si illis tanquam polis deſcribatur ellipſis ſpeculi circulum contingens in A: Dico reflexionis punctum eſſe A.

a per 48. 3. conic. Apol. b per 4. 1. Catop. DVcatur enim recta ellipſim contingens in A, iunganturque rectæ OA, QA. Erunt anguli [a] OAB, QAC ad ellipſis tangentem æquales. Sed per *Poriſma* recta BC etiam circulum EAD tangit in A. Ergo etiam anguli ad circuli tangentem OAB, QAC, æquales ſunt. Ergo puncta O, Q reflectuntur ad inuicem [b] à circuli ſpecularis puncto A. Quod erat demonſtrandum.

AFFECTIONES PRÆCIPVÆ SPHÆRICORVM CONCAVORVM.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 14. Speculi ſphærici caui maximus circulus eſto EOGX, ad cuius peripheriæ punctum A ex punctis B ac D in circuli plano poſitione datis, ductæ ſint rectæ BA, DA, ſecantes inſuper peripheriam in E & G.

Dico, ſi æquales ſint interceptæ à circulo EA, GA, puncta B, D reflecti ad inuicem à puncto A; non verò, ſi inæquales.

a per 27. 3. b per 29. 3. c per 4. 1. Catop. DVcatur enim recta FP circulum tangens in A, iungaturque EG. Si ponantur æquales AE, AG, etiam arcus [a] ANE, AOG, ideóque & anguli [b] AGE, AEG æquales erunt. Sed angulus AGE æquatur angulo FAE, & AEG ipſi PAG. Ergo etiam æquales erunt FAE, PAG, vti & NAE, OAG. Ergo [c] reflectuntur ad inuicem puncta B, D à ſpeculi puncto A.

Quod ſi dentur puncta B, X, per quæ ductis ad A rectis BA, XA, interceptæ EA, MA ſint inæquales, tunc inæquales erunt anguli AME, AEM: quibus cùm æquentur FAB, PAX, etiam hi erunt inæquales. Quare puncta B, X, non reflectuntur ad inuicem à puncto A.

Corollarium.

Vera eſt propoſitio etiam in conuexis. Vide *Fig.* 15.

PROPOSITIO XIV.

Centrum ſphæræ à totâ ſuperficie ſphæricâ in ſeipſum reflectitur.

a per 18. 3. OMnes enim radij è centro in ſuperficiem incidentes æquales vtrimque, nempe [a] rectos, cum tangentibus angulos efficiunt. Ergo per 1. 1. *Catop.* &c.

Inde fit vt Oculus in centro poſitus ſeipſum per totam caui ſpeculi ſuperficiem ſpectet, ſed confusè.

PRO-

PROPOSITIO XV.

Speculi ſphærici caui maximus circulus eſto ACFEG, eiuſque diameter CE, in quâ ſint puncta duo B, D, æqualiter remota à centro A. Dico hæc reflecti ad inuicem ab vno tantùm puncto ſemicirculi CFE, & ab vno ſemicirculi CGE. *Fig. 16.*

PEr centrum A ducatur diameter FAG perpendicularis ad CE, iunganturque BF, DF. Per 4.1. æquales ſunt anguli BFA, DFA. Ergo per 13.1. *Catop.* puncta B, D reflectuntur ad inuicem à puncto F. Eadem erit demonſtratio de puncto G.

Quod autem à nullo alio, ſic oſtendes. Sumatur quoduis aliud punctum P, ducanturq; BP, AP, DP. Item HI tangens circulum in P. Quia punctum P, cadit extra F, & DA, BA æquales: erit per Lemma ſequens angulus DPI maior angulo BPH. Ergo puncta D, B non [b] reflectuntur ad inuicem à puncto P. *b patet ex 3.1. Catop.*

Corollar. Ex his patet puncta B, D reflecti ad inuicem à totâ peripheriâ FOGQ, cuius diameter eſt FG, & ſolâ.

Lemma.

Datus ſit circulus NEM, cuius diameter NM; & à centro F æqualiter diſtent puncta G, H. Erigatur FE ex centro F perpendicularis ad diametrum. In NCEM ſumatur punctum quoduis extra E vt C, & ducantur CG, CH, item AD tangens circulum in C. *Fig. 17.*

Dico angulum DCH maiorem eſſe angulo BCG.

Ducantur enim ex H & G rectæ HD, GB perpendiculares ad AD & FC ex centro ad contactum. Erunt illæ [a] ſibi mutuo parallelæ. Et cùm angulus ACF [b] rectus ſit, angulus verò CFA [c] acutus quia cadit intra NFE; rectæ AD, NH concurrent verſus N, puta in A. Erit itaque DH, maior quàm BG. Sumatur in DH recta DI æqualis BG & iungantur CI. Cùm [e] GF ſit ad FH ſicut BC ad CD, erunt BC, CD æquales, quoniam GF, FH [f] æquales ſunt. Vti [f] etiam BG, DI. Et anguli ad B & D [g] ſunt recti: igitur etiam angulus BCG æquabitur angulo [h] DCI; qui cùm cadat intra DCH, erit DCI, hoc eſt BCG minor quàm DCH. Quod erat demonſtrandum.

a 29.1.
b conſt.
c conſtr.
e cor. p. 2.6.
f conſtr.
g conſtr.
h 4.1.

PROPOSITIO XVI.

Caui ſphærici maximus circulus eſto ACFEG, eiuſque diameter CE, in quâ ſint puncta B, D inæqualiter diſtantia à centro A, ducaturque diameter FG perpendicularis ad CE. Dico à nullo puncto ſemicirculi FCG, in quo eſt punctum à centro remotius B, reflecti ad inuicem puncta B, D. *Fig. 18.*

REflectantur enim, ſi fieri poteſt à puncto F, vel G, ducanturque BF, DF. Quia BA maior eſt quàm DA, fiat OA ipſi DA æqualis, iungaturque OF. Patet [d] æquales eſſe angulos OFA, DFA; ideóque BFA, DFA ſunt inæquales. Ergo B, D non [e] reflectuntur ad inuicem à puncto F vel G.

Sumatur deinde in ſemicirculo FCG quoduis aliud punctum P, ducanturque BP, AP, DP. Quoniam [i] obtuſus eſt angulus PAD, & DA minor quàm BA, erit DPA [m] minor quàm BPA. Ergo puncta D, B non [n] reflectuntur ad inuicem à puncto P. Ergo &c.

Vitello prop. 15. l. 8. Optic. paralogiſmum commiſit in demonſtratione huius theorematis: aſſumpſit enim radium AP eſſe maiorem quàm BP, cùm poſſit eſſe minor.

d ex 4.2.
e patet ex 13.1. Catop.
i per hyp.
m patet ex lem.
n 13.1. Cat.

PROPOSITIO XVII.

Iiſdem poſitis: ſi proportio BA ad DA fuerit æqualis vel maior proportione BE ad ED. Dico non poſſe à puncto vllo circumferentiæ CFEG, imo neque ab vllo cauæ ſuperficiei ſphæricæ reflecti ad inuicem puncta B, D.

Fig. 19. QVod puncta B, D non reflectantur ad inuicem à puncto vllo ſemicirculi FCG patet ex præcedenti. Sed nec reflecti à puncto vllo ſemicirculi FEG ſic oſtendo. Reflectantur, ſi fieri poteſt, ad ſe inuicem puncta B, D, à ſemicirculi FEG puncto quouis R, in quo circulum tangat OQ, occurrens diametro CE in K, ducanturque BR, AR, DR, & DQ parallela ad BR. Angulus igitur DRQ æquatur [o] angulo BRO. Sed ob BR, DQ parallelas, BRO æquatur ipſi DQR. Ergo DRQ, DQR æquales ſunt. Æquantur [p] ergo DR, DQ. Deinde quia puncta B, D reflectuntur ad inuicem à puncto R, æquales [q] erunt anguli BRA, DRA. Ergo eſt BA ad AD, [r] vt BR ad DR, hoc eſt (quia æquales iam oſtendi DR, DQ) vt BR ad DQ, hoc eſt vt [s] BK ad DK. Sed BA eſt ad AD in æquali [t] vel maiori proportione, quàm BE ad ED. Ergo etiam BK ad DK eſt in æquali vel maiori, quàm BE ad ED. Diuidendo igitur BD eſt ad DK in [u] æquali vel maiori, quàm BD ad DE. Quod eſt abſurdum. Quare puncta B, D non reflectuntur ad inuicem à puncto R, vel alio quocumque ſemicirculi FEG. Sed neque ab vllo ſemicirculi FCG: à nullo igitur totius circuli CFEG.

o per 4.1. Catop. · p per 6.1. · q per 13.1. Catop. · r per 3.6. · s per 4.6. · t per hyp. · u per 17. & 29.5.

Eodem modo oſtendam non reflecti à puncto vllo alterius cuiuſcumque maximi in ſphærâ circuli. Cùm igitur reflexio fieri debeat in [b] plano ad ſphæram recto, ac proinde in aliquo circulo maximo. Liquet puncta B, D non reflecti ad inuicem à puncto vllo ſuperficiei ſphæræ. Quod erat demonſtrandum.

b per 2.1. Catop.

Corollarium.

Ex demonſtratione patet, ſi puncta B, D reflectantur ad inuicem à puncto R, in eoque circulum tangat RK occurrens diametro in K, eſſe BK ad DK, vt BA ad AD.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 20. Iiſdem poſitis, quæ *prop.* 16. ſi ratio BA ad AD minor eſt ratione BE ad DE, puncta B, D reflectentur ad inuicem à duobus tantùm punctis circuli CFEG continentis punctum D centro vicinius, quorum vnum eſt in quadrante FE, alterum in quadrante GE.

a per 29.5. QVoniam BA maior eſt quàm AD, fiat SA æqualis DA, Cùm igitur ſit BA ad DA, ſeu SA in minori ratione quàm BE ad DE, etiam diuidendo erit [a] BS ad SA in minori, quàm BD ad DE. Fiat ergo vt BS ad SA, ſic BD ad DK, quæ neceſſariò maior erit quàm DE. Tum ex K ducatur recta circulum tangens in R, & arcui FR æqualis ſumatur GX..

Dico puncta B, D reflecti ad inuicem à punctis R & X tantùm.

Ducantur enim BR, AR, DR, & OAQ parallela ad KR, occurrens ipſis BR, RD, in O & Q. Quia BS eſt ad SA vt BD ad DK, erit compon. BA ad SA, ſeu AD, vt BK ad DK: & permutando BK ad BA, vt DK ad AD. Sed vt BK eſt ad BA, [b] ſic RK ad OA, & vt DK ad AD, ſic [c] RK eſt ad QA ob ſimilitudinem trigonorum RDK, QDA. Ergo RK eſt ad OA, vt RK ad QA. Æquantur ergo OA, QA. Deinde quia angulus ARK [d] rectus eſt, & OQ æquidiſtat RK, etiam RAQ, adeóque & RAO recti ſunt. Ergo [e] anguli ORA, QAR ſiue BRA, DRA æquales ſunt. Ergo puncta B, D reflectuntur ad inuicem [i] a puncto R. Idem eodem modo patet de puncto X.

b per 4.6. · c per eand. · d per 18.3. · e per 4.1. · i per 13.1. Catop.

Quod autem ab alio nullo, ſic oſtendo. Reflectantur, ſi fieri poteſt, puncta B, D à ſemicirculi FEG puncto quouis alio N (non poſſe enim à puncto vllo ſemicirculi FCG, patet

ex

ex 16) & circulum in N tangat NM. Igitur erit vt BA ad [m] AD, ſic BM ad DM. Atqui erat [n] vt BA ad AD, ſic BK ad DK. Ergo BM eſt ad DM, vt BK ad DK; & diuid. BD ad DM, vt BD ad DK. Quod eſt abſurdum. Non ergo &c.

m per corol p.17.
n per 2. part.

PROPOSITIO XIX.

Caui ſphærici maximus circulus eſto AYGHD, eiuſque diametri binæ quemuis angulum continentes CH, DG, in quibus ſumantur duo quæuis puncta X, Z. Dico ea non reflecti ad inuicem à puncto vllo arcuum CG, DH. Fig. 21.

PEr puncta data X, Z, ducatur recta IXZK. Si puncta X, Z reflecti poſſint à puncto aliquo arcus DH, reflecterētur vel à puncto K, vel à D, vel ab H, vel à medijs inter D & K; H & K. Quod non à puncto K, patet. Non etiam à puncto D, aliàs enim DXT [a] æqualis eſſet diametro DZAG contra 15. 3. Sed neque ab H; aliàs enim rurſus diameter CXAH æquaretur [b] rectæ YZH. Non etiam à puncto vllo E medio inter D & K; aliàs enim contra 15. 3. EXN à centro A remotior æqualis eſſet [c] rectæ EZV quæ centro vicinior eſt. Sed neque à puncto vllo L medio inter H & K; aliàs rurſum contra 15. 3. OXL centro A vicinior [d] æquaretur ipſi LZM remotiori à centro. Liquet igitur à nullo puncto arcus DH reflecti ad inuicem puncta X, Z. Idem eodem modo oſtenditur de arcu CG. Ergo &c.

a per 13.
b per eand.
c per eand.
d per eand.

PROPOSITIO XX.

Caui ſphærici maximus circulus eſto BCFD, eiuſque diametri binæ quæcumque CH, DG; in quibus duo quælibet ſumantur puncta X, Z æqualiter diſtantia à centro A, & angulum CAD bifariam ſecet diameter BF. Fig. 22.

Dico, ſi circulus tranſiens per A centrum & puncta X, Z, cadat intra ſpeculi circulum BGFD, vel eum tangat, puncta X, Z reflecti ad inuicem à duobus tantùm concauæ ſphæræ punctis B & F.

DVcantur rectæ XB, ZB; XF, ZF. Quia [a] latera XA, AB æqualia ſunt lateribus ZA, AB, & [b] anguli XAB, ZAB æquales; etiam XBA, ZBA equales erunt. Ergo puncta X, Z reflectuntur [c] ad inuicem à puncto B. Idem eodem modo patet de puncto F.

Quod non à pluribus quàm B & F, ſic oſtendo. Inprimis non poſſe à puncto vllo arcuum CG, DH patet ex præcedenti. Dubitari ergo tantùm poteſt de arcubus GH, CD. Sumatur igitur quoduis in illis punctum N, ducanturque XN, ZN, & AN ſecans circulum XAZ in O, & iungantur XO, ZO. Quia æquales [d] ſunt rectæ XA, ZA, etiam arcus [e] æquales erunt. Igitur [i] anguli XOA, ZOA æquales. Inæquales igitur ſunt [o] XNA, ZNA. Puncta igitur X, Z [n] non reflectuntur ad inuicem à puncto N. Igitur à nullis, præterquam à B & F.

a hyp.
b hyp.
c per 13.1. Catop.
d hyp.
e per 26.3.
i per 29.3.
o per lem.
n per 13.1. Catop.

Lemma.

Ad rectam DQ inæquales rectæ AC, BC conſtituant æquales angulos ACQ, BCQ. Si ad aliud eiuſdem rectæ punctum ducantur AD, BD, dico angulos ADQ, BDQ fore inæquales. Fig. 23. 24.

Quoniam inæquales ponuntur AC, BC, ſit BC minor quàm AC. Ductâ igitur rectâ AEB, liquet acutum eſſe angulum BEC. Quare ſi ex B ad DE perpendicularis ducatur, ea cadet intra triangulum BEC, ſecabitque EC, AC in O & I. Quoniam ergo æquales ſunt anguli BOC, IOC vtpote recti, & BCO, ICO per hyp. & latus OC vtrique triangulo commune, æquales erunt [o] BO, IO. In triangulus igitit DOI, DOB per 4.1. inæquales erunt anguli ODI, ODB. Ergo ADE, BDE inæquales. Quod erat propoſitum.

o per 26.1.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 25. **Ijſdem poſitis, ſi circulus per ſpeculi centrum A, & æquidiſtantia à centro puncta Z, X deſcriptus, ſpeculum ſecet (in M, P), Dico puncta X, Z, reflecti ad inuicem à punctis quatuor F, B, M, P; nec à pluribus.**

a hyp. b per 26.3. c per 29.3. d per 13.1. Catop.

SVppoſitâ conſtructione præcedentis, ducantur inſuper XM, AM, ZM, XP, AP, ZP. Quia æquales [a] ſunt rectæ XA, ZA, etiam æquales [b] erunt arcus, ideóque [c] & anguli XPA, ZPA, item XMA, ZMA, æquales. Puncta igitur X, Z, reflectuntur ad inuicem [d] à punctis P & M. Reflecti etiam à B & F oſtenſum in præcedenti. Ergo puncta X, Z reflectuntur ad inuicem à punctis quatuor. Quod autem non à pluribus, ſic oſtendo. In arcubus CD, GH (nõ enim poſſe à puncto vllo arcuum CG, DH patet ex 19) ſumatur quoduis punctum O diuerſum à punctis M, P, B, F, ducanturque rectæ AON, XO, ZO, XN, ZN. Quia æquales ſunt rectæ XA, ZA, adeóque & arcus [i] quos ſubtendunt, etiam æquales [m] erunt anguli XNA, ZNA. Ergo [n] XOA, ZOA inæquales. Puncta igitur X, Z non reflectuntur ad inuicem à puncto O. Ergo à nullis præterquam à dictis quatuor M, P, B, F.

i per 26.3. m per 29.3 n per lem.

Scholium.

Ex propoſitionibus 18, 20, 21 *perſpicuum eſt, quod in planis & conuexis ſpeculis non contingere* p.16.l.1 *oſtenſum fuerat, poſſe duo puncta reflecti ad inuicem à pluribus ſpeculi caui punctis, quàm ab vno. Reperire porro ac determinare reflexionum puncta illa, quando puncta ad inuicem reflectenda inæqualiter à centro diſtant, longiſſimi [a] laboris eſt, vſus verò prope nullius. Quare his omiſſis ad illuſtriores cauorum ſpeculorum proprietates me conuerto,*

a vide Alhaz. l.5. & Vitellonem l.8.

POSTVLATVM

AD SEQVENTIA.

In cauis ſpeculis obiecti punctum vnumquodque non alibi apparet, quàm in concurſu radij reflexi cum catheto incidentiæ.

IN planis & conuexis ſpeculis hoc demonſtraui *prop.* 22. *lib.* 1. *Catop.* atque ex eo ſpeculorum planorum ac conuexorum proprietates huc vſque deduxi. In cauis autem iſtud modò poſtulamus tantiſper, donec appareat, quouſque ipſius veritas ſe extendat.

PROPOSITIO XXII.

Longitudo perpendiculariter inſiſtens ſpeculo cauo ſphærico apparet poſt ſpeculum infinitè longa, quamuis ipſa neceſſariò ſemper radio ſpeculi minor exiſtat.

Fig. 26. CAui ſphærici maximus circulus eſto AFDG, in quo radius ducatur AD longitudinem ſolidam baculi aut calami repræſentans. Oculus ſit vbiuis extra diametrum, ſiue cathetum DAP, in Z. Producatur deinde radius, ſiue cathetus AD infinitè poſt ſpeculum, ſumaturque ex eo pars quantumuis magna DE.

Dico DE imaginem eſſe longitudinis radio AD minoris.

Ducatur enim ab Oculo Z ad punctum E; recta FZCE, ſpeculi circulum ſecans in F & C. Tum ex C aptetur in circulo recta æqualis ipſi FC. Non tranſibit illa per centrum A; aliàs enim FC æquaretur diametro CM contra 15.3. Neque cadet inter centrum A & Oculum

lum Z ex.gr. in COM; aliàs rurſum FC magis à centro diſtans, æquaretur COM minùs diſtanti contra eamdem 15.3. Reſtat igitur, vt ea cadat vltra centrum in BG, ac proinde ſecet radium AD, puta in B. Quoniam igitur æquales ſunt FC, GC punctum B reflectetur ad [a] viſum Z à puncto C, radiuſque reflexus erit CZ; qui productus quia cum incidentiæ catheto AD concurrit in E, punctum B [b] apparebit in E, adeóque BD, quam oſtendi neceſſariò eſſe radio minorem, apparet in ED, quantumuis magna. Quod erat demonſtrandum.

a per 13.
b per 22. 1. Catop.

PROPOSITIO XXIII.

Res ante ſpeculum diſtantes interuallo minore quàm radij, apparent diſtare poſt ſpeculum interuallo quantumuis magno.

IN maximo ſphærici caui circulo ACFG ducatur vtcumque radius AD, in quo poſt ſpeculum infinitè producto, ſumatur punctum quantumuis à ſpeculo diſtans E. Hoc [d] erit imago alicuius puncti (puta B) in radio AD. Idem eodem modo de infinitis alijs demonſtrabitur. Ergo &c.

Fig. 26.
d oſtendi prop 22.

Scholium.

Diſtantia ingens imaginum clariſſimè percipitur cùm inter obiectum & ſpeculum bacillus aut calamus longior interponitur. Tunc enim iuxta p.22. *bacillus, ſeu calamus apparet longiſſimus, & in eius termino obiecti imago conſpicitur. Idipſum clariſſimè cernitur in vitreo ſpeculo, cuius intima ſuperficies ſit concaua, extima verò plana. In eo quippe vnius obiecti duas ſimul imagines intueberis; vnam, quæ à planâ ſuperficie reflectitur, obiecto æqualem & dilutam: alteram, quæ reflectitur à ſuperficie cauâ, viuidam, ingentem, & multò longiùs diſtantem, quàm prima. Sed quia ob modicam anterioris ſuperficiei reflexionem imago prima valde diluta eſt, conueniet obiectum adhibere intensè coloratum, calamum ex. gr. album, aut flammulam candelæ; aliàs imago illa non apparebit.*

PROPOSITIO XXIV.

Cur obiecta in cauis ſpeculis tam prodigioſæ magnitudinis appareant.

CAui ſphærici maximus circulus eſto AODC, & in eius plano inter A centrum & ſpeculum alicuius obiecti longitudo, ſeu latitudo PN, quæ viſui poſito ex.gr. in Z, appareat poſt ſpeculum. Per extrema puncta P & N emittantur catheti infinitæ AR, AS. Per *p.*20. *lib.*1. *Catop.* puncta P, N, apparent in ſuis ſingula cathetis incidentiæ APN, ANM; & per *præcedentem* apparent in earum punctis valde diſtantibus poſt ſpeculum, puta in R, & S. Ergo lineæ PN imago eſt RS; quæ eò maior erit quàm PN, quò AR, AS magis excedent ipſas AP, AN. Cùm ergo poſſint AR, AS, eſſe quantumuis magnæ, etiam poterit quantumuis magna eſſe imago RS; quæ ſemper maior apparebit quia angulus RZS, ſub quo videbitur imago, ſemper magis magiſque excedet angulum PZN. Vnde patet intentum

Fig. 27.

PROPOSITIO XXV.

Imaginum poſt caua ſpecula apparentium partes ordinatim reſpondent partibus quas repræſentant.

NImirum vt in ſpeculis conuexis ac planis. Caui ſphærici maximus circulus ſit AODC, & recta in eo NP obiecti longitudinem ſpiſſitudinemq; repræſentans, & poſt ſpeculum apparens viſui Z in RS; per cuius extrema P & N catheti emittantur infinitæ. Quoniam igitur recta PN ponitur apparere poſt ſpeculum, neceſſe eſt poſt ſpeculum appareant etiam puncta P & N. Cùm ergo illa in ſuâ quæque catheto appareant, neceſſe eſt P apparere poſt ſpeculum in aliquo ſuæ catheti AN puncto R, & M in aliquo ſuæ catheti puncto S. Ergo

Fig. 27.

R eſt ad eaſdem partes, ad quas eſt punctum P quod repræſentat, & S ad eaſdem partes cum puncto à ſe repræſentato N. Ergo &c.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 28. Caui ſphærici maximus circulus eſto HBKA, à cuius puncto B ducantur infinitæ BE, BV, ſic vt æquales ſint anguli EBH, VBK. Ex centro A ſit AD parallela ad EB, quæ producatur infinitè versùs Z. Dico, ſi viſus exiſtat in rectâ BE, infinitam BZ imaginem eſſe rectæ BD.

SVmatur enim in infinitâ BZ punctum Q quantumuis diſtans poſt ſpeculum, & viſus ſit in C, ducaturque ex centro A recta AQ. Quia igitur AD æquidiſtat CBZ, ſecabit AQ ipſam DB in O. Quare cùm ex hyp. æquales ſint anguli OBK, CBH, punctum O reflectetur ad viſum C, à puncto B, apparebitque in Q vbi radius reflexus BC, & cathetus incidentiæ AOQ concurrunt. Ergo Q punctum quantumuis diſtans à ſpeculo, eſt imago puncti O. Ex quo patet infinitam ZB eſſe imaginem rectæ DB.

Ducatur deinde ab Oculo C per centrum A recta CAX, Dico rectam DX in ſpeculo non apparere.

Accipiatur enim quoduis in eâ punctum S, ducaturque per centrum cathetus SAE. Concurret illa cum radio reflexo BC in E poſt Oculum C, cui proinde punctum S non apparet. Ergo &c.

PROPOSITIO XXVII.

Poteſt imago extra cauum ſpeculum prodire vſque ad ipſum Oculum.

Fig. 29. CAui ſphærici maximus circulus eſto HBK, ex cuius puncto B ducantur infinitæ BR, BV ad æquales vtrimque angulos RBH, VBK. In harum alterâ BR ponatur Oculus in puncto C ad libitum remoto à ſpeculo. Tum ab Oculo C per A centrum ducatur CAX occurrens ipſi BV in X, & per centrum A ponatur TAY parallela ad BV.

Dico I. Infinita in XV apparere in YC. Sumatur enim in XV quoduis punctũ F, à quo per centrum A ducatur FAN: hæc, quia TAY eſt parallela ad BV, ſecabit BC vltra Y versùs C, non tamen vltra C. Secet ergo in N. Quoniam anguli NBH, FBK æquales ſunt, reflectetur F ad viſum C à puncto B, apparebitque in N, vbi radius reflexus BC & incidentiæ cathetus FAN concurrunt. Ergo F punctum quoduis infinitæ XV imaginem habet in rectâ YC. Sumatur deinde in rectâ YC punctum quoduis Q, à quo ducatur per A centrum cathetus QAI, quæ neceſſariò interſecabit rectam XV vltra X versùs V, puta in I. Ergo viſui C punctum I apparet in Q, ac proinde I punctum quoduis rectæ YC eſt imago alicuius puncti in infinitâ XV. Sed & oſtendi quoduis punctum infinitæ XV imaginem habere in rectâ YC. Ergo YC eſt imago adæquata infinitæ XV.

Dico II. Puncti G ſpeculo vicinioris imago longiùs prodit ante ſpeculum, quàm imago puncti remotioris F. Ductis enim cathetis FAN, GAP, IAQ, OIR, ex dictis *aſſert.* 1. patet Oculo C apparere F in N, & G in P, & I in Q, & O in R.

Dico III. Si gladius in ſpeculum cauum ſphæricum dirigatur ſecundùm rectam VXB, quò is propiùs ſpeculo admouebitur, eò longiùs acumen eius versùs Oculum C prodibit, & cùm acumen peruenerit in X, id in ipſum videbitur Oculum irruere. Patet ex *aſſertione* 1. & 2.

PROPOSITIO XXVIII.

Res vltra centrum caui ſpeculi conſtitutæ, ſi etiam viſus vltra centrum exiſtat, ſemper apparent inter centrum ac ſpeculum, & ſitu inuerſo.

Fig. 30. 31. CAui ſphærici maximus circulus eſto MBNA, vltra cuius centrum A ſit obiecti alicuius linea DE: ſit verò etiam viſus vltra centrum in Z. Vt punctum D reflectatur ad viſum

Z de

Z, debent [a] interceptæ à ſpeculi circulo (ex.gr.FC, CG) eſſe æquales: non poſſunt autem (vt ex 15.3.patet) æquales eſſe, ſi ambæ ad eaſdem centri A partes cadant. Neceſſe eſt igitur vt radius incidentiæ DFC cadat ad vnam centri partem, nimirum versùs MD, radius autem reflexus CZ ad partem alteram versùs NE. Quare incidentiæ cathetus DA occurret radio reflexo CZ vltra centrum A in P ad partem contrariam puncti obiectiui D. Eodem modo patet puncti E radium incidentiæ EB exiſtere versùs NE, reflexum verò BZ versùs MD, ac proinde incidentiæ cathetum EA occurrere radio reflexo BZ vltra centrum A in O ad partes MD contrarias puncti obiectiui E. Cùm igitur D appareat in concurſu P, & E in concurſu O, tota DE apparebit in OP inter ſpeculum & centrum A, ſitu inuerſo. Quod erat demonſtrandum.

a per 13.

PROPOSITIO XXIX.

Si viſus exiſtat inter centrum ac ſpeculum, obiecta vltra centrum conſtituta, quandoque apparent inter centrum ac ſpeculum ſitu inuerſo; quandoque poſt ſpeculum, ſed ſitu erecto.

CAui ſphærici maximus circulus eſto ASLG, in quo duæ ponantur æquales SC, FC. Erit igitur inter [a] has centrum A, per quod ducatur infinita LAT faciens cum SC acutum angulum LZC. Tum in LT ſumpto quouis puncto R, vltra centrum A ducatur per R perpendicularis ad LAR recta RD; cum quâ CF concurrat in D. Ex D autem cathetus ducatur DA occurrens ipſi SC in P, ponaturque viſus in Z.

Fig. 32.
a patet ex 15.3.

Quoniam igitur æquales ſunt FC, CS, reflectetur [b] punctum D ad viſum Z, à puncto C, apparebitque D in [d] P, vbi radius reflexus CZ & cathetus incidentiæ DA concurrunt.

b per 13.
d per poſtul.

Sumatur deinde arcus LB, æqualis arcui LC, & per B ac viſum Z ducatur BG. Erit ergo angulus BZL, par ipſi CZL, adeóque etiam acutus. Vnde recta OP eſt inter viſum Z & ſpeculum. Iam rectæ BG æqualis in eodem circulo aptetur BQ concurrens cum DR in E. Quia igitur æquales ſunt BG, BQ, liquet [i] E ad viſũ Z reflecti in B. Ductâ igitur catheto incidentiæ EAO, punctum E [o] apparebit in O, vbi radius reflexus BZ & cathetus EAO concurrunt. Linea igitur DE viſui poſito in Z inter centrum A ac ſpeculum BLC apparet inter viſum ac ſpeculum in linea PO, & ſitu inuerſo, quia D apparet in P, & E in O. Atque hoc erat primum.

i per 13.
o per poſtul.

Alterum verò, quamuis experientiâ non minùs certâ conſtet, quàm primum; nequit tamen ex poſtulato ſuperiùs aſſumpto demonſtrari: imò verò oppoſitum ex illo confici propoſitione ſeq. oſtendam. Quare veritas poſtulati, quod à prop.22. *hucuſque cum phænomenis egregiè concordauit, hic primùm deficit. Sit ergo*

PROPOSITIO XXX.

In cauis ſpeculis imago ſubinde apparet extra concurſum radij reflexi cum catheto incidentiæ.

VLtra A centrum caui ſpeculi ſit obiectum DE, à cuius extremitatibus ducantur catheti DA, EA; quæ ſi vltra centrum producantur, neceſſariò tendunt in partes contrarias punctis D, E. Itaque ſi quoduis punctum ſemper appareat in ſuâ catheto, non poterit obiectum DE vltra centrum A exiſtens, apparere poſt ſpeculum vmquam aliter quàm ſitu inuerſo. Si enim D appareat poſt ſpeculum in ſuæ catheti puncto N, & E in ſuæ catheti puncto M, liquet imaginem NM ſemper eſſe inuerſam. Atqui experientiâ certâ conſtat Oculo propè ad ſpeculum admoto (puta in Y) obiecta vltra centrum poſita apparere poſt ſpeculum ſitu alio. Ergo in cauis ſpeculis quoduis punctum non ſemper apparet in ſuâ catheto incidentiæ, ſed extra eam ſubinde, ac proinde extra concurſum radij reflexi cum catheto incidentiæ. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 32.

Errarunt igitur Alhazenus, Vitello, aliique Optici hos ſecuti, exiſtimantes vt in planis conuexiſque ſpeculis, ſic & in cauis numquam imaginem extra concurſum radij reflexi cum incidentiæ catheto apparere.

DE SPECVLIS VSTORIIS.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 33. In cauam ſphæræ portionem (FCG) gradibus 120 minorem radius incidens (EF) axi (DAC) parallelus, poſt reflexionem axi occurrit (in I) inter centrum (A) & verticem portionis (C).

a *def.* 10. MAximus ſphæræ circulus & ſimul [a] planum reflexionis eſto AEFG. Quoniam arcus FG eſt minor gradibus 120, eius ſemiſſis CF erit minor gradibus 60, ſiue tertiâ parte ſemicirculi CQD. Sed arcus ED, CF, vtpote inter rectas EF, DC parallelas conſtituti, æquales ſunt. Ergo etiam arcus ED minor eſt triente ſemicirculi. Ergo arcus EQF eſt triente maior, adeóque maior arcu FC. Quare ſi ducatur recta FC, ea minor eſt quàm EF. Igitur quæ ex puncto F aptabitur in circulo æqualis ipſi EF, propior eſſe debet [b] centro quam FC, ac proinde ſecabit axem inter centrum A & C. Sit ergo illa FS, axi occurrens in I. Quoniam igitur æquales ſunt EF, ES, liquet radij incidentis EF reflexum [c] eſſe FS, occurrentem axi in I inter centrum & verticem. Quod erat propoſitum.

b *per* 15. 3.
c *per* 13.

PROPOSITIO XXXII.

Inter radios axi parallelos, in cauam portionem ſphæræ minorem gradibus 120 incidentes, qui axi propinquior eſt, is maiorem axis partem reflexus abſcindet, quàm remotior; ſemper tamen minorem radij ſemiſſe.

Fig. 33. MAximus ſphæræ circulus eſto AEQFS, de quo ſumatur arcus FG minor gradibus 120, eoque biſecto in C, inde per centrum A ducatur CAD, quæ erit axis portionis ſphæricæ, cuius arcus eſt FG In arcum FG incidant radij EF, MN æquidiſtantes axi DAC, & poſiti in plano circuli AEQFS. Sit autem radij EF reflexus FI, abſcindens axis partem CI. Dico reflexum radij MN abſcindere partem axis CO, quæ maior ſit quàm CI, ſed minor ſemper ſemiſſe radij AC.

Demonſtr. Cùm æquidiſtent [a] EF, DC, erit angulus EFA par [b] angulo CAF, ſiue IAF. Sed [c] æquales ſunt anguli EFA, IFA. Ergo etiam IFA ipſi IAF æqualis eſt. Ergo triangulum FIA iſoſceles eſt. Eodem modo oſtendantur eſſe iſoſceles NOA. Iam quia MN eſt [d] propior axi quàm EF, arcus NC minor eſt arcu FC, ideóque [i] angulus NAO minor eſt quàm FAI. Quare cùm his oſtenſi ſint æquales eſſe ONA, IFA, etiam ſumma vtriuſque OAN, ONA, minor eſt ſummâ vtriuſque IAF, IFA. Ergo reliquus NOA [m] maior reliquo FIA. Cùm igitur Iſoſcelia triangula æquales habeant baſes NA, FA, ſi illæ ſibi mutuo imponantur, patet [n] angulum NOA cadere intra angulum FIA, ac proinde ſummam æqualium laterum NO, AO minorem eſſe ſummâ laterum æqualium FI, AI. Ergo vnum AO minus eſt vno AI. Ergo CO maior quàm CI: quod erat primum.

a *hyp.*
b *per* 27. 1.
c *per* 13 1. *Catop.*
d *hyp.*
i *per* 33. 6.
m *patet ex* 32. 1.
n *ex* 21. 1.

Deinde quia CO ſemper minor eſt [o] quàm NO, & NO oſtenſa eſt æqualis AO, etiam CO ſemper minor eſt quàm AO. Ergo CO ſemper minor eſt ſemiſſe radij AC: quod erat alterum.

o *per* 7 3.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 34. Portio caua ſphæræ 18 graduum omnes radios ſibi incidentes axi (DAC) parallelos reflectit in ſpatiolum lineare (BO) minus parte centeſimâ ſexageſimâ radij (AC), quod à puncto (B) biſectionis radij ad verticem portionis porrigitur.

MAximus ſphæræ circulus eſto AQG, in quo ſit datæ portionis arcus grad. 18, biſectus in C à portionis axe DAC, quod enim de h oc arcu demonſtrabitur, patebit pariter de

de portione ipſâ ſpeculi ex reuolutione arcus progenitâ. Sint autem in plano maximi circuli AQG radij ad axem paralleli MN, SP, qui reflexi occurrant axi in O. Ex præcedenti patet radios axi parallelos, qui inter hos extremos MN, SP incidunt, reflexos occurrere axi infra O & ſupra B punctum biſectionis radij, hoc eſt inter O & B; ac proinde omnes radios axi parallelos incidentes in arcum NP reflecti in ſpatiolum OB. Reſtat igitur vt oſtendam B-
O eſſe minus $\frac{1}{160}$ parte radij. Ducatur ex centro A recta AN. Quoniam MN, AC [a] æquidi- *a hyp.*
ſtant, erit angulus OAN [b] æqualis alterno ſibi MNA, hoc eſt [c] angulo ONA. Et cùm arcus *b per 27. 1.*
[d] NP ſit grad. 18, erit ſemiſſis eius NC, adeóque & angulus [e] OAN grad. 9; cui cùm par ſit *c per 13. 1. Catop.*
oſtenſus ONA, etiam hic eſt grad. 9. Ergo vterque ſimul eſt grad. 18: quos ſi auferas ex duo- *d hyp.*
bus rectis, remanet NOA grad. 162, cuius complementum ad duos rectos eſt NOC grad. *e per 33. 6.*
18. Sinus porro anguli NOA grad. 162, ſiue eius complementi NOA grad. 18, eſt 30901;
ſinus verò anguli ONA (quem oſtendi eſſe grad. 9) eſt 15643. Cùm igitur latera trianguli *o per probl.*
ſint inter ſe [o] vt ſinus angulorum oppoſitorum, erit AN ad AO vt 30901 ſinus anguli NO- *7 cap. 3.*
A. ad 15643 ſinum anguli ONA. Igitur quarum partium AN, ſiue AC eſt 30901, earum *Geo. pract.*
AO eſt 15643, & AB ſemiſſis ipſius AC eſt 15450; adeóque BO eſt 193: per quæ ſi diuidatur AC 30901, quotiens prodibit $160 \frac{21}{193}$. Ergo BO minor eſt parte centeſimâ ſexageſimâ radij AC. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Simili calculo reperies arcum FG graduum 40 radios ſibi incidentes axi parallelos reflectere in ſpatium minus $\frac{1}{31}$ parte radij: arcum verò grad. 60 in ſpatium minus duodecimâ parte radij: & ſic deinceps quò maior fuerit arcus, eò & focum (ita ſpatium appello, in quod radij per reflexionem conueniunt) fieri maiorem.

PROPOSITIO XXXIV.

Specula caua ſphærica Soli expoſita circa punctum, quo radius biſecatur, ignem accendunt.

SI ſpeculi axis CD dirigatur in centrum Solis, ob immenſam prope Solis diſtantiam erunt *Fig. 34.*
radij à Sole in ſpeculum euibrati quoad ſenſum ad CD paralleli, ac proinde omnes illi qui
incidunt in portionem ſpeculi NP grad. 18, reflectentur [i] in ſpatiolum BO minus parte ra- *i per præc.*
di AC centeſimâ ſexageſimâ, cuius initium ſit in puncto B, vbi radius biſecatur. Cùm igitur tantum lucis in locum tam anguſtum cogatur, intenſiſſimus ibi calor exiſtat neceſſe eſt. Vnde fit vt ſiquid eo loco combuſtibile ſtatueris, illicò exuratur.

Radios porro Solis eſſe quoad ſenſum parallelos manifeſtum ex ijs quæ *Aſtronomiæ lib.* 3. docuimus. Nam ſi educi ex Solis centro duo radij intelligantur, quorum alter tranſeat per centrum Terræ, alter eamdem tangat, continebunt illi angulum, qui Parallaxis Solis Horizontalis ab Aſtronomis appellatur. Hunc verò angulum nemo maiorem ſtatuit tribus minutis, nos autem probauimus non eſſe minuto dimidio maiorem. Quare licet hi radij diuaricentur ad amplitudinem ſemidiametri Terræ, quia tamen angulum adeò paruum continent, quoad ſenſum paralleli erunt. Cùm igitur radij ex Solis centro incidentes in ſpeculum, angulum adhuc multò minorem contineant, erunt illi multò magis quoad ſenſum paralleli, quod erat probandum.

Scholium.

Vt expeditè ignis accendatur, materia flammæ concipiendæ idonea foco præcisè applicanda eſt: ſi enim vel modicè à foco aberraueris, effectus erit nullus. Vt igitur applicatio fiat exacta, focum oportebit conſpicuum reddere excitando fumum aut pulueres; ſic enim luminis reflexi conus, eiuſq. vertex, ſiue focus clariſſimè apparebit.

PROPOSITIO XXXV.

Euclidis & veterum error circa focum ſpeculi caui ſphærici.

PVtarunt illi accendi ignem in centro, hoc inducti argumento. Omnes radij qui à Sole in ſpeculi centrum diriguntur, vltra centrum procedentes in ſpeculi ſuperficiem, perpendiculariter incidunt, ac proinde reflectuntur in ſeipſos. Ergo omnes reflexi in centro conueniunt. Ergo ignis in centro accenditur. Ita illi contra experientiam nunc quidem manifeſtam. Sed quia probationis vitium nemo oſtendit, iuuabit iſtud paucis hic aperire.

Angulus

Fig. 35. Angulus DAE, quem in ſpeculi centro efficiunt extremi radij ſolares DA, EA, eſt ille
a vide. ipſe, ſub quo Solem è terra conſpicimus. Hunc [a] Aſtronomi reperêre gradus circiter dimi-
Aſtron l 3. dij. Tantillus igitur eſt angulus DAE, & illi ad verticem oppoſitus BAC, adeóque & ſub-
c.ſ.nu. 31. tendens illum ſpeculi arcus BC, qui determinat luminis quantitatem radijs per centrum tranſeuntibus à ſpeculo exceptam, & in A centrum reflexam. Atqui luminis portio tantilla in centro collecta non poteſt ignem accendere. Patet igitur veterum paralogiſmus.

b per 34. Contra, lumen, quod radijs parallelis defertur, & colligitur circa punctum, quo radius biſecatur, portionem ſpeculi occupat [b] gradnum 18, ac proinde ſufficiens eſt vt cauſet vſtionem.

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 36. Portio caua (COBF) conoïdis parabolicæ omnes radios ſibi incidentes axi (CB) parallelos reflectit in axis punctum (A) diſtans à vertice (B) quartâ parte lateris recti: vbi proinde vehementiſſima vſtio.

PArabola conoïdem reuolutione ſuâ producens, ſit EBF; quod enim de hac oſtenderis, de conoide ipſa liquebit pariter. In parabolæ quoduis punctum O radius incidat axi parallelus & in parabolæ plano exiſtens DO, ducaturque recta OA. Parabolâ deinde contingat in O recta PI. Demonſtratum eſt à Vitellone aliiſque angulos ad tangentem DOI, AOP eſſe æquales. Ergo per 5. *lib.* 2. *Catop.* omnes radij DO æquidiſtantes axi reflectuntur in punctum A. Quare vſtionem fieri in A validiſſimam neceſſe eſt.

Corollaria.

1: *Speculum quod reflexione radios colligat poſt ſe, exhibere.*

Fig. 37. Proprium hoc eſt ſpeculis refractoriis: poteſt tamen etiam reflectentibus conuenire. Si enim à conoide parabolicâ EBF abſcindatur portio MBN continens focum A, reliquus tubus parabolicus radios axi parallelos poſt ſe colliget in A.

2. *Menſam trochorum conſtruere, in quâ globulus ſecundùm lineas lateribus parallelas impulſus ſemper annulum reflexus incurrat.*

Fig. 38. Fiat menſa terminata duabus parallelis AB, CD, & duabus parabolis AFD, AEC in quarum focis I, O, ſtatuantur annulus, & portula. Patet igitur globulum, ſi impellatur ſecundùm lineas GX, vel MQ, reflexum iri ſemper in focos I, vel O, ac proinde incurſurum ſemper in annulum vel in portulam. Quod erat propoſitum.

PROPOSITIO XXXVII.

Si flamma candelæ in foco caui ſpeculi ſphærici vel parabolici collocetur, totum ſpeculum quaſi ardens apparebit, & lumen ad ſpatium longiſſimum reflectetur eâ intenſione quæ ad legendum ſufficiat.

Fig. 41. LEgi ego libellum in diſtantiâ pedum circiter 400 à ſpeculo & candelâ, alio nullo adiutus lumine, quàm reflexo. Ratio eſt, quia cum radij paralleli DA reflectantur in focum C viciſſim etiam radij CA è foco egreſſi reflectuntur parallelè, totumque lumen è foco incidens in ſpeculum AB, cogitur in cylindrum ABDD. Quia tamen flamma candelæ foco maior eſt, non omnes radij ab eâ emiſſi in ſpeculum reflectuntur prorſus paralleli, ſed ad paralleliſmum propè accedunt: atque hæc eſt cauſa, quod figura luminis oppoſito muro excepti ſimilis ſit non ſpeculo, ſed candelæ.

PROPOSITIO XXVIII.

Poteſt reflexione lumen colligi ad diſtantiam à ſpeculo quantumuis magnam; non ſic tamen vt erat.

DVo ſunt modi præcipui. Primus per ſpeculum parabolicum. Poteſt enim deſcribi parabola habens latus rectum, adeóque & quartam lateris recti partem quantumuis magnam.
a per 37 Cùm igitur focus ſpeculi parabolici diſtet à vertice [a] quartâ parte lateris recti, poterit ab aliquo ſpeculo parabolico Solis lumen colligi in focum quantumuis diſtantem à ſpeculo. Non poterit tamen illud ad quamuis diſtantiam vrere, tum quia lumen reflexum ſenſim elangueſcit, tum propter nimium acumen coni Catoptrici, quo vim vſtionis diminui experientiâ conſtat.

ſtat.[i] Refert ſanè Kircherus noſter *pag.* 882 & 883 artis magnæ ſpeculo parabolico Manfredi Septalij ignem fuiſſe accenſum ad paſſus 15 vel 16 à ſpeculo, indifferenter videlicet à paſſu 15 vſque ad 16, ſed morâ longiuſculâ, quâ nimirum pſalmus *Miſerere* recitari poſſet.

Modus alter eſt eiuſmodi. Speculo parabolico AB radij paralleli DA, DB colliguntur in focum Q. Deinde tubulus parabolicus OP ita ponitur, vt eius focus congruat cum foco Q. Sic enim radij à ſpeculo AB reflexi in focum Q, inde vlteriùs progredientes à tubulo excipiuntur, à quo reflexi rediguntur in cylindrum OE, qui quò tubulus fuerit gracilior, tantò & ipſe gracilior erit propiuſque accedet ad lineam. Atque hæc eſt linea illa vſtoria, quâ nonnulli putauerunt ad quamuis diſtantiam poſſe ignem accendi. Verùm neque illa idonea eſt ad vrendum in diſtantiâ magnâ, nedum infinitâ. Nam præter duas rationes contra modum primum allatas, aduersùs hanc etiam tertia accedit, quod lumen duplici reflexione debilitatum ac fractum plurimum actiuitatis amittat. Fig. 42.

Corollarium.

Ex is patet non potuiſſe Catoptrico artificio Archimedem Marcelli naues ad tria ſtadia (vt refert Diodorus), vel ad tria paſſuum millia (vt alij volunt) diſtantes incendere. Credibile eſt à muro non vltra paſſus 30 abfuiſſe. Ita Kircherus loco ipſo diligenter à ſe inſpecto[i] opinatur. i *artis mag. pag.* 876.

PROPOSITIO. XXXIX.

Spherois caua radios omnes à polo vno egreſſos in polum alterum reflectit.

PVncta ex comparatione facta, ſiue poli ſphæroïdeos ſint A, B, ellipſis autem, quæ ſphæroïdem genuit, eſto COD, in quâ ex polis A, B ad perimetrum inclinentur rectæ AO, OB, ducaturque PQ tangens in O. Demonſtratum eſt angulos POA, QOB ad tangentem factos[b] æquari. Ergo[c] radij omnes AO egreſſi è polo A ab ellipſis perimetro reflectuntur ad polum B. Ex quo idem patet de cauâ ſuperficie ſphæroidis. Fig. 39. b 48, 3. *Con. Apol.* c *per* 5. 1. *Catop.*

Corollaria.

1. Si in polorum vno A ponatur flamma candelæ, lumen incidens in ſuperficiem totam ſphæroïdis colligetur circa focum alterum B; vbi proinde lumen exiſtet quidem vehementer intenſum: ſed ignem non exiſtimo accenſum iri, ob neceſſariam lucidi in A polo exiſtentis paruitatem. Fig. 39.

2. Tubum auditorium conficies ſi à ſphæroïde oblongâ & gracili AB tubum abſcindas ECDF, polos O & Q non continentem. Si enim os loquentis ponatur in polo Q & polus alter O in aure audientis, omnes radij ſonori in cauam tubi ſuperficiem incidentes reflectentur ad aurem in O. Fig. 40.

3. Si menſa trochorum conſtruatur formâ ellipticâ, & in polorum altero A annulus collocetur, in altero B globulus, is quamcumque in partem ad menſæ latera impingatur, incurret in annulum. Fig. 39.

4. Radius ex vno ellipſis polo procedens versùs maiorem axem, infinities reflectitur. Fig. 46.

Ex polo radius exeat AE: is reflectetur ad focum alterum B. Hinc pergens in F reflectetur ad focum A. Inde pergens in G reflectetur ad focum B. Ex B procedens in I reflectetur ad focum A, atque ita in infinitum.

PROPOSITIO XL.

Conoïs hyperbolica conuexa omnes radios[a] (PO) tendentes in focum (A) reflectit in conoïdis oppoſitæ focum (B): & conoïs hyperbolica caua omnes radios[b] (PO) tendentes in conoïdis oppoſitæ focum (B) reflectit ad focum ſuum (A). a *Fig.* 43. b *Fig.* 44.

EGregiè & primus id obſeruauit Marius Bettinus noſter Apiario 7, progym. 3: & mirum eſt ante illum nemini incidiſſe, cùm ex ex. *p.* 48. 3. *conic.* non minùs immediatè ac facilè deducatur pro hyperbolâ, quàm pro ellipſi.

Hyperbolam conoidis genitricem KSN in puncto O tangat recta CD, ducaturque BO. Quoniam radius incidens PO per hyp. tendit in focum A, & per conſtr. OB in focum B, erit angulus AOC æqualis angulo BOC. Sed AOC eſt par[d] ipſi POD. Ergo POD æqualis eſt BOC. Ergo radius PO tendens in focum A reflectitur[i] ad focum B. Quod erat primum. Fig. 43. d *per* 15. 1. i *per* 5. 1. *Catop.*

Tangat rurſus hyperbolam in O recta CD, ducatur OA. Quia radius incidens PO[m] tendit in focum B, & OA in focum[n] A, erit angulus AOC[o] par angulo BOC. Sed BOC æquatur Fig. 44. m *hyp.* n *conſtr.* o *per* 48 3. *Conic.*

s per 15.1. s per 5.1. Catop. quatur [s] ipſi POD. Ergò POD æqualis eſt AOC. Ergo radius PO tendens in focum B [s] reflectitur in focum A. Quod erat alterum.

Corollarium.

Fig. 45. Radius quiuis CE tendens in focum A inter oppoſitas hyperbolas versùs axem infinities reflectitur.

Nam quia CE tendit ln focum A, reflectitut in focum B, occurrens alteri hyperbolæ in S. Quoniam igitur radius ES tendit in ſocum B, reflectitur ln ſocum A, occurrens hyperbolæ in O. Rurſum igitur quia radius SO tendit in focum A, reflectetur ad focum B, & ſic deinceps in infinitum.

PROPOSITIO XLI.

Caua conoïs hyperbolica vrit non Soli expoſita, ſed igni.

Fig. 44. QVoniam ignem ſtruere poſſumus tam latè quàm voluerimus, & ſpeculum illi pro libitu admouere, manifeſtum eſt radios PO ab igne in ſpeculum emiſſos, & in oppoſitæ hyperbolæ ſocum B tendentes, poſſe magnam inſidere ſpeculi portionem VSX. Magna igitur quantitas caloris colligetur in foco A; quæ proinde poſſit ad vrendum ſufficere.

Contra accidet, ſi Soli ſpeculum obuertas. Cùm enim ob ingentem Solis diſtantiam extremi ſolares radij tendentes in focum B, angulum efficiant non maiorem gradu dimidio, exigua tantùm ſpeculi portiuncula ſolare lumen excipiet quod reflectat ad focum, adeóque luminis quantitas tam modica colligetur in foco A, vt ad vrendum minimè ſufficiat.

Corollarium.

Fig. 47. Conuexa conoïs hyperbolica ad vrendum minùs idonea eſt.

Niſi enim valde magnus ſit ignis, extremi radij EO, FO ab igne tendentes in polum A, modicam ſpeculi portionem intercipient, ac proinde caloris quantitas minùs parua reflectetur ad focum B. Multò adhuc minùs erit vſtioni aptum ſi Soli obuertas, vt patet ex dictis in præcedenti.

PROPOSITIO XLII.

Dantur ſpecula, quorum focus ſit linea recta, vel curua quæcumque.

SI portio caua circuli vel parabolę vnà cum foco motu recto deferatur, deſcribet ſuperficiem cylindricam, & focus rectam lineam. Manifeſtum eſt omnes radios parallelos in eiuſmodi ſuperficiem perpendiculariter incidentes, reflecti in totam lineam à foco deſcriptam. Quod ſi eadem illa portio circuli vel parabolæ cum ſuo foco circumagatur motu circulari vel elliptico vel alio quocumque, deſcribet ipſa ſuperficiem annularem cauam, focus autem lineam circularem vel aliam curuam pro motus ratione, ad quam omnes radij paralleli in cauam annularem ſuperficiem incidentes, reflectentur. Non vrent tamen lineæ iſtiuſmodi, quòd in ſingulis ipſarum punctis non niſi vnica luminis ſuperficies colligatur.

PROPOSITIO XLIII.

Fig. 48. Conuexa conoïs parabolica, imò & ſphæra conuexa radios (BO) tendentes in focum (A), axi (FA) parallelos reflectit.

a per 34. & 37. b per 4 & 5.1. Catop. c per eaſd. e per conſt. DVcatur COE parallela axi AF, & NM tangat ln O. Igitur EO [a] reflectitur ad focum A, radiuſque reflexus eſt OA, qui per hyp. ipſi DO eſt indirectum. Ergo anguli [b] EOM, AON, æquales ſunt. Ergo etiam æquantur illis ad verticem oppoſiti MOD, CON. Ergo radius DO tendens in A reflectitur [c] radio OC parallelo ad [e] AF.

FINIS CATOPTRICÆ.

ANDREÆ
TACQVET
E SOCIETATE IESV
ARCHITECTVRA
MILITARIS.

[illegible] Google

ARCHITECTVRÆ MILITARIS PARS I

DE MVNITIONE REGVLARI.

CAPVT PRIMVM.

Architecturæ Militaris Definitio, Initia, Progreſſus, Perfectio.

ARchitectura Militaris, eſt ſcientia locum quemcumque aduerſus vim hoſtilem aptè muniendi ac tuendi.

Vrbes atque Caſtella (inquit Vegetius) aut naturâ muniuntur, aut manu, aut vtroque. Naturâ aut loco edito ſiue abrupto, vel circumfuſo mari, ſiue paludibus vel fluminibus. Ciliciam Aſiæ, & Heluetiam Germaniæ montes circumiecti prope inacceſſas reddunt. Aornis petra, Herculis & Alexandri impetum eluſit. Arces Hermenſteniæ & Namurcenſis, pluresque per Europam alias, rupes ſubiectæ inuictas reddunt. Venetias, Straelſundam, Cuſtrinum, Hollandiamque prope omnem aquæ & paludes circumfuſæ tuentur. Natura igitur muniendis Vrbibus vel terræ elementum vel aquæ circumfudit. Naturam ars vt ſolet imitata, pro montibus ac ſaxis, muros ac valla, pro fretis paludibuſque foſſas ſubſtituit.

Sed, vt omnia rerum exordia ſolent, principio rudis admodùm & ſimplex fuit muniendi ratio. Muris oppida cingebant qui ad eam altitudinem attollebantur, quæ facilem hoſti per ſca- *Fig.* 1. las aſcenſum negatura videbatur. Latitudo erat tanta quæ ſenos, ſeptenoſue armatorum ordines caperet. Muros Babylonis refert Curtius fuiſſe latos 32 pedes. Verùm duplici vitio hæc ſtructura laborabat vtroque capitali. Primum erat quod defenſores ſupra murum ſtantes nullo munimento tecti, hoſti paterent. Alterum quod hoſtis muro propiùs ſuccedens ab ipſo muro tegeretur, vt lædi à defenſoribus in ſublimi ſtantibus non poſſet.

His erroribus ita deinceps occurrere conati ſunt. Murum perpetuâ Loricâ BCZ ſepie- *Fig.* 2. bant. Loricæ faſtigium pinnæ Z diſtinguebant non continuæ, ſed vacuis ſpatijs interruptæ. Pinnis tecti defenſores per interualla vacua hoſtem arcebant. Ita primus error vtcumque ſublatus. Vt alteri vitio mederentur, murum à ſolo ad altitudinem hominis certis interuallis P peruium relinquebant. Sed ne ſic quidem dicta incommoda perfectè tollebantur: cùm hoſtis intra triangula DEF, GKH oppidanorum tela effugeret.

Ergo ad defenſionem lateralem cœperunt reſpicere, retentis pinnis feneſtriſque, quadratas *Fig.* 3. turres quæ vltra muros prominerent, in orbem extruxêre, atque ita defenſioni directæ quâ priùs ſolâ vtebantur, lateralem vtcumque adiecêre. Sed lateralis defenſio illa adhuc erat imperfecta quòd hoſtis intra triangulum IPK receptus occultaretur. Præterea quadratæ turres non ſatis ferebant vim machinarum & arietum.

Reiectis igitur quadratis turribus, rotundas ſubſtituêre, ita ACB triangulum quo hoſtis *Fig.* 4. occultatur, multum fuit imminutum, vt iam intra illud nequiret hoſtis arietarias machinas diſponere: & rotunda turrium forma firmior quâuis aliâ aduersùs arietantium impetus ſubſiſtebat. Hic veterum ars & conatus conquieuit, donec nitrico puluere reperto, fabricare homines fulmina, & tonitrua imitari didicerunt. Et erat ſane iſta muniendi ratio prioribus longè anteferenda. Nihilominus adhuc negotium faceſſebat ſuſpectum illud triangulum ACB quod ſatis capax erat vt muri ſuffoſſores & cunicularios occuleret. Deinde lateralis defenſio FC, DC vnicum tantùm turris rotundæ punctum ſtringebat B, A, quòd rotunda corpora à rectis lineis non niſi punctualiter tangi poſſint.

Vicit tandem ſeipſam ars, atque eam quâ modò vtimur, defenſionis formam adinuenit. Rotundas turres in propugnacula Faciebus, Aliſque inſtructa, muros in Valla commutauit; rectiſque lineis Munimentum omne circumſcripſit. Ita denique effectum eſt vt quocumque hoſtis loco conſiſteret propugnatorum telis pateret, atque omnes munitionis partes ſe mutuo tutarentur.

[illegible] by Google

31. Forma regia mediocris dicitur, cuius Defenſio figens minor eſt iactu muſquettæ. Sed diſtantia propugnaculorum maior.
32. Forma regia minor eſt cuius diſtantia propugnaculorum æquat iactum muſquettæ.
Reliqua minora vocantur Castella : *Forts*.
Terminos Orthographicos explicabimus infra *cap.* 7.

CAPVT III.

Munitionum Canones.

I. Finis Munimenti eſt, vt pauci multis reſiſtant.

II. Munimenti ea forma ſit oportet, vt ſingulæ eius partes præter defenſionem directam quam ſibi præſtant, etiam lateralem ſeu obliquam accipiant ab alijs.

III. Singulæ igitur Munimenti partes & ſtringi debent & ſtringere.

Ratio ſtrictionis ſeu defenſionis hęc eſt; Facies quę debiliſſima munimenti pars eſt, defenditur ab Alis propugnaculi & Cortinæ, quin & à Facie oppoſitâ, Alæ propugnaculi à Cortinâ. Cortina ab Alis. Vide *fig.* 5.

IV. Defenſio quò breuior & obliquior, eò fortior & certior. *Fig.* 6.

Eò porrò obliquior eſt defenſio, quò angulus decuſſationis GTH eſt acutior. Vide *fig.* 6.

V. Defenſio Figens BG, AH non excedat iactum muſquettæ, hoc eſt 750 aut 720 pedes. *Fig.* 6.

Longius quidem glans defertur, ſed non ad ſcopum. Figens inter omnes Munimenti lineas princeps eſt, cæterarumque magnitudines ipſa determinat.
Nota. Dum pedes nominantur ſemper intelligi Rhynlandicos.

VI. Curandæ præ cæteris defendentes, ſiue præſides Munimenti partes. Hæ quantum fieri poterit augeantur.

VII. Iuſtæ igitur magnitudinis ſint Alæ propugnaculorum, & præter eas quàm maximæ fiant Alæ in Cortinâ.

Longè enim fortius eſt Munimentum, quod ſaluis eſſentialibus alijs Alas etiam habet in Cortinâ.

VIII. Cortina ſit iuſtæ longitudinis: ſuperet Faciem, imò & Alas propugnaculorum iunctas.

Quia fortiſſima eſt Munimenti pars.

IX. Angulus propugnaculi ſit par violentiæ tormentorum. Vnde non ſit minor 60 gradibus.

Talem ſufficere vſus docuit.

X. Rectus propugnaculi angulus optimus eſt. Is tamen vt habeatur, Ala Cortinæ non omittenda aut nimium decurtanda.

XI. Angulus Alæ & Cortinæ ſemper rectus eſto.

Ità tam Cortina quàm Facies latiùs, ac proinde certiùs commodiùſque ſtringitur, & Faciei ac Alæ angulus fit maior ideoque robuſtior.

XII. Linea Colli ſit ſpacioſa.

Ne aliàs coarctetur propugnaculum.

XIII. Propugnaculi quantitas ea ſit quæ ſufficientem armatorum numerum capiat, & ſatis præbeat ſpatij ad tormenta dirigenda cæteraque militaria munia obeunda.

Digitized by Google

ad duodecangulum vſque, iacturâ. Neque dubium eſſe poteſt quin iſta methodus ſit illâ alterâ multò præſtantior, cùm & propugnaculi angulo ſatis caueat, quem numquam 60 grad. minorem facit & Facierum defenſionem augeat ſæpe plus quàm in duplum.

Canonis *octaui*, qui Cortinam iubet iuſtæ longitudinis eſſe, ratio in promptu eſt, quæ & in ipſo canone inſinuatur, quod nimirū inter omnes Munimenti partes validiſſima ſit Cortina. Nam cæteris partibus ab hoſte remouetur longiùs & inter duo propugnacula poſita fortiſſimè defenditur. Eſt verò rationi conſentaneum firmiores munitionis partes, debilioribus eſſe longiores. Ne tamen Cortinam ita extenderis vt Linea Figens iactum muſquetæ ſuperet, quod canoni *quinto* repugnat. Aptiſſima proportio ea erit ſi in Formâ Regiâ aut 432 pedes ei dederis cum Dögeno, Fritachio, aliiſque, aut 480 cum Goldmanno.

Nono & decimo Canone de propugnaculi angulo ſtatuitur, & cæteris paribus rectus præfertur non rectis.

Pro Canonis ratione notandū eſt angulos rectum & obtuſum perpendicularibus tormentorum ictibus ſe totis reſiſtere, acutum verò non ſe toto. Eſto propugnaculum [a] rectangulum FOBQP; Acutangulum [b] MLHDB. A tormentis poſitis in R incidant globi [c] in BO Faciem propugnaculi rectanguli FOBQP per rectas perpendiculares RB, RS. Quoniam igitur ex hypotheſi duæ rectæ RB, BQ perpendiculares ambæ ſunt ad BO in eodem puncto B per 14. l. 1. *Eucl.* conficient vnam rectam lineam RBQ. Vnde patet rectanguli propugnaculi latus BQ ſe toto obijci ac reſiſtere ictui perpendiculari RB. Ac proinde propugnaculum rectangulum reliquis ictibus perpendicularibus omnibus RS ſe toto reſiſtere. a *Fig.* 7. b *Fig.* 6. c *Fig.* 7.

Idipſum à fortiori patet in obtuſangulo. At in [d] acutangulo MLHDB, ictus perpendiculares SH, SQ protracti breui ſpatio intra propugnaculum cadunt, adeóque non ſe totâ illis propugnaculi moles obijcitur. Vnde recto & obtuſo acutus angulus debilior erit. d *Fig.* 6.

His notatis, manifeſtum eſt cur rectus angulus acuto præferatur cæteris paribus; cur verò etiam obtuſo habeatur potior, hę ſunt cauſæ. Prima quòd retentis iiſdē Alis [e] QP, OF & lineis Colli PE, FE propugnaculum reddatur anguſtius, quod Canoni 13 ſæpè incommodat, angulus verò PQB Humeralis fit tanto minor. Altera & præcipua quòd quò angulus eſt obtuſior, eò Ala Cortinæ fiat minor, aut etiam tota pereat. e *Fig.* 7.

Itaque quantum fieri poterit, rectus angulus aut recto proximus propugnaculo dandus, ſic tamen vt pars altera *noni* Canonis non negligatur, quæ vetat ne anguli recti ſtudio Ala Cortinæ corrumpatur. Quoniam igitur in hexagono figuriſque ſequentibus vſque ad duodecangulum rectus propugnaculi angulus Cortinæ Alam euertit, conſultiùs arbitramur cum pleriſque huius æui celebrioribus Architectis aliquid de angulo propugnaculi, ſaluâ nihilominus eius debitâ firmitate, detrahere, quàm carere Alâ Cortinæ, cum tanto defenſionis imminutæ præiudicio. Barleduc aliique oppoſitum ſecuti ſunt, ſed eos experientiâ rerum magiſtrâ plerique iam edocti deſeruêre.

Reliquorum Canonum ſenſus & ratio ſatis perſpicua ſunt, vt non egeant vlteriori explicatione.

CAPVT V.

Munimentorum regularium conſtitutio.

DEfinitionibus principiiſque ſcientiæ iam expoſitis, ad rem ipſam accingamur. Vt conſtitutio Munimenti inueniatur, aliqua dari debent. Ea verò data hîc dicuntur quæ pro arbitratu accipimus ſic vt nullum vel ab altero dependeat, vel alteri præiudicet. Iam ex datis ſemel conſtitutis reliquarum partium proportio conſequitur certa & determinata pro datorum videlicet ratione. Igitur periti Architecti hæ partes erunt, vt ea data ſeligat quæ cùm regulis *cap.* 3 & 4 ſtatutis & conueniant ipſa & reliquas partes à ſe pendentes faciant conuenire. Porrò quia ea data variari poſſunt ſaluis decretis Munitionum, varia quoque erit Munimentorum conſtitutio. Sex probatiſſimos ſeligo & propono. Proportio linearum omni Formæ ſeruiet, quantitas ſoli Regiæ. *Fig.* 6.

MODVS PRIMVS.

EſT *Goldmanni*. Facies ſemper Cortinæ eſto dimidia, in quocumque angulo.

Chorda ——— 480 ped.
Faces ——— 240.
Ala in IV } angulo { 60 ped. hoc eſt $\frac{1}{4}$ Faciei.
in V } angulo { 80 ped. hoc eſt $\frac{1}{3}$ Faciei.

In reliquis vſque ad IX ſemper 10 adduntur pedes, donec in nonangulo Ala fiat pedum 120, hoc eſt $\frac{1}{2}$ Faciei, quæ deinde Alæ quantitas in omnibus figuris ſequentibus retinetur.

Angulus propugnaculi conſtet ex ſemiſſe anguli figuræ auctâ 15 gradibus. Igitur erit.

Grad.
In IV 60
in V 69
in VI 75
in VII 79. 17′.9″.
in VIII. 82. 30′.
in IX. 85.
in X. 87.
in XI. 88. 38′.11″.
in XII. 90, ſiue rectus qui deinde in figuris ſequentibus retinetur.

Ex his datis reliquarum proportio exoritur quam Tabella ſubiecta exhibet.

	Radius	Capit.	Collum.	Ala 2.	Figens.
IV.	494.5.5.8.	172.6.9.9.	109.7.0.6.	256.0.7.7.	722.2.2.2.
V.	595.2.9.3.	197.9.1.1.	109.9.0.2.	254.0.8.7.	724.1.5.7.
VI.	713.4.8.6.	209.9.7.6.	116.7.5.3.	262 7.2.1.	724 9.0.9.
VII.	833.8.5.8.	222.0.5.6.	121.7.9.3.	262.0.1.1.	726.2.5.4.
VIII.	955.6.6.1.	233.9.6.4.	125.7.1.3.	256.9.4.2.	728.0.7.4.
IX.	1078.5.0.8.	245 6.2.8.	128.8.7.0.	249 4.8.2.	730.3.1.7.
X.	1212.6.0.7.	246.5.9.2.	134.7.1.7.	258 9.8.8.	729.6.3.3.
XI.	1347.0.8.3.	247.5.4.3.	139.5.2.1.	266.3.2.1.	729.0.3.5.
XII.	1481.8.8.6.	248.4.6.0.	143.5.4.0.	272.1.5.4.	728.5.1.5.

In hac Tabellâ numeri ante punctum ſunt pedes Rhynl., tres reliqui ſunt 10ᵃ. 100ᵃ. 1000ᵃ. *pedis.*

In primo igitur modo præter ſpeciem figuræ dantur quatuor Chorda, Facies, Ala, Angulus propugnaculi & conueniunt cum Canonibus, tum ipſa, tum cætera ex ipſis conſequentia Collum, Ala Chordæ, Defenſio, Figens & ſtringens &c. quod ita ſe habere comperies ſi harum partium ſingularum quantitates ex datis trigonometriæ ſubſidio elicueris, de quo *cap. ſequ.* Hic duo tantum inſinuo; Alam Chordæ eo modo fieri maximam ſic vt ſemiſſem Cortinæ ſemper ſuperet; & lineam Colli numquam non 100 pedes excedere.

MODVS SECVNDVS.

Eſt Dogeno 1. Facies 24 perticarum, hoc eſt 288 pedes Rhynl.
Cortina 36 perticarum.

Proportio igitur Cortinæ ad Faciem ſemper eſt ſeſquialtera, vt 3 ad 2: quod in omnibus modis ſequentibus obſeruatur.

Angulus determinans Alam ſemper 40 grad.

Angulus propugn. ſemiſſis anguli Figuræ, aucta 15 gradibus, vt in modo primo.

Conſentiunt in angulo Propugn. Goldman, Marolois, Fritach.

Nota. Pertica quâ deinceps vtimur continet 12 pedes Rhynland.

MODVS TERTIVS.

Eſt Dogeno 2. Differt à ſecundo in ſolo dato vltimo: aſſumit enim angulum Propugnaculi parem duabus tertijs anguli Figuræ. Igitur erit

In IV. 60 grad.
in V. 73.
in VI. 80.
in VII. 85.42′.51″.
in VIII. 90 ſeu rectus & deinceps ſemper.

Rad.

	Rad.	Capit.	Coll.	Ala 1.	Ala 2.	Figens.
IV.	38.5.0.	19.7.3.	9.2.3.	7.7.4.	7.1.0.	60.8.0.
V.	49.0.5.	20.4.0.	10.8.3.	9.0.9.	8.0.3.	61.1.0.
VI.	60.0.0.	21.1.0.	12.0.0.	10.0.7.	8.3.3.	61.3.4.
VII.	70.8.0.	21.7.5.	12.9.0.	10.8.3.	8.4.1.	61.5.4.
VIII.	82.6.6.	22.3.2.	13.6.3.	11.4.4.	8.3.9.	61.7.2.
IX.	93.0.8.	23.1.5.	13 8.3.	11.6.1.	11.1.0.	61.7.1.
X.	103.6.2.	23.8.3.	14.0.2.	11.7.6.	12.9.1.	61.7.0.
XI.	114.2.6.	24.4.0.	14.1.9.	11.9.1.	14.1.9.	61.6.8.
XII.	124.9.7.	24.8.8.	14.3.4.	12.0.4.	15.1.5.	61.6.6.

Numeri ante punctum ſunt perticæ Rhynlandicæ 12 pedum: reliqui ſunt 10ᵉ. 100ᵉ. pedis.

MODVS QVARTVS.

Eſt Dogeno tertius.. Fritachio primus.

Eſto

Cortina 36 perticarum.
Facies 24 perticarum.
Angulus Propugnaculi ſemiſſis anguli Figuræ aucta viginti gradibus.

Pert../. Ped.
Ala in IV 6./.72.
in V 7./.84.
in VI 8./.96.
in VII 9./.108.
in VIII 10./.120.
in IX. 11./.132.
in X 12./.144 & ſeruatur in figuris omnibus ſequentibus.

MODVS QVINTVS.

Eſt Fritachio ſecundus.

Eſto

Cortina 36 perticarum
Facies 24
Angulus Propug. compoſitus ex ſemiſſe anguli Figuræ,& 15 grad; vt in modo 1. & 2.

Pertic./. Ped.
Ala in IV. 8./.96.
in V. 9./.108.
in VI. 10./.120.
in VII. 11./.132.
in VIII. 12./.144.& in ſequentibus ſemper.

Ex his datis ea reliquarum partium conſequitur proportio quam Tabella adiecta exhibet.

Rad.

nt 10⁴,

rtus videtur
& *tertius* ſa-
ſextus, qui
, cedit reli-
vnde conſe-
48. Videtur

Collum &
propugn

ficio ex ſin-
tates elician-
Munimenti

lorum eius
n.

ris à duobus

Nam

a1. Nam angulus centri P vnà cum duobus PEF, PFE facit duos [a] rectos. Sed hi ſunt ſemiſſes anguli Figuræ, ac proinde ſimul angulum figuræ efficiunt. Ergo angulus Centri, cum angu- Figuræ facit duos rectos. Ergo &c. a 32. 1. elem.

3. Angulus Propugnaculi ſic habetur per *num.* 2 inueniatur angulus Figuræ, eius ſemiſſi adde 15. gradus.

4. Angulus GKA, ſeu CKA prouenict, ſi ſemiſſem anguli Figuræ demas à ſemiſſe anguli Propugnaculi. Nã quia GH, EF ſunt parallelæ, erit [b] angulus EGQ par PEF, & GKA par CGQ, ergo &c. b per 27. 1. elem.

5. Angulus ACK habetur, CKA ſubducto ex 90 grad. Nam cùm CAK ſit rectus; ACK CKA, faciunt rectum [c] alterum. c per 32. 1. elem.

6. Angulus GTH. Dupla angulum DKA *nu.* 4. inuentum. Nam GTH externus æquatur duobus [d] internis TKI, TIK æqualibus. d per 32. 1. elem.

7. Angulus ACG. ACK inuentum *num.* 5 ſubtrahe à 180 gradibus. Reſiduum eſt ACG. Nam ACK, & ACG faciunt [e] duos rectos. e per 13. 1. elem.

8. Angulus GEA. Anguli Figuræ *num.* 2 inuenti ſemiſſem PEF ſubtrahe ex 180 gradibus. Sunt enim PEF, & GEA duobus rectis [f] æquales. f per eamd.

Linearum inuentio.

1. Rectæ AK, CK.

In triangulo rectangulo ACK datur Ala AC, & anguli C, K inuenti ſunt *num.* 5 & 4. Inuenientur igitur trigonometriæ [g] beneficio latera AK, CK. Fig. 6. g Geom. Pract. lib. 1. c. 3. probl. 3.

2. Ala Cortinæ & Stringens.

Facies quæ datur addita ad CK *num.* 1. inuentam dabit ſtringentem GK: AK verò inuenta *num.* 1 dempta à Cortinâ quæ datur, relinquet Alam Cortinæ BK.

3. Rectæ GQ, QC.

In triangulo rectangulo GQC datur Facies GC & anguli inueniti ſunt *nu.* 4 (eſt [h] enim QGC par GKA) inuenientur [i] igitur GQ, QC. h per 27. 1. elem. i Geom. Pract. lib. 1. c. 3 probl. 2.

4. Latus exterius GH.

Duplæ GQ *num.* 3. inuentæ adde Cortinam quæ datur.

5. Recta AQ.

Alæ quæ datur adde QC *num.* 3. inuentam.

6. Capitalis GE & GZ.

In triangulo rectangulo GZE. Angulus EGZ inuentus eſt *nu.* 2. (nam æquatur [k] angulo PEF ſemiſſi anguli figuræ) & latus ZE, ſeu QA inuentum eſt *num.* 5. Inueniuntur ergò [l] GE & GZ. k per 27. 1. elem. l Geom. Pract. lib. 1. c. 3 probl. 3.

7. Linea Colli AE.

Subtrahe GZ *num.* 6. inuentam à GQ inuentâ *num.* 3. reſtat ZQ, ſeu EA.

8 Latus figuræ interioris EF.

Duplæ lineæ Collari *num.* 7. inuentæ adde Cortinam quæ datur.

9. Radius PE, & YP.

In triangulo rectangulo EYP latus EY inuentum eſt *num.* 8 (eſt enim ſemiſſis lateris figuræ) & angulus PEY *num.* 2 inuentus eſt. Ergo [m] inueniuntur EP, YP. m Geom. Pract. lib. 1. c. 3. probl. 3.

10. Radius maior GP.

Radio minori adde Capitalem.

11. Defenſio Figens BG.

Ex quadratorum GR, BR ſummâ radicem extrahe, ea dabit GB patet ex 47. 1. Porro RB inuenta eſt *num.* 5. GR habetur ſi ad ZR, ſeu EB ſummam Cortinæ ac Collaris lineæ (quarum hæc *num.* 7 inuenta, illa datur) addideris GZ inuentam *num.* 6.

Atque ita habetur plena Munimenti conſtitutio. Neque difficile iam erit trigonometriæ quam docuimus *lib.* 1. *noſtræ Geometriæ Practicæ cap.* 3. non imperito, ſimili methodo ex quibuſcumque datis, angulos omnes lineaſque elicere.

CAPVT VI.

Munimentorum Regularium delineatio in Chartâ & in Campo.

CVm *Capite præcedenti* quantitates linearum, angulorũq; Munimentorum determinatæ ſint, ad eadem in chartâ vel campo delineanda aliud nihil requiritur quàm quod in Geome-

triâ

Digitized by Google

CAPVT VIII.

Munimentorum orthographicæ dimenſiones deinceps determinantur, ac primo Valli & Loricæ Vallo impoſitæ.

DElineationis hactenus explicatæ vnicum & totum munus fuit Valli ſolius ambitum qui Faciebus, Alis, Cortiniſque abſoluitur, ritè conſtituere, quod quidē vniuerſæ ſtructuræ Martiæ fundamentale ac princeps eſt opus. At verò tum Valli ipſius, tú membrorum cæterorum in altum latumque dimenſiones præſcribere, Orthographiæ ſunt partes. Porrò Munimentum omne his quaſi membris conſtat: Vallo, Loricâ, Promurali, Foſsâ, Viâ tectâ, Loricâ campeſtri, ſeu extimâ. Quamquam ſi foſſa ſicca habeatur, Promurale omitti poteſt & ſolet. Hoc capite tradentur Valli eiuſque Loricæ dimenſiones.

Vallo foſſiſque vrbem tutari ſuam nolebant olim Spartiatæ: & cuidam interroganti cur Sparta muris careret: ciues armatos commonſtrans Ageſilaus rex eo tempore, iſtos dixit Spartæ muros. Fuit hæc ſanè inanis & ſtulta fortitudinis oſtētatio, nullo ſano conſilio, ſed ſolâ temeritate nixa, quam omnium gentium vſus damnauit, & ipſi Spartiatæ ſibi in Thebano bello prope exitialem ſunt experti, nos, his relictis, ad rem aggredimur.

I Valli materia.

Valli materia ſit non ligna, non lapides, ſed terra: hæc vbique ad manum maximéque parabilis eſt, ac proinde facilè ita accumulatur vt Valli craſſitudo Tormentis reſiſtat: & terra cedendo globorum vim elidit ac vincit. Non tamen Vallum terreſtre nudum præferimus veſtito ſaxis, de quo infra.

II Altitudo Valli mediocris eſto.

Vix aliud munitioni pernicioſius eſt quàm altitudo Valli magna. Hic error in pleriſque Munimentis antiquioribus, vrbium præſertim per Europam celebriorum, commiſſus fuit. Abblandiuntur nimirum oculis excelſa valla, & fortitudinis ſpeciem inanem oſtentant. Reuerà interim defenſionem corrumpunt omnem, vrbemque hoſti produnt, & ne gratis tantum habeatur mali, ærarium ſumptibus immenſis exhauriunt.

Mœniorum ſublimium in eo potiſſimum labes exiſtit, quod hoſtem propiùs accedentem Vrbanis telis eripiat, ſubducatque. Id magno ſuo damno ab Hollandis poſtremùm obſeſſa Breda docuit. Munierat eam Vrbem Mauritius ingenti curâ & ſumptu vt abſolutiſſimis Europæ munitionibus accenſeri poſſe videretur. Sed eum ſefellit, blandiens, vt dixi, oculis Vallorum celſitas. Bredani certè à Frederico Mauritij fratre deinde obſeſſi, ex Vallo nimis alto hoſtem propiùs accedentem, prorepentemq; ſenſim Vineam, eiicere Tormentis ſuis minimè potuerunt. Vnde coacti ſunt Valla ſublimia tantis impenſis ſtructa, varijs perforare locis ac diruere, dirutaque explanare, vt locum facerent humilioribus Tormentorum ſuggeſtis, quas dicunt *Batterias*. Ex quibus fatales Vineas impetere ac diffringere certiùs liceret. Verùm ne ſic quidem vallis ſublimibus ſubueniri poteſt quin iiſdem alio ex capite grauiùs noceatur. Dum enim varijs locis perforantur, operis colligatio & compages ſoluitur, adeóq; Tormentis hoſtilibus verberatum facilè concidet.

Hoc tam exitiali incommodo caret vallum mediocriter aſſurgens vt per ſe eſt manifeſtum: imo verò ictus bombardarum vniuerſim ex ſtatione humiliori plus nocumenti inferunt quā ex altiori. Sint enim altitudines binæ AB maior, & AC minor, & horizonti inſiſtat longitudo DE ex.gr. ſtatura hominis. Conſtat rectam quæ ex C per E emittitur, cadere vltra eam quæ ex B emittitur per E, maiuſque in terrâ intercipere ſpatium DF, vbi altera ex B veniens per E, ſolum intercipit DG. Maius igitur ſpatium ſtringitur ex humiliori loco quàm ex altiori. *Fig. 9.*

Vallorum ſublimium patroni fortaſſe dicent ea eſſe aſcenſu difficiliora, ex iiſque melius detegi acceſſus hoſtiles (*Aproches*).

Reſp. incommodum iam allatum præualere. Et verò mediocris altitudo ſatis aſcenſum impedit. Ad acceſſus detegendos in propugnaculis excitari poſſunt Tormentorum Tribunalia (*Cauallier*s) ſtatten.

Fig. 35. Angulus DAE, quem in ſpeculi centro efficiunt extremi radij ſolares DA, EA, eſt ille
a vide. ipſe, ſub quo Solem è terra conſpicimus. Hunc ᵃ Aſtronomi reperêre gradus circiter dimi-
Aſtron. l 3. dij. Tantillus igitur eſt angulus DAE, & illi ad verticem oppoſitus BAC, adeóque & ſub-
c. 5. nu. 31. tendens illum ſpeculi arcus BC, qui determinat luminis quantitatem radijs per centrum tranſeuntibus à ſpeculo exceptam, & in A centrum reflexam. Atqui luminis portio tantilla in centro collecta non poteſt ignem accendere. Patet igitur veterum paralogiſmus.

b per 34. Contra, lumen, quod radijs parallelis defertur, & colligitur circa punctum, quo radius biſecatur, portionem ſpeculi occupat ᵇ graduum 18, ac proinde ſufficiens eſt vt cauſet vſtionem.

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 36. Portio caua (COBF) conoïdis parabolicæ omnes radios ſibi incidentes axi (CB) parallelos reflectit in axis punctum (A) diſtans à vertice (B) quartâ parte lateris recti: vbi proinde vehementiſſima vſtio.

PArabola conoïdem reuolutione ſuâ producens, ſit EBF; quod enim de hac oſtendetis, de conoide ipſa liquebit pariter. In parabolæ quoduis punctum O radius incidat axi parallelus & in parabolæ plano exiſtens DO, ducatúrque recta OA. Parabolã deinde contingat in O recta PI. Demonſtratum eſt à Vitellone aliiſque angulos ad tangentem DOI, AOP eſſe æquales. Ergo per 5. lib. 2. Catop. omnes radij DO æquidiſtantes axi reflectuntur in punctum A. Quare vſtionem fieri in A validiſſimam neceſſe eſt.

Corollaria.

1. *Speculum quod reflexione radios colligat poſt ſe, exhibere.*

Fig. 37. Proprium hoc eſt ſpeculis refractoriis: poteſt tamen etiam reflectentibus conuenire. Si enim à conoïde parabolicâ EBF abſcindatur portio MBN continens focum A, reliquus tubus parabolicus radios axi parallelos poſt ſe colliget in A.

2. *Menſam trochorum conſtruere, in quâ globulus ſecundùm lineas lateribus parallelas impulſus ſemper annulum reflexus incurrat.*

Fig. 38. Fiat menſa terminata duabus parallelis AB, CD, & duabus parabolis AFD, AEC in quarum focis I, O, ſtatuantur annulus, & portula. Patet igitur globulum, ſi impellatur ſecundùm lineas GX, vel MQ, reflexum iri ſemper in focos I, vel O, ac proinde incurſurum ſemper in annulum vel in portulam. Quod erat propoſitum.

PROPOSITIO XXXVII.

Si flamma candelæ in foco caui ſpeculi ſphærici vel parabolici collocetur, totum ſpeculum quaſi ardens apparebit, & lumen ad ſpatium longiſſimum reflectetur eâ intenſione quæ ad legendum ſufficiat.

Fig. 41. LEgi ego libellum in diſtantiâ pedum circiter 400 à ſpeculo & candelâ, alio nullo adiutus lumine, quàm reflexo. Ratio eſt, quia cum radij paralleli DA reflectantur in focum C viciſſim etiam radij CA è foco egreſſi reflectuntur parallelè, totúmque lumen è foco incidens in ſpeculum AB, cogitur in cylindrum ABDD. Quia tamen flamma candelæ foco maior eſt, non omnes radij ab eâ emiſſi in ſpeculum reflectuntur prorſus paralleli, ſed ad paralleliſmum propè accedunt: atque hæc eſt cauſa, quod figura luminis oppoſito muro excepti ſimilis ſit non ſpeculo, ſed candelæ.

PROPOSITIO XXVIII.

Poteſt reflexione lumen colligi ad diſtantiam à ſpeculo quantumuis magnam; non ſic tamen vt erat.

DVo ſunt modi præcipui. Primus per ſpeculum parabolicum. Poteſt enim deſcribi parabola habens latus rectum, adeóque & quartam lateris recti partem quantumuis magnam. Cùm igitur focus ſpeculi parabolici diſtet à vertice ᵃ quartâ parte lateris recti, poterit ab ali-
a per 37 quo ſpeculo parabolico Solis lumen colligi in focum quantumuis diſtantem à ſpeculo. Non poterit tamen illud ad quamuis diſtantiam vrere, tum quia lumen reflexum ſenſim elangueſcit, tum propter nimium acumen coni Catoptrici, quo vim vſtionis diminui experientiâ conſtat.

ſtat. Refert ſanè Kircherus noſter *pag.* 882 & 883 artis magnæ ſpeculo parabolico Manfredi Septalij ignem fuiſſe accenſum ad paſſus 15 vel 16 à ſpeculo, indifferenter videlicet à paſſu 15 vſque ad 16, ſed morâ longiuſculâ, quâ nimirum pſalmus *Miſerere* recitari poſſet.

Modus alter eſt eiuſmodi. Speculo parabolico AB radij paralleli DA, DB colliguntur in focum Q. Deinde tubulus parabolicus OP ita ponitur, vt eius focus congruat cum foco Q. Sic enim radij à ſpeculo AB reflexi in focum Q, inde vlteriùs progredientes à tubulo excipiuntur, à quo reflexi rediguntur in cylindrum OE, qui quò tubulus fuerit gracilior, tantò & ipſe gracilior erit propiuſque accedet ad lineam. Atque hæc eſt linea illa vſtoria, quâ nonnulli putauerunt ad quamuis diſtantiam poſſe ignem accendi. Verùm neque illa idonea eſt ad vrendum in diſtantiâ magnâ, nedum infinitâ. Nam præter duas rationes contra modum primum allatas, aduersùs hanc etiam tertia accedit, quod lumen duplici reflexione debilitatum ac fractum plurimum actiuitatis amittat. Fig. 42.

Corollarium.

Ex is patet non potuiſſe Catoptrico artificio Archimedem Marcelli naues ad tria ſtadia (vt refert Diodorus), vel ad tria paſſuum millia (vt alij volunt) diſtantes incendere. Credibile eſt à muro non vltra paſſus 30 abfuiſſe. Ita Kircherus loco ipſo diligenter à ſe inſpecto[1] opinatur.

[1] artis mag. pag. 876.

PROPOSITIO. XXXIX.

Spherois caua radios omnes à polo vno egreſſos in polum alterum reflectit.

PVnctà ex comparatione factà, ſiue poli ſphæroïdeos ſint A, B, ellipſis autem, quæ ſphæroïdem genuit, eſto COD, in quâ ex polis A, B ad perimetrum inclinentur rectæ AO, OB, ducaturque PQ tangens in O. Demonſtratum eſt angulos POA, QOB ad tangentem factos[a] æquari. Ergo[c] radij omnes AO egreſſi è polo A ab ellipſis perimetro reflectuntur ad polum B. Ex quo idem patet de cauâ ſuperficie ſphæroidis. Fig. 39.

[a] b 48, 3. Con. Apol. [c] c per 1.1. Catop.

Corollaria.

1. Si in polorum vno A ponatur flamma candelæ, lumen incidens in ſuperficiem totam ſphæroidis colligetur circa focum alterum B; vbi proinde lumen exiſtet quidem vehementer intenſum: ſed ignem non exiſtimo accenſum iri, ob neceſſariam lucidi in A polo exiſtentis paruitatem. Fig. 39.

2. Tubum auditorium conficies ſi à ſphæroïde oblongâ & gracili AB tubum abſcindas ECDF, polos O & Q non continentem. Si enim os loquentis ponatur in polo Q & polus alter O in aure audientis, omnes radij ſonori in cauam tubi ſuperficiem incidentes reflectentur ad aurem in O. Fig. 40.

3. Si menſa trochorum conſtruatur formâ ellipticâ, & in polorum altero A annulus collocetur, in altero B globulus, is quamcumque in partem ad menſæ latera impingatur, incurret in annulum. Fig. 39.

4. Radius ex vno ellipſis polo procedens versùs maiorem axem, infinities reflectitur. Ex polo radius exeat AE: is reflectetur ad focum alterum B. Hinc pergens in F reflectetur ad focum A. In de pergens in G reflectetur ad focum B. Ex B procedens in I reflectetur ad focum A, atque ita in infinitum. Fig. 46.

PROPOSITIO XL.

Conoïs hyperbolica conuexa omnes radios[a] (PO) tendentes in focum (A) reflectit in conoïdis oppoſitæ focum (B): & conoïs hyperbolica caua omnes radios[b] (PO) tendentes in conoïdis oppoſitæ focum (B) reflectit ad focum ſuum (A).

[a] a Fig. 43. [b] b Fig. 44.

EGregiè & primus id obſeruauit Marius Bettinus noſter Apiario 7, progym. 3: & mirum eſt ante illum nemini incidiſſe, cùm ex ex *p.* 48. 3 *conic.* non minus immediatè ac facilè deducatur pro hyperbolâ, quàm pro ellipſi.

Hyperbolam conoidis genitricem KSN in puncto O tangat recta CD, ducaturque BO. Quoniam radius incidens PO per hyp. tendit in focum A, & per conſtr. OB in focum B, erit angulus AOC æqualis angulo BOC. Sed AOC eſt par[d] ipſi POD. Ergo POD æqualis eſt BOC. Ergo radius PO tendens in focum A reflectitur[i] ad focum B. Quod erat primum. Fig. 43. Fig. 44.

Tangat rurſus hyperbolam in O recta CD, ducatur OA. Quia radius incidens PO[m] tendit in focum B, & OA in focum[n] A, erit angulus AOC[o] par angulo BOC. Sed BOC æquatur

[d] d per 15. 1. [i] i per 5. 1. Catop. [m] m hyp. [n] n conſtr. [o] o per 48 3. Conic.

z per 15.1. quatur ᶻ ipſi POD. Ergò POD æqualis eſt AOC. Ergo radius PO tendens in focum B ᵗ re-
t per 5.1. Catop. flectitur in focum A. Quod erat alterum.

Corollarium.

Fig. 45. Radius quiuis CE tendens in focum A inter oppoſitas hyperbolas versùs axem infinities reflectitur.

Nam quia CE tendit in focum A, reflectitur in focum B, occurrens alteri hyperbolæ in S. Quooiam igitur radius ES tendit in focum B, reflectitur in focum A, occurrens hyperbolæ in O. Ruiſum igitur quia radius SO tendit in focum A, reflectetur ad focum B, & ſic deinceps in infinitum.

PROPOSITIO XLI.

Caua conoïs hyperbolica vrit non Soli expoſita; ſed igni.

Fig. 44. QVoniam ignem ſtruere poſſumus tam latè quàm voluerimus, & ſpeculum illi pro libitu admouere, manifeſtum eſt radios PO ab igne in ſpeculum emiſſos, & in oppoſitæ hyperbolæ focum B tendentes, poſſe magnam inſidere ſpeculi portionem VSX. Magna igitur quantitas caloris colligetur in foco A; quæ proinde poſſit ad vrendum ſufficere.

Contra accidet, ſi Soli ſpeculum obuertas. Cùm enim ob ingentem Solis diſtantiam extremi ſolares radij tendentes in focum B, angulum efficiant non maiorem gradu dimidio, exigua tantùm ſpeculi portiuncula ſolare lumen excipiet quod reflectat ad focum, adeóque luminis quantitas tam modica colligetur in foco A, vt ad vrendum minimè ſufficiat.

Corollarium.

Fig. 47. Conuexa conoïs hyperbolica ad vrendum minùs idonea eſt.

Niſi enim valde magnus ſit ignis, extremi radij EO, FO ab igne tendentes in polum A, modicam ſpeculi portionem intercipient, ac proinde caloris quantitas minùs parua reflectetur ad focum B. Multò adhuc minùs erit vſtioni aptum ſi Soli obuertas, vt patet ex dictis in præcedenti.

PROPOSITIO XLII.

Dantur ſpecula, quorum focus ſit linea recta, vel curua quæcumque.

SI portio caua circuli vel parabolę vnà cum foco motu recto deferatur, deſcribet ſuperficiem cylindricam, & focus rectam lineam. Manifeſtum eſt omnes radios parallelos in eiuſmodi ſuperficiem perpendiculariter incidentes, reflecti in totam lineam à foco deſcriptam. Quod ſi eadem illa portio circuli vel parabolæ cum ſuo foco circumagatur motu circulari vel elliptico vel alio quocumque, deſcribet ipſa ſuperficiem annularem cauam, focus autem lineam circularem vel aliam curuam pro motus ratione, ad quam omnes radij paralleli in cauam annularem ſuperficiem incidentes, reflectentur. Non vrent tamen lineæ iſtiuſmodi, quòd in ſingulis ipſarum punctis non niſi vnica luminis ſuperficies colligatur.

PROPOSITIO XLIII.

Fig. 48. Conuexa conoïs parabolica, imò & ſphæra conuexa radios (BO) tendentes in focum (A), axi (FA) parallelos reflectit.

a per 34. & 37. DVcatur COE parallela axi AF, & NM tangat in O. Igitur EO ᵃ reflectitur ad focum
b per 4 & 5.1. Catop. A, radiuſque reflexus eſt OA, qui per hyp. ipſi DO eſt indirectum. Ergo anguli ᵇ E-
c per eaſd. OM, AON, æquales ſunt. Ergo etiam æquantur illis ad verticem oppoſiti MOD, CON.
e per conſt. Ergo radius DO tendens in A reflectitur ᶜ radio OC parallelo ad ᵉ AF.

FINIS CATOPTRICÆ.

ANDREÆ
TACQVET
E SOCIETATE IESV
ARCHITECTVRA
MILITARIS.

Digitized by Google

Digitized by Google

ARCHITECTVRÆ MILITARIS

PARS I

DE MVNITIONE REGVLARI.

CAPVT PRIMVM.

Architecturæ Militaris Definitio, Initia, Progreſſus, Perfectio.

ARchitectura Militaris, eſt ſcientia locum quemcumque aduerſus vim hoſtilem aptè muniendi ac tuendi.

Vrbes atque Caſtella (inquit Vegetius) aut naturâ muniuntur, aut manu, aut vtroque. Naturâ aut loco edito ſiue abrupto, vel circumfuſo mari, ſiue paludibus vel fluminibus. Ciliciam Aſiæ, & Heluetiam Germaniæ montes circumiecti prope inacceſſas reddunt. Aornis petra, Herculis & Alexandri impetum eluſit. Arces Hermenſteniæ & Namurcenſis, plureſque per Europam alias, rupes ſubiectæ inuictas reddunt. Venetias, Straelſundam, Cuſtrinum, Hollandiamque prope omnem aquæ & paludes circumfuſæ tuentur. Natura igitur muniendis Vrbibus vel terræ elementum vel aquæ circumfudit. Naturam ars vt ſolet imitata, pro montibus ac ſaxis, muros ac valla, pro fretis paludibuſque foſſas ſubſtituit.

Sed, vt omnia rerum exordia ſolent, principio rudis admodùm & ſimplex fuit muniendi ratio. Muris oppida cingebant qui ad eam altitudinem attollebantur, quæ facilem hoſti per ſca- *Fig. 1.* las aſcenſum negatura videbatur. Latitudo erat tanta quæ ſenos, ſeptenoſue armatorum ordines caperet. Muros Babylonis refert Curtius fuiſſe latos 32 pedes. Verùm duplici vitio hæc ſtructura laborabat vtroque capitali. Primum erat quod defenſores ſupra murum ſtantes nullo munimento tecti, hoſti paterent. Alterum quod hoſtis muro propiùs ſuccedens ab ipſo muro tegeretur, vt lædi à defenſoribus in ſublimi ſtantibus non poſſet.

His erroribus ita deinceps occurrere conati ſunt. Mutum perpetuâ Loricâ BCZ ſepie- *Fig. 2.* bant. Loricæ faſtigium pinnæ Z diſtinguebant non continuæ, ſed vacuis ſpatijs interruptæ. Pinnis tecti defenſores per interualla vacua hoſtem arcebant. Ita primus error vtcumque ſublatus. Vt alteri vitio mederentur, mutum à ſolo ad altitudinem hominis certis interuallis P peruium relinquebant. Sed ne ſic quidem dicta incommoda perfectè tollebantur: cùm hoſtis intra triangula DEF, GKH oppidanotum tela effugeret.

Ergo ad defenſionem lateralem cœperunt reſpicere, retentis pinnis feneſtriſque, quadratas *Fig. 3.* turres quæ vltra muros prominerent, in orbem extruxêre, atque ita defenſioni directæ quâ priùs ſolâ vtebantur, lateralem vtcumque adiecêre. Sed lateralis defenſio illa adhuc erat imperfecta quòd hoſtis intra triangulum IPK receptus occultaretur. Præterea quadratæ turres non ſatis ferebant vim machinarum & arietum.

Reiectis igitur quadratis turribus, rotundas ſubſtituêre, ita ACB triangulum quo hoſtis *Fig. 4.* occultatur, multum fuit imminutum, vt iam intra illud nequiret hoſtis arietarias machinas diſponere: & rotunda turrium forma firmior quâuis aliâ aduersùs arietantium impetus ſubſiſtebat. Hic veterum ars & conatus conquieuit, donec nitrico puluere reperto, fabricare homines fulmina, & tonitrua imitari didicerunt. Et erat ſane iſta muniendi ratio prioribus longè anteferenda. Nihilominus adhuc negotium faceſſebat ſuſpectum illud triangulum ACB quod ſatis capax erat vt muri ſuffoſſores & cunicularios occuleret. Deinde lateralis defenſio FC, DC vnicum tantùm turris rotundæ punctum ſtringebat B, A, quòd rotunda corpora à rectis lineis non niſi punctualiter tangi poſſint.

Vicit tandem ſeipſam ars, atque eam quâ modò vtimur, defenſionis formam adinuenit. Rotundas turres in propugnacula Faciebus, Aliſque inſtructa, muros in Valla commutauit; rectiſque lineis Munimentum omne circumſcripſit. Ita denique effectum eſt vt quocumque hoſtis loco conſiſteret propugnatorum telis pateret, atque omnes munitionis partes ſe mutuo tutarentur.



31. Forma regia mediocris dicitur, cuius Defenſio figens minor eſt iactu muſquettæ. Sed diſtantia propugnaculorum maior.
32. Forma regia minor eſt cuius diſtantia propugnaculorum æquat iactum muſquettæ. Reliqua minora vocantur Castella: *Forts.*
Terminos Orthographicos explicabimus infra *cap.*7.

CAPVT III.

Munitionum Canones.

I. Finis Munimenti eſt, vt pauci multis reſiſtant.

II. Munimenti ea forma ſit oportet, vt ſingulæ eius partes præter defenſionem directam quam ſibi præſtant, etiam lateralem ſeu obliquam accipiant ab alijs.

III. Singulæ igitur Munimenti partes & ſtringi debent & ſtringere.

Ratio ſtrictionis ſeu defenſionis hęc eſt; Facies quę debiliſſima munimenti pars eſt, defenditur ab Alis propugnaculi & Cortinæ, quin & à Facie oppoſitâ, Alæ propugnaculi à Cortinâ. Cortina ab Alis. Vide *fig.*5.

IV. Defenſio quò breuior & obliquior, eò fortior & certior. *Fig.* 6.

Eò porrò obliquior eſt defenſio, quò angulus decuſſationis GTH eſt acutior. Vide *fig.*6.

V. Defenſio Figens BG, AH non excedat iactum muſquettæ, hoc eſt 750 aut 720 pedes. *Fig.* 6.

Longius quidem glans defertur, ſed non ad ſcopum. Figens inter omnes Munimenti lineas princeps eſt, cæterarumque magnitudines ipſa determinat.
Nota. Dum pedes nominantur ſemper intelligi Rhynlandicos.

VI. Curandæ præ cæteris defendentes, ſiue præſides Munimenti partes. Hæ quantum fieri poterit augeantur.

VII. Iuſtæ igitur magnitudinis ſint Alæ propugnaculorum, & præter eas quàm maximæ fiant Alæ in Cortinâ.

Longè enim fortius eſt Munimentum, quod ſaluis eſſentialibus alijs Alas etiam habet in Cortinâ.

VIII. Cortina ſit iuſtæ longitudinis: ſuperet Faciem, imò & Alas propugnaculorum iunctas.

Quia fortiſſima eſt Munimenti pars.

IX. Angulus propugnaculi ſit par violentiæ tormentorum. Vnde non ſit minor 60 gradibus.

Talem ſufficere vſus docuit.

X. Rectus propugnaculi angulus optimus eſt. Is tamen vt habeatur, Ala Cortinæ non omittenda aut nimium decurtanda.

XI. Angulus Alæ & Cortinæ ſemper rectus eſto.

Ita tam Cortina quàm Facies latiùs, ac proinde certiùs commodiùſque ſtringitur, & Faciei ac Alæ angulus fit maior ideoque robuſtior.

XII. Linea Colli ſit ſpacioſa.

Ne aliàs coarctetur propugnaculum.

XIII. Propugnaculi quantitas ea ſit quæ ſufficientem armatorum numerum capiat, & ſatis præbeat ſpatij ad tormenta dirigenda cæteraque militaria munia obeunda.

ad duodecangulum vſque, iacturâ. Neque dubium eſſe poteſt quin iſta methodus ſit illâ alterâ multò præſtantior, cùm & propugnaculi angulo ſatis caueat, quem numquam 60 grad. minorem facit & Facierum defenſionem augeat ſæpe plus quàm in duplum.

Canonis *octaui*, qui Cortinam iubet inſtæ longitudinis eſſe, ratio in promptu eſt, quæ & in ipſo canone inſinuatur, quod nimirū inter omnes Munimenti partes validiſſima ſit Cortina. Nam cæteris partibus ab hoſte remouetur longiùs & inter duo propugnacula poſita fortiſſimè defenditur. Eſt verò rationi conſentaneum firmiores munitionis partes, debilioribus eſſe longiores. Ne tamen Cortinam ita extenderis vt Linea Figens iactum muſquettæ ſuperet, quod canoni *quinto* repugnat. Aptiſſima proportio ea erit ſi in Formâ Regiâ aut 432 pedes ei dederis cum Dōgeno, Fritachio, alijſque, aut 480 cum Goldmanno.

Nono & decimo Canone de propugnaculi angulo ſtatuitur, & cæteris paribus rectus præfertur non rectis.

Pro Canonis ratione notandū eſt angulos rectum & obtuſum perpendicularibus tormentorum ictibus ſe totis reſiſtere, acutum verò non ſe toto. Eſto propugnaculum [a] rectangu- a *Fig.* 7.
lum FOBQP; Acutangulum [b] MLHDB. A tormentis poſitis in R incidant globi [c] in BO b *Fig.* 6.
Faciem propugnaculi rectanguli FOBQP per rectas perpendiculares RB, RS. Quoniam igi- c *Fig.* 7.
tur ex hypotheſi duæ rectæ RB, BQ perpendiculares ambæ ſunt ad BO in eodem puncto B per 14. *l.* 1. *Eucl.* conficient vnam rectam lineam RBQ. Vnde patet rectanguli propugnaculi latus BQ ſe toto obijci ac reſiſtere ictui perpendiculari RB. Ac proinde propugnaculum rectangulum reliquis ictibus perpendicularibus omnibus RS ſe toto reſiſtere.

Idipſum à fortiori patet in obtuſangulo. At in [d] acutangulo MLHDB, ictus perpendicu- d *Fig.* 6.
lares SH, SQ protracti breui ſpatio intra propugnaculum cadunt, adeóque non ſe totâ illis propugnaculi moles obijcitur. Vnde recto & obtuſo acutus angulus debilior erit.

His notatis, manifeſtum eſt cur rectus angulus acuto præferatur cæteris paribus; cur verò
etiam obtuſo habeatur potior, hę ſunt cauſæ. Prima quòd retentis iiſdē Alis [e] QP, OF & lineis e *Fig.* 7.
Colli PE, FE propugnaculum reddatur anguſtius, quod Canoni 13 ſæpè incommodat, angulus verò PQB Humeralis fit tanto minor. Altera & præcipua quòd quò angulus eſt obtuſior, eò Ala Cortinæ fiat minor, aut etiam tota pereat.

Itaque quantum fieri poterit, rectus angulus aut recto proximus propugnaculo dandus, ſic tamen vt pars altera *noni* Canonis non negligatur, quæ vetat ne anguli recti ſtudio Ala Cortinæ corrumpatur. Quoniam igitur in hexagono figuriſque ſequentibus vſque ad duodecangulum rectus propugnaculi angulus Cortinæ Alam euertit, conſultiùs arbitramur cum pleriſque huius æui celebrioribus Architectis aliquid de angulo propugnaculi, ſaluâ nihilominus eius debitâ firmitate, detrahere, quàm carere Alâ Cortinæ, cum tanto defenſionis imminutæ præiudicio. Barledue alijque oppoſitum ſecuti ſunt, ſed eos experientiâ rerum magiſtrâ plerique iam edocti deſeruêre.

Reliquorum Canonum ſenſus & ratio ſatis perſpicua ſunt, vt non egeant vlteriori explicatione.

CAPVT V.

Munimentorum regularium conſtitutio.

DEfinitionibus principijſque ſcientiæ iam expoſitis, ad rem ipſam accingamur. *Fig.* 6.
Vt conſtitutio Munimenti inueniatur, aliqua dari debent. Ea verò data hic dicuntur quæ pro arbitratu accipimus ſic vt nullum vel ab altero dependeat, vel alteri præiudicet. Iam ex datis ſemel conſtitutis reliquarum partium proportio conſequitur certa & determinata pro datorum videlicet ratione. Igitur periti Architecti hæ partes erunt, vt ea data ſeligat quæ cùm regulis *cap.* 3 & 4 ſtatutis & conueniant ipſa & reliquas partes à ſe pendentes faciant conuenire. Porrò quia ea data variari poſſunt ſaluis decretis Munitionum, varia quoque erit Munimentorum conſtitutio. Sex probatiſſimos ſeligo & propono. Proportio linearum omni Formæ ſeruiet, quantitas ſoli Regiæ.

MODVS PRIMVS.

EST *Goldmanni*. Facies ſemper Cortinæ eſto dimidia, in quotcumque angulo.

Chorda ——— 480 ped.
Facies ——— 240.
Ala in IV } angulo { 60 ped. hoc eſt $\frac{1}{4}$ Faciei.
in V } angulo { 80 ped. hoc eſt $\frac{1}{3}$ Faciei.

In reliquis vſque ad IX ſemper 10 adduntur pedes, donec in nonangulo Ala fiat pedum 120, hoc eſt $\frac{1}{2}$ Faciei, quæ deinde Alæ quantitas in omnibus figuris ſequentibus retinetur.

Angulus propugnaculi conſtet ex ſemiſſe anguli figuræ auctâ 15 gradibus. Igitur erit.

Grad.
In IV 60
in V 69
in VI 75
in VII 79. 17′.9″.
in VIII. 82. 30′.
in IX. 85.
in X. 87.
in XI. 88. 38′.11″.
in XII. 90, ſiue rectus qui deinde in figuris ſequentibus retinetur.

Ex his datis reliquarum proportio exoritur quam Tabella ſubiecta exhibet.

	Radius	Capit.	Collum.	Ala 2.	Figens.
IV.	494.5.5.8	172.6.9.9.	109.7.0.6.	256.0.7.7.	722.2.2.2.
V.	595.2.9.3.	197.9.1.1.	109.9.0.2.	254.0.8 7.	724.1.5.7.
VI.	713.4.8.6.	209.9.7.6.	116.7.5.3.	262 7.2.1.	724 9.0.9.
VII.	833.8.5.8.	222.0.5.6.	121.7.9.3.	262.0.1.1.	726.2.5.4.
VIII.	955.6.6.1.	233.9.6.4.	125.7.1.3.	256.9.4.2.	728 0.7.4.
IX.	1078.5.0.8.	245.6.2.8.	128.8.7.0.	249 4.8.2.	730.3.1.7.
X.	1212.6.0.7.	246.5.9.2.	134.7.1.7.	258 9.8.8.	729.6 3.3.
XI.	1347.0.8.3.	247.5.4.3.	139.5.2.1.	266.3.2.1.	729.0.3.5.
XII.	1481.8.8.6.	248.4.6.0.	143.5.4.0.	272.1.5.4.	728.5.1.5.

In hac Tabellâ numeri ante punctum ſunt pedes Rhynl., tres reliqui ſunt 10ᵉ. 100ᵉ. 1000ᵉ. *pedis.*

In primo igitur modo præter ſpeciem figuræ dantur quatuor Chorda, Facies, Ala, Angulus propugnaculi & conueniunt cum Canonibus, tum ipſa, tum cætera ex ipſis conſequentia Collum, Ala Chordæ, Defenſio, Figens & ſtringens &c. quod ita ſe habere comperies ſi harum partium ſingularum quantitates ex datis trigonometriæ ſubſidio elicueris, de quo *cap. ſequ.* Hic duo tantum inſinuo; Alam Chordæ eo modo fieri maximam ſic vt ſemiſſem Cortinæ ſemper ſuperet; & lineam Colli numquam non 100 pedes excedere.

MODVS SECVNDVS.

Eſt Dogeno 1. Facies 24 perticarum, hoc eſt 288 pedes Rhynl.
Cortina 36 perticarum.

Proportio igitur Cortinæ ad Faciem ſemper eſt ſeſquialtera, vt 3 ad 2: quod in omnibus modis ſequentibus obſeruatur.

Angulus determinans Alam ſemper 40 grad.

Angulus propugn. ſemiſſis anguli Figuræ, aucta 15 gradibus, vt in modo primo.

Conſentiunt in angulo Propugn. Goldman, Marolois, Fritach.

Nota. Pertica quâ deinceps vtimur continet 12 pedes Rhynland.

MODVS TERTIVS.

Eſt Dogeno 2. Differt à ſecundo in ſolo dato vltimo: aſſumit enim angulum Propugnaculi parem duabus tertijs anguli Figuræ. Igitur erit

In IV. 60 grad.
in V. 73.
in VI. 80.
in VII. 85.42′.51″.
in VIII. 90 ſeu rectus & deinceps ſemper.

Rad.

	Rad.	Capit.	Coll.	Ala 1.	Ala 2.	Figens.
IV.	38.5.0.	19.7.3.	9.2.3.	7.7.4.	7.1.0.	60.8.0.
V.	49.0.5.	20.4.0.	10.8.3.	9.0.9.	8.0.3.	61.1.0.
VI.	60.0.0.	21.1.0.	12.0.0.	10.0.7.	8.3.3.	61.3.4.
VII.	70.8.0.	21.7.5.	12.9.0.	10.8.3.	8.4.1.	61.5.4.
VIII.	82.6.6.	22.3.2.	13.6.3.	11.4.4.	8.3.9.	61.7.2.
IX.	93.0.8.	23.1.5.	13.8.3.	11.6.1.	11.1.0.	61.7.1.
X.	103.6.2.	23.8.3.	14.0.2.	11.7.6.	12.9.1.	61.7.0.
XI.	114.2.6.	24.4.0.	14.1.9.	11.9.1.	14.1.9.	61.6.8.
XII.	124.9.7.	24.8.8.	14.3.4.	12.0.4.	15.1.5.	61.6.6.

Numeri ante punctum ſunt perticæ Rhynlandicæ 12 *pedum: reliqui ſunt* 10ᵃ. 100ᵃ. *pedis.*

MODVS QVARTVS.

Eſt Dogeno tertius.. Fritachio primus.

Eſto

Cortina 36 perticarum.

Facies 24 perticarum.

Angulus Propugnaculi ſemiſſis anguli Figuræ aucta viginti gradibus.

Pert../. Ped.

Ala in IV 6./.72.
in V 7./.84.
in VI 8./.96.
in VII 9./.108.
in VIII 10./.120.
in IX. 11./.132.
in X 12./.144 & ſeruatur in figuris omnibus ſequentibus.

MODVS QVINTVS.

Eſt Fritachio ſecundus.

Eſto

Cortina 36 perticarum

Facies 24

Angulus Propug. compoſitus ex ſemiſſe anguli Figuræ,& 15 grad. vt in modo 1. & 2.

Pertic./. Ped.

Ala in IV. 8./.96.
in V. 9./.108.
in VI. 10./.120.
in VII. 11./.132.
in VIII. 12./.144.& in ſequentibus ſemper.

Ex his datis ea reliquarum partium conſequitur proportio quam Tabella adiecta exhibet.

at 10ᵈ,

rtus videtur
& *tertius* ſa-
ſextus, qui
, cedit reli-
vnde conſe-
48. Videtur

Collum &
m propugn.

ficio ex ſin-
tates elician-
Munimenti

llorum eius
n.

ris à duobus

Nam

Digitized by Google

a. Nam angulus centri P vnà cum duobus PEF,PFE facit duos [a] rectos.Sed hi ſunt ſemiſſes a 31. 1.
guli Figuræ,ac proinde ſimul angulum figuræ efficiunt. Ergo angulus Centri,eum angu- elem.
Figuræ facit duos rectos. Ergo &c.

3. Angulus Propugnaculi ſic habetur per *num.* 2 inueniatur angulus Figuræ,eius ſemiſſi adde 15 gradus.

4. Angulus GKA, ſeu CKA proueniet,ſi ſemiſſem anguli Figuræ demas à ſemiſſe anguli Propugnaculi Nã quia GH; EF ſunt parallelæ, erit [b] angulus EGQ par PEF,& GKA par b per 27.1.
CGQ,ergo &c. elem.

5. Angulus ACK habetur, CKA ſubducto ex 90 grad. Nam cùm CAK ſit rectus; ACK CKA, faciunt rectum [c] alterum. c per 32.1.

6. Angulus GTH. Dupla angulum DKA *nu.*4. inuentum. Nam GTH externus æquatur duobus [d] internis TKI, TIK æqualibus. elem. d per 32.1. elem.

7. Angulus ACG. ACK inuentum *num.*5 ſubtrahe à 180 gradibus. Reſiduum eſt ACG. Nam ACK, & ACG faciunt [e] duos rectos.

8. Angulus GEA. Anguli Figuræ *num.*2 inuenti ſemiſſem PEF ſubtrahe ex 180 gradibus. Sunt enim PEF, & GEA duobus rectis [f] æquales. e per 13.1. elem f per eamd.

Linearum inuentio.

1. Rectæ AK, CK.

In triangulo rectangulo ACK datur Ala AC, & anguli C, K inuenti ſunt *num.* 5 & 4. Inuenientur igitur trigonometriæ [g] beneficio latera AK,CK. Fig. 6. g Geom. Pract. lib. 1. c.3. probl. 3.

2. Ala Cortinæ & Stringens.

Facies quæ datur addita ad CK *num.* 1. inuentam dabit ſtringentem GK: AK verò inuenta *num.* 1 dempta à Cortinâ quæ datur, relinquet Alam Cortinæ BK.

3. Rectæ GQ, QC.

In triangulo rectangulo GQC datur Facies GC & anguli inueniti ſunt *nu.*4(eſt [h] enim QGC par GKA) inuenientur [i] igitur GQ, QC. h per 27.1. elem. i Geom. Pract. lib. 1. c.3 probl. 2.

4. Latus exterius GH.

Duplæ GQ *num.*3. inuentæ adde Cortinam quæ datur.

5. Recta AQ.

Alæ quæ datur adde QC *num.* 3. inuentam.

6. Capitalis GE & GZ.

In triangulo rectangulo GZE. Angulus EGZ inuentus eſt *nu.*2.(nam æquatur [k] angulo PEF ſemiſſi anguli figuræ) & latus ZE, ſeu QA inuentum eſt *num.* 5. Inueniuntur ergò [l] GE & GZ. k per 27.1. elem. l Geom. Pract. lib. 1. c.3 probl. 3.

7. Linea Colli AE.

Subtrahe GZ *num.*6. inuentam à GQ inuentâ *num.*3. reſtat ZQ, ſeu EA.

8 Latus figuræ interioris EF.

Duplæ lineæ Collari *num.*7. inuentæ adde Cortinam quæ datur.

9. Radius PE, & YP.

In triangulo rectangulo EYP latus EY inuentum eſt *num.*8(eſt enim ſemiſſis lateris figuræ) & angulus PEY *num.*2 inuentus eſt. Ergo [m] inueniuntur EP, YP. m Geom. Pract. lib. 1. c.3. probl. 3.

10. Radius maior GP.

Radio minori adde Capitalem.

11. Defenſio Figens BG.

Ex quadratorum GR, BR ſummâ radicem extrahe, ea dabit GB patet ex 47.1. Porro RB inuenta eſt *num.* 5. GR habetur ſi ad ZR, ſeu EB ſummam Cortinæ ac Collaris lineæ(quarum hæc *num.*7 inuenta, illa datur) addideris GZ inuentam *num.*6.

Atque ita habetur plena Munimenti conſtitutio. Neque difficile iam erit trigonometriæ quam docuimus *lib.* 1. *noſtræ Geometria Practicæ cap.* 3. non imperito, ſimili methodo ex quibuſcumque datis, angulos omnes lineaſque elicere.

CAPVT VI.

Munimentorum Regularium delineatio in Chartâ & in Campo.

CVm *Capite præcedenti* quantitates linearum, angulorũq; Munimentorum determinatæ ſint, ad eadem in chartà vel campo delineanda aliud nihil requiritur quàm quod in Geome-

triâ

Digitized by Google

CAPVT VIII.

Munimentorum orthographicæ dimenſiones deinceps determinantur, ac primo Valli & Loricæ Vallo impoſitæ.

DElineationis hactenus explicatæ vnicum & totum munus fuit Valli ſolius ambitum qui Faciebus, Alis, Cortiniſque abſoluitur, ritè conſtituere, quod quidẽ vniuerſæ ſtructuræ Martiæ fundamentale ac princeps eſt opus. At verò tum Valli ipſius, tũ membrorum cæterorum in altum latumque dimenſiones præſcribere, Orthographiæ ſunt partes. Porrò Munimentum omne bis quaſi membris conſtat: Vallo, Loricâ, Promurali, Foſſâ, Viâ tectâ, Loricâ campeſtri, ſeu extimâ. Quamquam ſi foſſa ſicca habeatur, Promurale omitti poteſt & ſolet. Hoc capite tradentur Valli eiuſque Loricæ dimenſiunes.

Vallo foſſiſque vrbem tutari ſuam nolebant olim Spartiatæ; & cuidam interroganti cur Sparta muris careret: ciues armatos commonſtrans Ageſilaus rex eo tempore, iſtos dixit Spartæ muros. Fuit hæc ſanè inanis & ſtulta fortitudinis oſtẽtatio, nullo ſano conſilio, ſed ſolâ temeritate nixa, quam omnium gentium vſus damnauit, & ipſi Spartiatæ ſibi in Thebano bello prope exitialem ſunt experti, nos, bis relictis, ad rem aggredimur.

I Valli materia.

Valli materia ſit non ligna, non lapides, ſed terra: hæc vbique ad manum maximéque parabilis eſt, ac proinde facile ita accumulatur vt Valli craſſitudo Tormentis reſiſtat: & terra cedendo globorum vim elidit ac vincit. Non tamen Vallum terreſtre nudum præſetimus veſtito ſaxis, de quo infra.

II Altitudo Valli mediocris eſto.

Vix aliud munitioni perniciosius eſt quàm altitudo Valli magna. Hic error in pleriſque Munimentis antiquioribus, vrbium præſertim per Europam celebriorum, commiſſus fuit. Abblandiuntur nimirum oculis excelſa valla, & fortitudinis ſpeciem inanem oſtentant. Reuerà interim defenſionem corrumpunt omnem, vrbemque hoſti produnt, & ne gratis tantum habeatur mali, ærarium ſumptibus immenſis exhauriunt.

Mœniorum ſublimium in eo potiſſimum labes exiſtit, quod hoſtem propiùs accedentem Vrbanis telis eripiat, ſubducatque. Id magno ſuo damno ab Hollandis poſtremùm obſeſſa Breda docuit. Munierat eam Vrbem Mauritius ingenti curâ & ſumptu vt abſolutiſſimis Europæ munitionibus accenſeri poſſe videretur. Sed eum feſellit, blandiens, vt dixi, oculis Vallorum celſitas. Bredani certè à Frederico Mauririj fratre deinde obſeſſi, ex Vallo nimis alto hoſtem propiùs accedentem, prorepentemq; ſenſim Vineam, eiicere Tormentis ſuis minimè potuerunt. Vnde coacti ſunt Valla ſublimia tantis impenſis ſtructa, varijs perforare locis ac diruere, dirutaque explanare, vt locum facerent humilioribus Tormentorum ſuggeſtis, quas dicunt *Batterias*. Ex quibus fatales Vineas impetere ac diffringere certiùs liceret. Verùm ne ſic quidem vallis ſublimibus ſubueniri poteſt quin iiſdem alio ex capite grauiùs noceatur. Dum enim varijs locis perforantur, operis colligatio & cõpages ſoluitur, adeóq; Tormentis hoſtilibus verberatum facilè concidet.

Hoc tam exitiali incommodo caret vallum mediocriter aſſurgens vt per ſe eſt manifeſtum: imo verò ictus bombardarum vniuerſim ex ſtatione humiliori plus nocumenti inferunt quã ex altiori. Sint enim altitudines binæ AB maior, & AC minor, & horizonti inſiſtat longitudo DE ex.gr. ſtatura hominis. Conſtat rectam quæ ex C per E emittitur, cadere vltra eam quæ ex B emittitur per E, maiuſque in terrâ intercipere ſpatium DF, vbi altera ex B veniens per E, ſolum intercipit DG. Maius igitur ſpatium ſtringitur ex humiliori loco quàm ex altiori. *Fig. 9.*

Vallorum ſublimium patroni fortaſſe dicent ea eſſe aſcenſu difficiliora, ex iiſque melius detegi acceſſus hoſtiles (*Aproches*).

Reſp. incommodum iam allatum præualere. Et verò mediocris altitudo ſatis aſcenſum impedit. Ad acceſſus detegendos in propugnaculis excitari poſſunt Tormentorum Tribunalia (*Caualliers*) Katten.

ibus i Q-
rium nu-
s termi-

alia tor-
nitioni-

culum

cafus

tò et-
dinis
t pa-

rum
edes
ula-
Ex-
flua
hic

ian-
glo-
dum
iam
ous.
egri

di-
eft
is.

o-
m
m,
qui

quі tentari nequit niſi vel ſcalis quod fruſtraneum, vel ruinâ per cuniculum factâ. 3 Quià opus eſt ſtabile ac perpetuum, vbi Vallum nudum, niſi aſſiduò reparetur, ſenſim corruit.

Qui diſſentiunt, hæc ferè adferunt. 1 Muros Tormentis verberatos faciliùs ruinam trahere quàm terram nudam. 2. Lapides diſiectos foſſam opplere. 3. Lapidum diſſilientium fragmenta propugnatores lædere.

Primum nego ſi muri ſint valde craſſi, aut certè quod hîc ſtatuimus, terreo aggere fulciantur. Secundum perinde aut magis locum habet in Vallo nudo. Tertium vitatur ſi murus ad Valli ſummitatem non aſſurgat, quod ſeruatum in mœnibus Antuerpienſibus. Minuetur adhuc incommodum ſi muri ſint lateritij.

VIII Valli Loricâ.

Vallo Lorica ſuperſtruitur 4GIK3, cuius hæ ſtatuuntur dimenſiones. *Fig. 8.*

1. Altitudo interior TI perpetuò 6 pedum, vt commodè milites qui rarò hanc menſuram excedunt, poſſit abſcondere.

2. Altitudo exterior 2K ſemper 4 pedum. Sic enim commodè ex Vallo non ſolùm campus & Lorica campeſtris, ſed etiam foſſæ pars magna defenditur. Scietur quanta, ſi innoteſcat CΦ, quæ innoteſcet ſic: Vt IO ad OK, ſic IC ad CΦ. Sed tres primæ ſunt notæ, ergo & quarta CΦ innoteſcet. Aufer iam ex CV etiam notâ notam CΦ, remanebit nota ΦV.

3. Accliuitas interior DI ſemper vnius pedis. Non eſt opus maiori, cù & ab hoſte ſit auerſa & ſcabello G4D fulciatur, neque expoſita ſit ſcandentiû pedibus vt Valli latus internû LA.

4. Accliuitas exterior 2, 3 ſemper eſt 2 pedum. Cùm enim latus exterius Loricæ K3 ſit indirectum cum latere Valli externo 3E, & K2, 3F ſint parallelæ, patet 2K3, F3E triangula eſſe ſimilia. Quare cùm *num.* 4. ſtatuerimus Valli accliuitatem exteriorem EF eſſe dimidiam altitudinis F3, etiam 32 dimidia erit altitudinis 2K. Eſt autem 2K ſemper 4 pedum. Ergo 32 ſemper erit pedum 2.

5. Latitudo ſuperior OK viribus Torméti maioris menſuranda. Quare cùm canon maximus vix penetret 20 pedes terræ mediocriter ſolidæ. Sufficient 21 pedes.

6. Latitudo inferior D3 componitur ex ſuperiori & accliuitatibus DT, 32 quæ cùm ſimul ſumptæ efficiant pedes 3, proueniunt pro latitudine inferiori pedes 24.

Hic rurſum ludunt Architecti, & pro varietate figurarum variant latitudines hunc in modum.

In	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX. &c.
Lat.ſup.	9.	11.	12.	15.	17.	21. Ped.
Lat.inf.	12.	14.	15.	18.	20.	24. Ped.

Scabellum Loricis omnibus adſtruitur ſemper latum pedes 3, altum $1\frac{1}{2}$.

IX. Valli ambulacrum.

Ambulacrum vallare L4 habetur ſi ex latitudine Valli ſupremâ L3 dempſeris latitudinem Loricæ imam D3 & latitudinem ſcabelli D4. Quare cùm D3 *num.* 8. ſtatuerimus ſemper 24 pedum, & D4 pedum 3. Ipſam verò L3, *num.* 6 poſuerimus 51 aut 57 pedum, remanent pro ambulacro pedes 24 aut 30. Quod ſi ludere cum Architectis ſupra volueris, proueniet

In	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX. &c.
Lat.ambu.	21.	22.	$25\frac{1}{2}$.	27.	28.	30. ped.

X. Margo.

Si vallum Promurali careat, ſuccedit ipſi margo RS, 6 pedes Rhynl. latus.

CAPVT IX.

Orthographia Promuralis.

I. Promuralis neceſſitas & finis.

Experientia docuit in vrbium Belgicarum complurium expugnationibus, Loricâ ſuburbanâ expugnatâ, haud magno molimine foſſas aqueas Vineis inſterni ac ſuperari, quod eruptiones obſeſſorum impediente foſſâ aqueâ ſtructores Vineæ lateraliter fo- *Fig. 8.*

hoſte facillimum Foſſa ſicca receptum præbet, quos aquea excludit & ſuffocat, præmunitiones enim tum inter ſe, tum cum Vallo principali non niſi ligneis ponticulis perangustis iungi poſſunt, qui & paucos ſimul excipiunt, & ponderi ſuccumbentes ſubinde franguntur, vt euenit cùm Breda poſtremùm obſeſſa fuit, in expugnatione Cornuti Ginekenſi pago obiecti, ingenti militum fortiſſimorum in aquis pereuntium ſtrage. Denique cùm Foſſa ſicca Lunulis, Parmulis, Cornutis, Loricâ ſuburbanâ aliiſq; præmunitionibus tutò aut certè tutiùs quàm aquea careat, præſidio longè minori vrbs obſeſſa propugnabitur.

Ceterum quantum Foſſa ſicca ſtagnanti præſtet, patuit in obſidione Traiectenſi Belgicarum omnium acerrimâ. Cùm Foſſæ vrbis partim ſiccæ eſſent partim aqueæ, Auraicus cum belli ducibus delibetauit quâ parte vrbi vim adferret, Reſoluta eſt Foſſæ ſiccæ expugnatio. Ea verò fuit tam lenta, tamque ardua vt & errorem ſuum ſit deinde faſſus Auraicus, ſtatueritque expugnationem Foſſæ ſiccæ præ aqueâ deinceps tentare numquam. Vt cæteros ſortiſſimæ defenſionis actus omittam. Ex ipſâ foſsâ cuniculos ſuos oppidani ad ſubuertenda brachia propugnatoria eâ facilitate euentuque educebant, vt hoſti ad ſuperandam 5 perticarum lineam totidem hebdomadæ fuerit impendendæ. Vnde velitationibus, operibus, cuniculiſque repugnatoriis obſeſſores Batauos ſic fatigarunt, vt deſparatâ lineæ per foſſam ſiccam traductione, coactus ſit Auraicus cuniculum infra fundum ſiccæ foſſæ in vrbem agere, qui 40 fere pedibus ſolo vrbis depreſſior eſſet.

Fatendum nihilominus eſt ſtagnanti Foſsâ improuiſos ac nocturnos hoſtium impetus auerti melius quàm ſiccâ. Quamquam etiam ab aquis ipſis congelatis, niſi dolabris findatur glacies, magnum exiſtit periculum; vt patuit in Wachtendonchâ a Batauis, & Phlipsburgo â Cæſarianis nocturnâ aggreſſione per conſtrictas glacie foſſas expugnatis.

His in vtramque partem agitatis, ita ſentio: Foſſa ſicca repellit fortiùs vim apertam; ſtagnans occultam. Sed quia improuiſæ aggreſſiones vigilantiâ ducum militumque auerti poſſunt, vis autem aperta non aliter quàm vi manuque propulſatur; videtur ſtagnanti ſicca, ſi eam ſoli ferat conditio, abſolutè præferenda, præſertim cùm ſic etiam immenſis ſumptibus alias in Promuralis, ac præmunitionum ſtructuras expendendis parcatur.

II. Structura Foſſæ.

Foſſæ ſoliditas ſit æqualis ſoliditati operum extruendorum, Vallo nimirum, Loricæ Vallari, Promurali, Loricæ ſuburbanæ ſimul ſumptis. Non plus igitur terræ ex Foſsâ egerendum quàm requiratur ad opera dicta. Quare nequeunt Foſſæ omnes dimenſiones prius determinari, quàm innotuerit vniuerſi operis extruendi ſoliditas.

III. Latitudo ſuperior.

Foſſæ minima latitudo ſuperior circa Propugnacula SV ſuperare debet proceriſſimas arbores, aliàs hoſtis per pontes ligneos aut iunceos eam facile tranſmitteret. Satis magna erit pedum 120, 132, 144. Si placet in diuerſis figuris variare, ſic ordina. *Fig. 8.*

In IV. V. VI. VII. VIII. IX. X.
72. 84. 96. 108. 120. 132. 144. ped.

IV. Decliuitas SH, V5.

Decliuitas tam exterior V5, quàm interior SH foſſæ aqueæ ſit par profunditati 8H iam determinandæ, ac proinde HS8 ſemirectus.

V. Profunditas 8H, an.

Plerumque ſtatuitur pedum 10 aut 12: nequit eſſe minor ped. 6, aliàs aquea facilè transuadari poſſet, ſicca virum ſtantem non tegeret.

Quod autem foſſa latitudines habens ſupra determinatas, & profunditatem pedum 10 terram ſuppeditet ferè parem Vallo, Loricę, Promurali, & Loricę ſuburbanæ. Sic oſtendo. Menſurentur ſectiones orthographicę Valli & Loricę ALIKE, Promuralis 5NPQR, Loricæ ſuburbanæ 6XYZ (modus docetur in noſtrâ *Geometriâ Practicâ lib. 2. cap. 1.*) & earum ſumma ducatur in principalem Munimenti ambitum, qui innoteſcet, ſi omnes Cortinæ, Alæ, Facieſque inter ſe addantur quæ in hoc tractatu alibi determinantur. Sed oportet vt ſectiones orthographicæ, & Munimenti ambitus principalis eâdem menſurâ menſurentur. Productum dabit ſolidum ferè æquale aggregato Valli, Loricæ, Pro-

orthographicâ
, vt facile col-
gregato operũ,
rincipalem, ita
n tribus quan-
Sα, hoc eſt αβ;
ngulum SβV;
ngulum SβV,
icet & 4 nem-
exhibebit αx

Tam aliquan-
Lorica ſub-
m velis; ter-
operibus.

determi-

vt aſcen-

φ8, 16;

plici ſca-

hoſtem
in ob-
ius be-
be mi-

enim
acet in

nutus

. Ac-

Digitized by Google

2. Accliuitas interior pedis vnius,vt in Loricis alijs.

3. Facies exterior YZ ſic inclinanda vt producta tranſeat per 1 verticem Loricæ vallaris. Huius formę multa & magna ſunt commoda. Sic enim tota ſtringitur à Loricâ vallari,quod non contingeret,ſi haberet inclinationem 10,Y:nam ita totum triangulum ♆Y10 telis Loricæ vallaris eripitur.

4. Vt ea inclinatio habeatur,inuenienda eſt ♆Z baſis: quod ita fit. Notæ ſunt IC & C9, ergo & 9I nota:nota quoq; eſt T3, ſeu CF. Item nota eſt Fλ. Ergo tota Cλ,ſeu 9Y nota. Nota quoque eſt Yλ,ſunt autem per 4.*lib.6.Eucl.* proportionales I9; 9Y, Yλ, λZ. Quare cùm tres notæ ſint: etiam quarta λZ fit [a] nota. Cui ſi addas vnum pedem, nota erit baſis tota ♆Z. *a per reg. proport.*

5. Ambitus denique Loricæ ſuburbanæ tam interior quàm exterior,paralleli ducantur ad Facies ſolas, ſic vt ex aduerſo mediorum punctorum Cortinæ coeant, & angulos faciant externos. Quod ſi Cortinis Parmulæ præſtruantur, circa has Lorica erit circumducenda, non verò circum Cornuta, ſi quæ fuerint exſtructa.

IV. An expediat Loricam ſuburbanam foſsâ cingere.

Nonnulli affirmant, tuenturque. Sed illi non aduertunt ſe dum Loricam ſuburbanam tutiorem volunt re ldere, illius finem euertere. Nam finis eſt vt obſeſſi in hoſtem facile erumpant, & ab eruptione reduces tutum & facilem habeant receptum. Vtrumque noua illa foſſa impediet. Vt ſi ab oppidanis ſtructa non eſſet, eam hoſtes debere exſtruere videantur.

C A P V T XII.

Tabula Orthographica Munimentorum regularium.

EX præcedentium quatuor capitum doctrinâ hanc Tabulam collegimus.

TABVLA ORTHOGRAPHICA MVNIMENTORVM REGVLARIVM.

	Maxi	Med.	Min.
Latitudo Valli ima AE	84	72	60
Accliuitas interior AB	18	16	14
Accliuitas exterior EF	9	8	7
Valli altitudo BL	18	16	14
Valli Latitudo ſuprema L3	57	48	39
Loricæ latitudo ima 3D	24	18	14
Loricæ accliuitas interior DT	1	1	1
Loricæ accliuitas exterior 32	2	2	2
Loricæ altitudo interior TI	6	6	6
Loricæ altitudo exterior 2K	4	4	4
Loricæ latitudo ſuprema KO	21	15	11
Scabelli latitudo D4	3	3	3
Scabelli altitudo 4G	1½	1½	1½
Valli ambulacrum 4L	30	27	22

PEDES RHYNLANDICI.

RESIDVVM TABVLÆ PRÆCEDENTIS.			
Ambulacrum Promurale E5	21	17	15
Promurale cum Scabello			
Margo RS	6	6	6
Foſſæ latitudo ſuprema SV	132	108	84
Foſſæ accliuitas vtraque SH, V5	12	12	10
Foſſæ profunditas H8, *αx*	12	12	10
Foſſæ latitudo ima 8,7	108	84	64
Via tecta VX	21	17	15
Scabellum			
Baſis Loricæ ſuburbanæ λZ	79	70	69
Altitudo	6	6	6

PEDES RHYNLANDICI.

Pro baſi Loricæ operando vt *cap.* 11. *num.* 3. tradidi, reperio:

82	$75\frac{1}{4}$	69
Max.	Med.	Min.

Errant igitur in ſuo calculo hic Dogen & Fritach.

Promuralis ſtructura & dimenſiones eædem quæ Loricæ vallaris.

Scabella Loricarum ſemper eodem modo conſtruuntur.

Prima columna maximam ſeu robuſtiſſimam Orthographiam exhibet, quæ valeat quantamcumque vim obſidentium ſuſtinere. Secunda, mediocrem: tertia minimam. Sed tantùm de Munimentis hìc ago: caſtellorum campeſtrium ac præmunitionum Orthographiam infra dabimus. Cæterum nullam hìc diuerſitatis multangulorum, ſeu figurarum habuimus rationem, vt plerique Architecti, qui Munimento ex.gr. 5-angulo aliam Orthographiam tribuunt quàm 6-angulo & 9-angulo nullâ ratione nixi. Munimento enim infirmior robuſtiorue Orthographia danda eſt, non quia plures paucioreſue habet angulos & propugnacula, ſed quia debebit maiorem minoremúe vim hoſtium ſuſtinere.

Nota, Si Munimentum fiat Promurali carens, alia orietur Loricæ ſuburbanæ baſis, hæc enim 4 proportionalis eſt tribus I9, 9Y, Yλ, quarum media 9Y minor erit, ſi Promurale abſit quantitate BR. Erit tum igitur Loricæ baſis λZ, ped. Rhynl.

65	50	$55\frac{8}{9}$
Max.	Med.	Min.

Vt habetur ex operandi ratione traditâ *cap.* 11. *num.* 3,4.

C A P V T XIII.

Munitionum externarum fabrica.

MVnimentum ſecundùm partes eſſentiales conſtitutum, fortius redditur ſi externis quibuſdam ſubſtructionibus cingatur. Præcipuæ ſunt Rauelinus, Semiluna, Opus cornutum, Corona, Forcipulæ: de ſingulis agam propoſitionibus ſingulis.

PRO-

PROPOSITIO I.

1. *Rauelini definitio & forma.*

R*Auelinus*, ſiue *Parmula*, eſt moles terrea ferè ſimilis abſciſſo propugnaculo, niſi quòd Alis fere careat. Aquis cincta & à Munimento reliquo totâ foſſæ latitudine ſeparata. Talis eſt in *fig.* 10 moles FEGH, Facies habet FE, GE: Alis, vt dixi, caret plerumque, ſubinde tamen admittit, cum portis videlicet obijcitur, quæ tum eſſe poterunt 8 vel 9 perticarum. Verſùs hoſtem Vallo & Loricâ cingitur: verſùs Munimentum patet, ne occupata hoſti latibulum præbeat. Altitudine ſupra horizontem exiguâ attollitur vt ex Munimento defendi commodiùs poſſit, & horizon ex ipſo ſtringi magis. *Fig.* 10.

Angulus non ſit minor 60 grad. neque maior recto, Facierum longitudo in Munimentis regularibus determinatur *num.* 3. ſi adhibeantur ad Cortinam quæ nimis longa ſit tegendam, hoc obſerua, vt Facies non ſint longiores quàm propugnaculi Facies: 40 igitur paſſus, aut 50, aut 60 explere poterunt.

2. *Locus & defenſio.*

Obijcitur plerumque portis & Cortinis, numquam Propugnaculis. Eius ſitum dum Cortinæ obijcitur, exhibet *Fig.* 10. Expedit fieri eâ latitudine vt tantùm Cortinam, non etiam Alas tegat. Tum vero defenditur & à Faciebus & Alis Propugnaculorum quibus interponitur.

3. *Structura*

Varia eſt: hæc probatior. Ex medio Cortinæ puncto S erigatur perpendicularis infinita. Ex hac vltra foſſam pro Capitali abſcinde HE quæ expleat vel $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{2}$ Faciei. Deinde à puncto E ducantur rectæ lineæ vel ad terminos Cortinæ A, B (& hæc optima erit Rauelini forma, ſic enim & Cortina tota tegitur à Parmulâ & Parmula ipſa ſtringitur non ſolùm à Faciebus, ſed etiam ab Alis Propugnaculorum) vel ad punctum aliquod Alæ, vel ad Alarum terminos C, D. Harum rectarum partes FE, GE, à marginibus foſſæ verſùs E abſciſſæ, erunt Facies Parmulæ. *Fig.* 10.

Aliter 1. Centris A & B, extremis nimirum punctis Cortinæ, ipſius Cortinæ interuallo deſcribe binos arcus ſe mutuo interſecantes in E.

2. Producantur margines foſſæ ΦI, ML ſibique occurrant in H. Tum ex Alarum extremitatibus C, D ad punctum E ducantur rectę, quæ marginales foſſæ lineas ſecent in F & G: Eritque perfecta delineatio Parmulæ FEGH. Facies ſunt FE, GE; lineæ Colli FH, GH.

Aliter 1. Lineas colli AR, BQ biſeca in O & P. Tum ex punctis O, P, per Alarum extremitates C, D rectæ emittantur ſibi occurrentes in E.

2. Protrahe Lineas foſſæ extremas ΦI, ML, quæ ſibi occurrant in H, rectas autem priores ſecent in F & G. Erit FEGH Parmula quæſita.

4. *Orthographia & Ichnographia.*

Singularum partium latitudinem altitudinemque ſubiecta Tabula exhibet: Columna tertia exhibet Orthographiam præmunitionum Bredanarum; Prima & quarta Stabilium, Secunda & quinta Mediocrium; ſexta Minimarum. Quatuor poſteriores columnæ ſunt ex Dogeno: inſeruit hęc Tabella non ſolis Parmulis, ſed præmunitionibus omnibus.

TABVLA

TABVLA EXTRVENDIS PRÆMVNITIONIBVS.	Max.	Med.	Bredan.	Stabilia	minus Stab	Temporar.
Valli latitudo inferior.	40.	36.	44.	36.	24.	20.
Valli accliuitas exterior.	3.	2.	6.	3	2.	2.
Valli accliuitas interior.	6.	4.	8.	6.	4.	4.
Valli altitudo.	6.	4.	8.	6.	4.	4.
Valli latitudo ſuperior.	31.	30.	30.	27.	18.	14.
Loricæ baſis.	15.	15.	$16\frac{3}{4}$.	13.	10.	8.
Loricæ accliuitas exterior.	2.	2.	$3\frac{3}{4}$.	2.	2.	2.
Loricæ accliuitas interior.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
Loricæ altitudo exterior.	2.	2.	5.	4.	4.	4.
Loricæ altitudo interior.	6.	6.	6.	6.	6.	6.
Loricæ latitudo ſuperior.	15.	12.	12.	10.	7.	5.
Scabelli altitudo.	$1\frac{1}{2}$.	$1\frac{1}{2}$.	$1\frac{1}{2}$.	$1\frac{1}{4}$.	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$.
Scabelli latitudo.	3.	3.	3.	3	3.	3.
Valli ambulacrum.	12.	10.	$10\frac{1}{4}$.	11.	5.	3.
Valli Margo.	3.	3.	6.	3.	3.	2.
Foſſæ latitudo.	48.	30.	42.	30.	24.	16.
Foſſæ accliuitas exterior.	10.	8.	7.	8.	6.	4.
Foſſæ accliuitas interior.	10.	8.	7.	8.	6.	4.
Foſſæ profunditas.	10.	8.	7.	8.	6.	6.
Fundi foſſæ latitudo.	18.	14.	28.	14.	12.	8.

PEDES RHYNLANDICI.

PROPOSITIO II.

De Media Lunâ ſiue Caſſide.

1. *Definitio & locus.*

M*Edia Lunæ* ferè non differunt à Rauelinis niſi penes magnitudinem : inde fortaſſis nomen ſortitæ, quòd quæ ex aduerſo Propugnaculorum eriguntur, eà parte quà Propugnaculum ſpectant, in Lunæ arcuatæ ſpeciem excauentur. Statuuntur ſupra Viam tectam quæ eſt poſt foſſam, ſic vt earum linea Capitalis Cortinam producta ſecet bifariam; prætenduntur item Propugnaculorum angulis vt iam dixi, plurimus denique earum vſus eſt in Munitione Irregulari, vt dicetur infra.

2. *Forma.*

Angulum habeant non minorem 60 gr. nec minorem 90. Altitudo ſit modica & nõ multùm diſtent à Vallo intra ictum muſquettæ vt defendi ex Vallo poſſint. Cùm ſtatuuntur ad Viam tectam, Facies expleant pedes 25 aut 30, Valli craſſitudo 15 aut 20 pedes, eà magnitudine ſint vt capiant 100 aut 150 milites.

3. *Defi-*

3. *Delineatio.*

1. Angulo Promuralis V tamquam centro deſcribe arcum interuallo latitudinis foſſæ VM, & producatur linea Capitalis Propugnaculi indefinitè, ſecans arcum in α.

2. Ex lineâ Capitali productâ abſcinde vltra foſſam αx $\frac{2}{3}$ Faciei propugnaculi, & ex H ac λ punctis in quibus ſe interſecant lineæ Colli, Parmularum vtrimque exiſtentium ducantur ad X rectæ HX, λX.

3. Producantur φV, φV Alę Promuralis ſecentque ipſas HX, λX in ζ, δ arcum vero in β, γ, vel Promuralis Figentes 2V, 3V protractæ interſectiones illas determinent. Habes delineatam Semilunam, obiectam Propugnaculo cuius Facies ſunt Xζ, Xδ. Alæ (ſed apertæ) ζβ, δγ.

Aliarum Semilunarum delineatio ſimilis eſt delineationi Rauelinorum.

Orthographia & Ichnographia

Habetur ex Tabula Propoſitionis *præc. num.* 4.

4. *Vſus & commodum.*

Inter externa opera cæteris debilius eſt, cùm neque validam manum propugnatorum anguſtijs ſuis capiat & ex munimento difficiliùs defendatur. Videntur igitur Caſſides Munimento noxiæ niſi his cautionibus firmentur, nimirum vt vtrimque circumſtent Parmulæ, & ſolis conſtent Faciebus, Alis omnino deſtitutæ (aliàs enim ab hoſte occupatæ ex Parmulis impeti non poſſent) ac tandem longè intra teli iactum vndequaque conſiſtant. Quæ omnia cùm adfuerint, dubia adhuc Caſſidum vtilitas erit. Quare non videntur ſine neceſſitate peculiari extruendæ.

PROPOSITIO III.

De Opere Cornuto.

I. *Definitio & ſpecies.*

Cornutum opus vocari ſolet Munitio externa longiùs in campum duobus rectis lateribus procurrens, ac bina dimidiata propugnacula hoſti objiciens. Exemplum præbet *Fig.* 10. Tres cornutorum ſunt ſpecies. 1 habet latera coeuntia verſus campum, 2 versùs Munimentum, 3 parallela. *Fig.* 10.

II. *Locus & forma.*

Extruuntur ex aduerſo Cortinę, vel anguli Propugnaculi vltra Loricam ſuburbanam: melius tamen defenduntur ſi Cortinam quàm Propugnaculum tegant, ſi latera præſertim habeant parallela: cùm enim tegunt Propugnacula parallelis lateribus, non aliam fere defenſionem excipiunt, quam è Cortinâ, eamque non ſatis efficacem quia nimis longinquam, accedit quod nimis anguſtum ſic fiat opus. Si tamen Propugnaculis oporteat objicere, neceſſe omnino eſt latera coëant versùs Propugnaculum, vt non totas intercipiant Facies, ſed aliquas excludant earum partes è quibus defendi poſſint. Vide conſtructionem apud Dogenum *pag.* 160, 161.

Si Cortinæ objiciantur, latera potiùs ſint parallela & recta ad Cortinam. Si totam (vt quidam ſtatuunt & nos in figurâ expreſſimus) Cortinam tegant, defenſio laterum obtinebitur ex Faciebus propugnaculorum, quibus Cortina interijcitur: Si non totam, vt malunt alij, defenſio laterum erit maior, nimirum ex Faciebus Propugnaculorum ex parte Cortinæ. Inter opus Cornutum & Cortinā Parmula crebrò interijcitur. Quin & ante ipſum opus Cornutum inter vtrumque cornu ſubinde Parmula vel potius media Luna extrui poterit. Tandem plurimum roboris huic addes Munitioni ſi aliquoties reſcindas. Verùm de reſciſſionibus agemus infra.

III. *Delineatio.*

1. Ducantur duæ parallelæ EI, FK pro lateribus operis Cornuti à Loricâ extimâ versùs campum eo interuallo vt ſi versùs arcem producantur, Alis propugnaculorum ſint in directum, *Fig.* 11.

ctum, aut ſi minorem Cornuti latitudinem deſideres, intra Alas incidant in Cortinam ipſam. Debent autem extremitates laterum diſtare à Vallo intra ictum muſquettæ. Quare vltra 60 perticas Rhynlandicas extra Vallum non procurrent. Subinde tamen 60 illæ perticæ numerari ſolent ab ipſâ Loricâ ſuburbanâ, vt acceſſus hoſtiles magis infeſtentur.

3. Iunge EF ad quam fiant anguli FEG, EFH 25 grad. ſinguli, horum deinde vnum FEG, biſeca per rectam EL occurrentem ipſi FH in C. Tum ex EG abſcinde ED parem FC. Erunt FC, ED Facies propugnaculorum dimidiatorum.

3. Ex punctis D, C ducantur DA, CB æquales & parallelæ ad EI & FK, pro Alis Cornuum, & Cortinam iunge AB, erit autem Alarum DA, CB ea ferè proportio ad Facies quæ in Munimentis regularibus eſſe ſolet.

Lineæ Capitales, Collares, Cortina & Alæ etiam ſic & faciliùs determinantur. $\frac{1}{3}$ EF dat Capitales EN, FM, lineas item colli NA, MB dabit $\frac{1}{2}$ NM, ſeu EF. Manetque pro Cortinâ AB etiam $\frac{1}{3}$. Alas ex A & B erectas determinabunt rectæ ME, NF, atque ita prodibunt etiam Facies ED, FC.

His peractis delineatum eſt Cornutum opus, quale ſolet Cortinis prætendi in Munimento regulari. Delineatio reliquorum ſimili fere methodo peragetur, habitâ ſemper loci ratione.

NOTA. *Duplicem in hiſce inuolui praxim, 1 vt determinetur Cortina à Faciebus, 2 vt Facies à Cortinâ. &c.*

IV. Vtilitas.

Qood ſi Rauclini, Semilunæ, & Cornuta circum locum regulariter communitum extruantur munitio perfectiſſima habebitur, quorum vtilitas in his poſita. 1. Hoſtem longiùs à Munimento arcent. 2. difficillimè capiuntur: defenduntur enim ex Cortinâ, Propugnaculis, operibus adiacentibus, & ab ipſâ quandoque Loricâ ſuburbanâ. 3. occupata difficillimè retinentur, quia versùs Munimentum tota patent. 4. Brachijs hoſtium acceſſorijs ſunt infeſtiſſima Cornuta, & ſub eorum tutelâ licebit obſeſſis Brachia repugnatoria moliri, dum res feret &c.

PROPOSITIO IV.

De Forcipulis.

1. *Definitio & ſpecies.*

SVnt Munitiones externæ quæ hoc ferè tantùm differunt à Cornutis quòd pro duobus dimidiatis Propugnaculis angulum externum ſolum habeant illæ quæ dicuntor Simplices, vel duos externos cum vno interno, ac tum Duplices appellantur. Simplicem exhibet figura 12, Duplicem 13.

Eſt porro angulus ille externus qui extra figuram eſt, & cuius latera introrſum flectuntur: internus qui intra figuram lateribus foras procurrentibus continetur.

II. Locus.

Idem qui Cornutorum. Vix tamen expediet prætendi Propugnaculis ob earum imbecilitatem, de quo *num.* 4.

III. Delineatio.

Fig. 12. Simplicem ſic deſcribes. 1. Duc latera AC, BD eodem modo qoo in delineatione Cornutorum 1. præſcriptum eſt; niſi quod breuiora eſſe ſoleant 40 videlicet aut 50 pertic.

2. Iunge CD, quam biſeca in F, & ex F demitte normalem FE parem $\frac{1}{4}$ ipſius CD, & iunge CE, DE. Habes Forcipulam ſimplicem.

Fig. 13. Duplicem ita delinea. 1. ductis lateribus AC, BD, vt ſupra iunge CD: quâ biſectâ in G ex G erige perpendicularem GE parem $\frac{1}{4}$ CD, & iunge CE, DE.

2. Produc EG in F, donec GF ſit dimidia GE, rectiſque CE, DE biſectis in K & H iunge FK, FH. Erit ACKFHDB forcipula duplex.

I*V. Robur & Vſus.*

Multum cedunt Cornutis, quare tum fere tantùm videntur adhibendæ cum temporis premunt

munt anguſtiæ. Forcipum porro omniſque externi anguli defectus hic eſt, quòd circa ipſum angulum quadrangulum quoddam ſpatium hoſti præbeat , intra quod nullis defenſorum telis exponatur. Determinatur illud ſpatium ſi acelíues Loricę Facies externæ concipiantur produci donec campum ſecent. Eius capacitas ferè æquat perticas quadratas 23, quod facilè computabitur. Cùm igitur in primas Architecturę leges ita peccet hoc genus ſtructuræ, neceſſarium ferè erit illi Parmulam objicere.

Geminatæ forcipes cùm duplicem habeant externum angulum K & H, etiam duplicant defectum iam expoſitum, quare rarior illarum eſt vſus.

Orthographia, & Ichnographia

Eadem quæ Rauelinorum.

PROPOSITIO V.

De opere Coronato.

1. *Definitio.*

OPus Coronatum dicitur qood vtrimque bina habet dimidiata Propugnacula, in medio vnum vel plura integra. Eſt igitur pars alicuius Munimenti regularis. Appellationem inde ſortitur quòd partem Munitionis circum cingat. Exhibetur in *Fig.* 14. *Fig.* 14.

II. Locus.

Idem qui operum Cornutorum: quamuis maiorem Munimenti partem poſſit tegere Coronatum, quàm Cornutum. Subinde etiam circumducuntur operibus Cornutis. Vſus eorum præcipuus eſt vt loca vicina, vrbi infeſta (vt colliculis &c.) includant, hoſtique præripiant.

III. Delineatio.

Cùm ſit pars plerumque alicuius Munimenti regularis, diſpiciat Architectus, quòd polygonum loco, qui cingi debet, ſit aptiſſimum. Quod vbi fuerit aſſecurus , eius Munimenti, quod ſupra polygonum obſeruatum exſtruitur , tot Propugnacula delineet, quot locus requiret. Illud modo obſeruet, vt anguli dimidiatorum Propugnaculorum, non ſint minores 60 gradibus , nec maiores 90. Solent etiam Propugnacula fieri minora quàm Munimenti Principalis. Sed exponamus ſpecialiùs conſtructionem Coronati vnum habentis integrum Propugnaculum.

Deſcriptio tota perficitur in hunc modum. Producatur indefinitè Capitalis Propugnaculi, aut ſi Cortinę objicienda eſt Corona, ex medio Cortinę puncto perpendicularis ducatur indefinita. In Capitali productâ numerentur ex B in D 40 circiter perticæ Rhynl. In perpendiculari Cortinæ numerari poſſunt 60, aut 70; ſic enim adhuc Coronati latera erunt intra muſquettæ ictum venientem ex Propugnaculis Munimenti.

Deinde fiat ad rectæ BD punctum D angulus BDI, alicuius multanguli dimidiatus, itemque ad partem alteram angulus BDK. Tum in horum angulorum lateribus ex D in I & K numerentur perticæ 40 aut 50 aut ad ſummum 60. & termini I ac K connectantur cum Alis Propugnaculi. Ita prouenient Coronati latera MI, LK per Loricam ſuburbanam determinata.

Quod ſi latera MI, LK 60 perticas, id eſt ictum muſquettæ, excederent, muniendi erunt anguli BDI, BDK (ſic tamen vt totus IDK maneat recto maior) aut certe (quod plerumque conſultiùs) longitudo BD decurtanda.

Videatur deinde cuius figuræ regularis angulo par aut proximus ſit angulus KDI. Ponamus ex.gr. ſeptangulæ. Igitur fac intra KDI vnum integrum Propugn. & duo dimidiata figuræ ſeptangulæ.

Si plura integra velis mediare Propugnacula, latera Coronati vndecumque educantur, modò ictum teli non excedant, intraque illa Munimenti regularis pars exſtruatur, vt dictum ſupra.

Regulæ generales Præmunitionum.

1. Sint intra iactum teli è Munimento venientis.
2. Earum altitudo non ſit maior quàm vt ſtringi commodè poſſit campus hoſtilis.
3. Remotiores propinquioribus ſint humiliores.
4. Sicca foſſa nullas habeat præmunitiones niſi Cornuta, ſi videbitur: aquea patmulas habeat, & Cornuta, Lunulas vix ſine damno admittet.

PARS II

De Munimentis Irregularibus.

CVm pleræque ciuitates irregularis figuræ ſint, patet quanta huius partis vtilitas, imò neceſſitas ſit. Rem omnem breuiter complectar Capitibus ſequentibus.

CAPVT XIV.

Partes Munitionis irregularis.

LOcis irregularibus muniendis hæc opera inſeruiunt: Propugnacula ordinaria, Propugnacula duplicata & triplicata, Propugnacula furcata, Propugnacula plana, Propugnacula dimidiata, Rauelini, Mediæ Lunæ, Opera Cornuta, Coronæ, Forcipulæ, Anguli externi, Forcipulæ angulares, Moles planæ, Moles planæ dimidiatæ, Defenſiones mediæ, ſeu dentatæ, Reſciſſiones.

Nonnulla ex his quæ nimirum regularibus etiā Munimentis roborandis adhiberi ſolent, iam expoſuimus. Et quamquam conſtructiones illic traditæ regularibus Munimentis ſint propriæ, ex his tamen facilè intelligitur quomodo dato loco irregulari ſint accommodandæ, iam quæ ſuperſunt hoc capite erunt explicanda.

I. Propvgnacvla dvplicata, aut triplicata, vocatur moles ex pluribus Propugnaculis ſupra inuicem collocatis compoſita. Exhibetur *fig.* 15. Exſtruuntur in locis accliuibus
Fig. 15. vt hoſtis aſcendens, cùm tangi amplius nequit ex infimo, impeti poſſit ex ſecundo, ac demum ex tertio. Horum rarus eſt vſus.

II. Propvgnacvla fvrcata, ſeu secta voco quorum angulus (E) truncatus eſt &
Fig. 16. mutatus in angulum externum FKG. Huiuſmodi in *fig.* 16 eſt moles ACFKGDB. Vſui ſunt cùm angulus Propugnaculi nimium acutus eſt.

III. Propvgnacvla dimidiata habes in Opere Cornuto *Fig.* 10, & Coronato *Fig.* 14. Vſui ſunt non tantùm in operibus Cornutis & Coronatis, ſed etiam aliis locis pluribus, vt dicemus infra. In his obſerua ne angulus ſit nimium acutus, & latus planum Defenſione deſtituatur.

Fig. 17. IV. Angvlvs externvs, eſt qui à duabus lineis versùs centrum loci introcedentibus conſtituitur, Gallicè *angle retiré*. Contra internus angulus eſt qui fit à lateribus à centro loci procurrentibus versùs campum, Gallicè *angle auancé*. In *Fig.* 17 anguli externi ſunt A, L, C, E, G &c. interni B, D, F &c. Externus angulus ſi nimis obtuſus non ſit, ſatis eſt fortis cùm eius latera ſeſe mutuo ſtringant: ab eoque petitur defenſio Forcipulæ & Propugnaculi furcati. Illius defectum indicauimus ſuperius.

Illum ſic nonnulli extollunt vt locum angulis internis externiſque cinctum æquent Munito Propugnaculis, Sed audiendi non ſunt 1. enim ſemper accidit, vt quando locus angulis externis, interniſque alternatim poſitis cingitur, interni aliqui nimis obtuſi ſint, vt A, L; externi verò nonnulli nimium acuti. Quod noxium vtrumque eſt: hoc quidem quia reddit angulum facilè Tormētis hoſtilibus detruncabilem, illud verò quòd ſtrictionem imminuat eò magis quò propiùs ad rectam lineam acceſſerit. 2. habent etiam interni anguli hoc eſſentiale incommodum, quod hoſtis, cùm prope ad angulum ipſum acceſſerit, impeti nequeat intra ſpatium notabile, vt oſtendimus ſupra; quo vitio carent Propugnacula. Denique 3. externi anguli locum minuunt & circumferentiam loci augent, quod vtrumque vitioſum.

Fig. 18. 19. V. Forcipvlæ angvlares adhiberi ſolent muniendo externo angulo acuto, vel recto, minus commodè obtuſo: harum quippe præſidio occurritur vitio ſecundo ſupra indicato: Conſtrues hunc in modum.

Latera

Latera anguli AB, EB produc ad 8 aut 10 paſſus in K & N. Et iunge KN. Deinde erige KE, NG parallelas ad BA, BE: item CE, DG parallelas ad BE, BA quæ prioribus occurrant in E, G. Si ſpatium omne lineis CEKNGD contentum vacuetur: habes forcipulam quæſitam.

Alij ſic conſtruunt. Omiſsâ lineâ KN trianguloque FBN relicto, euacuant ſolummodo CEFB, BNGD ſpatia. Sed prior videtur præferenda. Quia in hac non ſolùm ex Alis EK, GN habetur defenſio, ſed etiam ex KN quæ quaſi parua quędam Cortina eſt, altera verò hac defenſione caret & latera BF, BN ad defenſionem fere inutilia ſunt. Quod ſi muro (vt fieri plerumque debet) incruſtanda ſit, labor duplicatur & ſine fructu, quia FB, BN maiores ſunt quàm FN; &, vt dixi, inutiles. Super extremitates laterum anguli qui forcipulâ munitus eſt, fieri ſemper ſolent. Propugnacula dimidiata (X, Z). Fig. 19.

VI. Moles planæ, inſeruiunt muniendis externis angulis obtuſis; acutis & rectis minus aptæ: Conſtrues hunc in modum. Fig. 20.

Ex lateribus anguli externi EBD abſcinde rectas BA, BC 25 aut 30 paſſuum, iiſque pares erige normales AH, CI; & iunge HI. Erit AHIC moles plana, cuius Alæ AH, CI ſtringent anguli latera AE, CD, & ſtringentur ab iiſdem: frons autem HI ſtringetur ab NE, MD laterum ſegmentis quæ vtrimque frons producta abſcindit. Debent igitur anguli latera eſſe tam longa vt frontem HI vtrimque productam ſecent, & partes NE, MD ſint quantitatis notabilis, ne aliàs frons defenſione careat.

Hæc munitio melior eſt quàm forcipulæ, quòd locum augeat, & reſciſſionum magnarum ſit capax.

Si auriculas deſideras, ſume HK, IL, $\frac{2}{3}$ Alarum, ac ſuper his eas conſtrue. Reliquæ partes AK, LC ſingula $\frac{1}{3}$ Alarum, dabunt Alas coopertas.

VII. Molem planam dimidiatam, exhibet *Fig.* 21. Vſui eſt quando anguli externi (ABE) latus vnum (BE) longius eſt altero, & ita longius vt ictum muſqueti excedat. Fig. 21.

VIII. Anguli interni, *Angles avancés*, aſſumi poſſunt loco forcipulæ angularis & molis planæ ad muniendos externos angulos, ſiue acuti illi ſint, ſiue obtuſi. In exemplo ſit angulus externus BAC: commode hic munietur extructo angulo interno DFE. Vbi hoc obſerua: partes interceptas AD, AE tantas debere eſſe vt ſegmenta laterum reliqua non excedant ictum muſquetæ. Fig. 22.

IX. Defensiones mediæ, ſiue simplices, exhibentur in *Fig.* 23, 24. Vſui ſunt quando latus aliquod Munimenti defenſionem aliam nequit admittere. Item vtiliter adhibentur in Loricâ extimâ, quorumdã iudicio. Alij malunt abeſſe Defenſiones media, ſiue ſimplices quòd CD, EF &c. ab vnâ tantum Alâ ſingulæ ſtringantur CB, ED &c. ſecus ac ſit in Cortinis, quæ inter duo Propugnacula ſint poſitæ. Fig. 23. 24.

X. Resectio (*Retrenchement*) eſt pars abſciſſa à toto opere, quod tueri diutiùs nequeas ſimilis toti. Cornutorum operum ac Propugnaculorum reſciſſiones exhibet *Fig.* 25. ad quarum idæam facilè perficientur cæteræ. Fig. 25.

XI. Reſtat vt planorum Propugnaculorum conſtructionem exponamus. Propugnacula illa dicuntur plana, quæ fiunt non ſuper angulos, ſed ſupra rectam lineam. Adhibentur muniendis aggeribus, ripis fluminum, Cortinis nimis longis &c. quamquam dum muniendis Cortinis adhibentur, conſtructio aliquantùlum diuerſa ſit, vt dicetur infra. Fig. 26.

Horum conſtructioni triplici modo perficiendæ ſeruit Tabella appoſita. Primus modus debetur hexagono, ſecundus octangulo, tertius nonangulo & maioribus nonangulo.

	Cortina.	Collum.	Ala.
Mod. 1.	480.0.0.0.	169.7 0.6.	90.0.0.0.
Mod. 2.	480.0.0.0.	169.7.0.6.	110.0.0.0.
Mod. 3.	480.0.0.0.	169.7.0.6.	120.0.0.0.

Conſtructio ſic fiet. Data ſit linea recta AZ quam munire oporteat vbi iuxta 2. modum, 1. quære in tabulâ Cortinam, reperies 480. pedes Rhenenſes, quos abſcinde ex AZ & ſint AB. Pari modo quære in tabulâ lineam Colli, reperies pedes 169. 7. 0. 6. hos abſcinde bis ex BZ, ſintque BC, CD. & nota punctum C. Deinde abſcinde rurſum Cortinam DE & lineas Colli EF, FG, & ſic deinceps progredere pro numero Propugnaculorum quibus indiges. 2. ex tabulâ quære Alas, reperies 110, quos erige normaliter ex B & D, ſintque BK, DL & iunge KL: quam biſeca in N, & ex N erige perpendicularem NI parem lineæ Colli CB. Tandem iunge KI, LI, habes Propugnaculum planum BKILD cuius ª angulus I rectus

ª patet ex conſtr. & elem. lib 1. prop. 5. & 12.

eſt. Pari modo fient & reliqua. Cæterarum partium proportio ex hac conſtructione exſurget, qualem exhibet Tabella altera hic appoſita.

	Facies	Ala Cortinæ	Defenſ.Stringens.	Defenſ.Figens.	Ang.Propugn
Mod.1.	240	390	367.2.7.9.	699.6.8.9.	90
Mod.2.	240	370	795.5.6.3.	707.3.5.7.	90
Mod.3.	240	360	409.7.0.5.	711.3.7.0.	90

CAPVT XV.

Quomodo locus irregularis regulariter muniatur.

LOca irregularia duplici modo communiri poſſunt, regulariter nimirum aut irregulariter. Dicitur locus irregularis regulariter muniri quando ſic immutatur, vt fiat regularis, aut ſi reduci ad regularitatem nequeat, regularis illi figura circumſcribitur. Locus autem irregularis munitur irregulariter quando figura loci ad regularem non reducitur.

PROBLEMA I.

Datum locum irregularem, propoſitum ſit regulariter munire.

1. DEſcribe ichnographiam loci muniendi, & obſerua ad quam figuram regularem propiùs accedat, ad eamque reducito ad quam accedere propiùs deprehenderis. Reductio autem illa ſic fiat, vt partes eæ omnes veteris circumferentiæ retineantur, quæ vſui vllo modo eſſe poſſunt. Reliquæ nouo ambitu vel excludi debent ſi locus amplus eſt, vel includi potiùs ſi capacitas mediocris tantùm ſit. Locus deinde hunc in modum reductus iuxta leges Munimentorum regularium munietur.

2. Quod ſi figura loci adeò irregularis ſit, vt reduci ad regularem figuram nullam poſſit, circumſcribere oportebit figuram regularem. Vt autem ſcias quot laterum figura circumſcribi debeat, metire radium loci maximum quem vis includere. Tum adi tabulas Munimentorum regularium, & obſerua cuius figuræ radio tuus radius aut æqualis aut proximus ſit. Et cuius figuræ radium eſſe deprehenderis, eam circumſcribe.

CAPVT XVI.

Quomodo locus irregularis habens angulos & latera apta, irregulariter muniendus.

LOcorum irregularium anguli alij dicuntur apti, alij inepti. Similiter & laterum quædam apta, quædam inepta.

Angulus aptus eſt qui 90 gradibus non eſt minor; ineptus qui minor. Nam Propugnaculi impoſiti angulus ſi debita reliquarum proportio partium ſeruetur, minor tum exiſteret gradibus 60. Externi quoque anguli ad ineptos pertinent.

Latus aptum eſt quod abſciſſis vtrimque lineis Colli quadrato debitis relinquit pro Cortinâ non minus 300 pedibus, neque plus 500. Latus ineptum eſt quod relinquit plus 500. ped. aut minus 300. Dogenus ineptum eſſe ſtatuit quod minus latere figuræ quadratæ regularis. Quære igitur lineas Colli Munimenti quadrati, eaſque abſcinde vtrimque à lateribus ſingulis; ſi reſidua non minora ſint 300 pedibus, & non maiora 500, latera erunt apta.

PRO-

PROBLEMA I.

Datus ſit locus Z irregularis angulos & latera habens apta, quem oporteat irregulariter munire.

Fig. 27.

1. INquire inſtrumenti adminiculo minimum loci angulum qui ſit A; tum obſerua cuius figuræ regularis angulus circumferentiæ minimo angulo ſit æqualis aut proximè minor. Statuamus eum eſſe angulum quadrati.

2. Quære igitur in tabulis *cap.* 5 lineas Colli quæ quadrato inſeruiunt, quæ à lateribus abſciſſæ ſint AH, AH. Item quære Alas quadrati quæ normaliter erectæ ex H, H ſint HG, HG. Tum angulo A biſecto rectâ infinitâ AQ, ab eâ abſcinde lineam AF Capitalem quadrati ſimiliter inuentam ex tabulâ: & iunge FG, FG: habes HGFGH Propugnaculum Munimenti quadrati. Vbi nota ſi angulus minimus eſt 100 grad. aut inter 100 & 108, Alis dandos pedes 70.

3. Supra reliquos angulos ſi itidem feceris propugnacula quadrato debita, perfecta erit loci munitio.

4. Si Cortina & Alæ in Cortinâ ſint alicubi nimis parua, iſthic fac Propugnaculum figuræ regularis proximè minoris, donec habeatur Cortina ſatis longa. Licebit etiam, ſi Ala Cortinæ ſit nimis breuis, minuere angulum Propugnaculi, saluâ tamen illius iuſtâ magnitudine. Contra augere poteris Propugnaculi angulum ſi Ala Cortinæ eſſet valde magna.

5. Anguli valde magni, qui nimirum maiores ſunt 150 gradibus, munientur vt latera recta, hoc eſt ita munies vtrumque anguli latus tamquam vna Cortina foret. Modus tradetur infra.

6. Si conſtructis ad eum modum, duce angulo minimo, Propugnaculis, Cortinæ & Alæ Cortinæ eâ ſint longitudine, vt decurtari poſſint ſaluâ earum debitâ quantitate, tunc angulos Propugnaculi licebit augere, augendo vel Alas vel lineas Colli, vel ſimul vtraque, atque ita tolles ſi quid huic modo inſit incommodi, neque iam erit quod damnare Dogenus poſſit, neque opus erit operoſâ linearum inuentione nouâ per regulam proportionum.

PROBLEMA II.

Idem aliter efficere.

1. METire ſingulos loci angulos, & vide quarum figurarum regularium angulis æquales ſinguli ſint aut proximè maiores.

2. Super ſingulis dati loci angulis conſtitue Propugnacula, lineis Colli, Alis, Capitali, deſumptis ex figuris iis, ad quarum circumferentiæ angulos proximè accedunt ſinguli anguli loci dati.

Res exemplo illuſtrabitur. Ponatur angulus A proximè reperiri minor angulo quadrati. Supra hunc fac Propugnaculum quadrati. Angulus deinde B ſit proximè maior angulo hexagoni. Oportebit igitur ſupra B conſtruere Propugnaculum hexagoni; & ſic deinceps.

3. Quod ſi extructis hunc in modum Propugnaculis v. g. ſupra B hexagoni, ſupra C pentagoni contingat Cortinam LK notabiliter breuiorem eſſe 300 pedibus, conſtitue ſuper B Propugnaculum pentagoni & ſuper C quadrati. Si Cortina nondum æquet 300 pedes, etiam ſuper B Propugnaculum quadrati facies. Quod ſi tum adhuc 300 pedibus Cortina ſit minor, latus CB erit ineptum. *Fig.* 27.

PROBLEMA III.

Idem adhuc aliter efficere.

TErtius modus hic eſt (*fig.*27) Si angulus loci notabiliter differat ab angulo proximæ figuræ regularis, tum iiſdem datis quæ in aliquo ſex modorum *cap.* 5, inueniantur pro ſingulis angulis A, B, omnes anguli & lineę vt fecimus ibidem in munitione regulari. Dogenus *pag.*204 videtur præferre pro hoc negotio modum 3 *cap.* 5. *Fig.* 27.

2. Supra angulum A fac Propugnaculum, aſſumptis lineis Colli, Capitali, Alis, quas inuenisti pro angulo A. Similiter ſupra angulum B fac Propugnaculum aſſumptis lineis Colli,

Capitali, Alis, quas inueniſti pro angulo B; & ſic in reliquis angulis C,D,E.

3. Si ordinatis hunc in modum Propugnaculis, inueniatur Cortina nimis breuis, occurrendum erit huic vitio fere vt *num.* 3 *probl.* 2.

4. Munitâ demum hunc in modum figurâ, prout circumſtantiæ variæ poſſunt exigere, liberè immutari poterit proportio Alarum, Facierum, anguli Propugnaculi &c. modò in canones *cap.* 3 fixos non peccetur. Tabulas habet Dogenus poſt *pag.* 200. Hic modus colligitur ex Dogeno.

CAPVT XVII.

Quomodo locus irregularis habens angulos & latera inepta muniri debeat.

PROBLEMA I.

Loci irregularis (A) angulos ineptos munire.

Fig. 28. 1. SI angulus SIB ſit tantùm paulò minor recto, extrue ſuper eo Propugnaculum quadrati, atque huius angulum Q (erit enim iuſto minor) abſcinde factâ forcipulâ, ſeu externo angulo NOP. Alij, quando angulus mediat inter 80 & 90 gradus, malunt opus Cornutum præſtruere. Optimum iudico ſi vtrumque coniungatur.

2. Si angulus (BCH) fuerit minor 80 gradibus, ſed maior 60; opere Coronato cingatur. Alij angulum ipſum præſcindunt, ſi prope ad 60 gradus accedat & in forcipulam mutant DFE. Optimè conſulet Munimento qui vtraque coniunget.

3. Si angulus aliquis v.g. SGH reperiatur minor 60 gradibus, mutetur figura loci ducto nouo latere GRC quòd angulos iuſtæ magnitudinis cum vtroque latere SG & BC conſtituat.

4. Licebit etiam non rarò ineptum angulum ſi 60 gradibus non ſit minor, mutare in Propugnaculum integrum vel dimidiatum; aut in Patmulam, vel Caſſidem, aut eum truncatum conuertere in Forcipulam, vel potiùs in Cornutum.

PROBLEMA II.

Loci irregularis angulos externos munire.

Fig. 29. DAtus ſit irregularis loci angulus externus ABC quem munire oporteat.

1. Si extremitates laterum A & C à ſe mutuo diſtent neque minùs 518 pedibus neque plus 826, ſupra angulos A & C conſtrue Propugnacula integra, vt docuimus *capite* 16. *probl.* 1. & 2.

2. Si diſtantia extremitatum A, C ſit maior 826 pedibus angulo externo B inſuper Rauelinus, aut Cornutum, aut vtrumque præſtruatur. Fieri etiam in lateribus poſſent defenſiones mediæ (de quibus *cap.* 5. *num.* 9.) adiecto inſuper Rauelino.

Fig. 30. 3. Si diſtantia extremitatum A, C minor ſit 518 pedibus, fiant duo dimidiata Propugnacula pro defenſione laterum AS, CR: angulo autem externo ABC Rauelinus maior præſtruatur.

Fig. 28. 4. Denique omnium optima externi anguli munitio habebitur, ſi ducto latere nouo GC loco includatur; ac tum anguli BCG, SGC lateruſque GC muniantur iuxta modum *cap.* 16 traditum, ſi apta ſint; ſi inepta, iuxta methodum hoc capite iam partim traditam, partim tradendam.

PROBLEMA III.

Dati irregularis loci latera nimis longa munire.

Fig. 31. 1. LAtus nimis longum ſit AB. Metire minimum loci angulum, A & obſerua vt ſupra ad cuius figuræ regularis angulum circumferentiæ proximè accedat: ponamus accedere proximè

proximè ad angulum pentagoni. Et biſariam ſeca latus AB in G: abſcinde item lineas Collares pentagoni AO, BN. Quoniam pentagoni angulo poſuimus proximum eſſe angulum minimum A. His peractis, ſi reſidua GO, GN ſint non minora 300 pedibus, nec maiora 500, conſtitues ſupra medium Cortinæ punctum G Propugnaculum planum, iuxta methodum traditam *cap.* 14. *num.* 1 t, in quâ hoc ſolùm muta, vt lineæ Colli GI, GH æquales ſumantur lineis Collaribus AO, BN Propugnaculorum angulis vicinis impoſitorum.

2. Si latus aliquod v. g. AL tantæ longitudinis ſit, vt ipſo in plures partes æquales Lϖ, ϖϑ, θA diuiſo, abſciſſiſque lineis Colli Aβ, θζ, θλ, ϖω, ϖφ, Lδ Cortinæ intermediæ δφ, ωλ, ζβ ſint non minores 300 pedibus, neque maiores 500, plura ſupra latus AL Propugnacula plana conſtitues.

3. Latus cui duo Propugnacula non ſufficiunt, tria verò abundant, potiùs duobus magnis, quàm tribus paruis muniatur.

4. Si latus nimis longum ne vnum quidem Propugnaculum planum admittat, Rauelinis aliiſque operibus Cortina muniatur, ſed eorum orthographia communi ſit fortior.

Nota. Vniuerſim latera nimis longa & nimis breuia vel corrigi poſſunt vel non. Corrigi poſſunt quando nimis longa decurtari poſſunt & nimis breuia produci. Faciendo v.g. ex trypezio quadr. Licebit quoque lateri nimis longo angulum ſuperſtruere qui duo noua latera iuſta exhibeat.

PROBLEMA IV.

Dati loci irregularis latera nimis breuia munire.

1. SI plura latera minora ſint 300 pedibus; immutetur figura, & muniatur iuxta modum aliquem hactenus traditum.

2. Si figura loci immutari nequeat, vel Cortinæ Parmulis muniantur, quarúm orthographia ſit fortior ordinariâ, vel anguli cingantur Operibus Coronatis. Mutari etiam poterunt in Forcipulas aut Cornuta, aut vno Propugnaculo obumbrari.

3. Si latus muniendum abſciſſis vtrimque lineis Colli quadrato debitis, minus ſit 300 pedibus, non exſtruentur Propugnacula ſupra angulos adiacentes dicto lateri, quamuis aptè eſſent, ſed aliis operibus externis munientur. Et quidem ſi anguli medient inter gradus 90, s 20 Opus Cornutum perſtruatur: ſi maiores 120 gradibus in ipsâ foſsâ Rauelini, ſiue Propugnacula abſciſſa, angulis obiiciantur.

4. Emendatur etiam ſubinde latus nimis breue, eademque latera vicina nimis longa, ſi Propugnacula fiant irregularia quorum Colla ferè tota reiiciantur in latera longiora.

PROBLEMA V.

Vrbes antiquæ quî muniendæ.

1. VAllum antiquum ſi robuſtum ſit & muro ac turribus cinctum, minimè diruendum: Nouâ igitur munitione circumda, quæ ſi fieri poſſit, regularis ſit, aut quàm proximè ad regularem accedat. Inter Munitionem nouam & foſſam veterem pomerium ſatis amplum relinquatur ad militares vſus neceſſarium.

2. Si munitio antiqua ſit terrea, aut ſine magno labore ac ſumptu emendari poſſit, procedatur iuxta regulas Munitionis irregularis hactenus traditas. Pleræque vrbes Gallicæ, Belgicæque, Parmulis, Caſſidibus, Cornutis aliiſque prætenturis ſunt communitæ: quarum ſtructura cùm Propugnaculorum ſuppleat vices, robuſtior ſit oportet. Non rarò Loricâ promurali, & Viæ Tectæ Loricâ, & foſsâ Loricam extimam ambienti, ſudibuſque circumdatâ, muniuntur.

Corollarium.

Ex tribus præcedentibus capitibus intelligitur quâ methodo quæuis irregularia loca munienda ſint, ſiue omnibus ſimul defectibus ſupra memoratis laborent, ſiue non omnibus. Illud porro in munitione cuiuſcumque irregularis loci obſeruandum eſt, vt ichnographiam loci deſcriptam habeat, vt ſic melius poſſit diſpicere quæ muniendi forma & quæ opera loco

dato maximè conueniant. Cæterum quemadmodum figura quæ munitur, irregularis eſt, ita etiam Propugnacula, Opera Cornuta, Rauelinus &c. irregularem non rarò figuram ſortiuntur, loco id exigente.

CAPVT XVIII.

Reliqua ad munitiones irregularium pertinentia.

QVædam ex dicendis communia ſunt etiam regularibus. Commodè ſimul omnia hoc loco expediemus.

1. Loca quibus vicinius Mons, aut Collis altior dominatur, ad muniendum inepta ſunt. Aut igitur Collis mẹniorũ ambitu includendus, aut ſi includi nequeat, prouidendũ omni ſtudio eſt, ne ab hoſte occupetur: quod fiet ſi Munimento nouo ac firmo inſideatur; aut cùm id fieri non poterit, ſi Propugnaculo Cortinæúe, cui Collis imminet, Collis viciſſim Tormentarius imponatur. Si arces ſeu vrbes montibus ſunt inædificatæ, quibus à ſuffoſſione periculum eſt, radices montis munitionibus ſunt includendæ.

2. Portarum locus commodiſſimus & tutiſſimus eſt inter duo Propugnacula in Cortinæ medio: nullo enim loco certiùs ac faciliùs defenduntur. Pari de cauſâ flumina vrbem interſecantia tutiſſimè excipiuntur inter duo Propugnacula.

3. Ad magnas vrbes in officio continendas nihil aptiùs eſt quàm arcem adiungere eo loco vnde ciuitatem ſibi obnoxiam habeat. Circa harum conſtructionem ſitumque hæc obſerua. 1. Fortiſſimum vrbis locum occupent. Quare ſi mons aut rupes intra vrbem ſit, ibidem conſtruatur. Ita Namurci, Cameraci, Neapoli alijſque in locis factitatum. 2. Præcipuum ad vrbem acceſſum, cuiuſmodi ſunt portus &c. inſideat, & obnoxium habeat. 3. Sit pentagona, hæc enim figura aptiſſima: nam quadrata & imbecillior eſt & minus capax; figuræ reliquæ pentagonâ maiores capaciores ſunt quàm ſit neceſſe & nimis ſumptuoſæ. Arces pentagonas habent Antuerpia, Turinum, Ambianum, Vitriacum, Phaltzburgum, Stenaia, plurimæque aliæ: hexagonas Mediolanum, Perpignianum, Caſalia. Septangulas Manhemium, Verodunum, Blauetum. 4. ita collocandæ vt duo Propugnacula vrbi obuertant, tria campo. Atque vna ciuitatis Cortina AB arcis Cortinæ T occurrat inter bina Propugnacula C, G. Quorum alterum C, ciuitatem, alterum G hoſtem reſpicit, vt expreſſum habes in *fig.* 32. Poſtremum illud non leue commodum adfert, ſic enim Propugnaculum G ex Cortinâ vrbis validè defenditur, ipſa etiam vrbis Cortina ſtringitur ex arce. Vnde vehementer errant, qui arces longiùs ſemouent ab vrbibus. 5. Portas habeant ad minimum binas vnam versùs vrbem, alteram versùs campum, per quam induci poſſint ſuppetiæ cùm opus fuerit. 6. Inter arcem & domos vrbis planicies intercedat iuſtæ magnitudinis. Exemplum arcis omnibus numeris abſolutæ præbet Antuerpiana. Hæc enim binis Propugnaculis vrbem habet obnoxiam, binis Scaldim præterfluentem ſtringit, tribus campo dominatur. Cæteris quoque omnibus, ſiue ad formam, ſiue ad ſitum ea pertineant, inſtructa eſt.

Fig. 32.

4. Vrbium latera quæ fluuijs alluuntur, ſufficiet leui opere munire, vel ſimplici nimirum externo, internoúe angulo, vel defenſionibus medijs quas terminant dimidiata Propugnacula. Latera rectè munies Operibus Cornutis loco accommodatis. Vide *figuram* 33. Portus non ſolùm oſtia, ſed etiam latera longiora munitionibus firmanda. Si vrbs ab amne ad muſqueti iactum diſtet, eum ſibi arce ſtructâ coniunget.

Fig. 33.

5. Ripa vrbi oppoſita, ſi intra muſqueti ictum diſtet, ſitque in amicò ſolo minùs operosè munienda, dimidiatâ nimirum ſtellâ ſexangulâ, aut Propugnaculo plano. Si eſt in hoſtili ſolo; aut quamuis in amico extra tamen jactum muſqueti, dimidiato hexagono regulari, cuius latera Cornutis protegantur, alijſque operibus communies. *Exemplum* habes in *Fig.* 34. Huius rei neglectu perijt Neomagum. De his omnibus vide plura apud Dögenum *lib.* 2. *cap.* 8.

Fig. 34.

Finem Munitioni irregulari imponant ſequentes regulæ, quarum magnus toto hoc in negotio vſus.

I. Munitio irregularis ad regularem omnino aut quàm proximè reducatur.

II. Sit circumquaque quantum fieri poterit æqualis, ſeu æquè firma.

III. Munimentum eodem vallo ſeu ambitu capacius, præferatur minus capaci.

IV. Latera introrſum ſinuata, hoc eſt angulum externum continentia, vitentur, quia locum minuunt & maiori ſumptu exſtruuntur.

V. Propugnacula poſſunt eſſe irregularia & diſſimilia. Ea enim munitio habenda eſt formoſiſſima, quæ fortiſſima.

VI. Pro-

VI. Propugnaculorum diſtantia (iuxtà Dogen *pag.* 188.) minima ſit Pertic. Rhynl. 60, maxima 80.

VII, Angulus Decuſſationis quantum fieri poteſt, ſit ex aduerſo medietatis Cortinæ.

VIII. Imminenti colliculo, aut flumini in foſſam vrbis illabenti, Cortinam potiùs obijcit quàm Propugnaculum, hoc enim illa fortior eſt.

PARS III.

DE OPPVGNATIONE ET DEFENSIONE.

OPpugnationis quinque ſunt actus, Circumuallatio, Acceſſus & Suggeſta Tormentorum, Perforatio Loricæ extimæ, Vinea, Valli per Cuniculos diffractio.

Primò igitur locus qui oppugnari debet, Vallo perpetuo omnis generis operibus communito ita clauditur, vt exitus vel introitus nullus pateat. 2. Per foſſas infra horizontem depreſſas varijſque flexibus ita ductas, vt ſtringi è loco obſeſſo numquam poſſint, ad Loricam extimam penetratur. 3. Lorica extima ductu iam non amplius obliquo, ſed breuiſſimo, hoc eſt directo, perfoditur. 4. Impletur foſſa aggere per eam ad Vallum vſque perducto cui deinde Vinea imponitur. Si foſſa eſt ſicca, Vinea nonnumquam ſubterranea ad locum Cuniculo deſtinatum dirigitur. 5. Per Vineam iam abſolutam, abſque periculo ad Vallum foſſores accedunt, & ſcrobem effodiunt, pulueriſque nitrici eam quantitatem deponunt quæ moli ſuperſtanti diffringendæ ſufficiat. Quo deinde accenſo, Valloque diffracto, milites per Vineam ad ruinam ducuntur vt in vrbem iam patentem irrumpant. Hæc Oppugnationis eſt ſumma, cuius partes ſeorſim ſingulas & breuiter exponam.

CAPVT XIX.

De Circumuallatione.

CIrcumuallatio conſtat Caſtris, Lineis, & Munitionibus omnis generis. Ipſa quoque Caſtra, quæ quaſi minores quædem circumuallationes ſunt, poſtrema duo complectuntur, Lineas nimirum & opera varia.

PROPOSITIO I.

Caſtrorum Diſpoſitio.

1. CAſtra (*Quarteria* vulgo appellant) ijs locis conſtituantur, vbi facilior externo hoſti eſt aditus.

2. Ne ſint eo loco vbi aquis poſſint inundari.

3. Tot ſint, vt ex ijs in omnes Circumuallationis partes ſubmitti facilè poſſint ſubſidia.

4. Sint extra iactum Tormenti Vrbani, aut certè tantum diſtent, vt parum damni à Tormentis metuant.

5. Statuantur ſi fieri poteſt ad flumen.

6. Caſtra vt & reliqua omnis Circumuallatio, Lineis (*Trencheis*) hoc eſt Vallo perpetuo varijſque operibus muniantur.

PROPOSITIO II.

De Lineis, vulgo Trencheis.

LIneæ obſidionales ſunt Vallum quoddam perpetuum, quæ tam caſtra, quàm reliquum locum omnem circa vrbem obſeſſam ambiunt, circa has obſerua

1, Sint duplices, aliæ interiores quæ obſeſſis objiciuntur ne eruptionibus ſuis noceant obſeſſoribus, aliæ exteriores quæ hoſtem externum arcent. Exteriores ſint validiores interioribus; imò cùm exiguum in vrbe præſidium, interiores aut omitti planè poſſunt, aut certè leuiter conſtruendæ.

2. Ductu recto Lineæ præſertim exteriores non extendantur vltra 750 pedes. Poſt ſingulos 750 pedes varijs interpoſitijs obiectiſque Munitionibus roborentur. Adhiberi ſolent, Reductus ſiue Turriculæ, Defenſiones mediæ, Anguli Externi & Interni, Forcipulæ, Stellæ, Caſtella quadrata cum integris Propugnaculis, Caſtella varia cum Propugn. dimidijs, Propugnacula plana integra, & dimidiata, Raueliui, Semilunæ, Cornuta, Coronata. Hæc omnis tam varia, tamque multiplex Munitionum ſupellex nec alias, nec alibi magis quàm ætate noſtrâ & in Belgio, in obſidionibus Syluaducenſi, Bredana vtrâque, Traiectenſi, alijſque compluribus vſurpata eſt. Horum pleraque in præcedentibus ſunt tradita: quæ reſtant, propoſitionibus ſequentibus exponemus.

3. Linearum Orthographia, & Ichnographia varia eſt pro locorum ac periculi ratione, triplicem ſubiungo, in obſidione Syluaducenſi vſurpatam.

Baſis Loricæ	$7\frac{1}{2}$.	7.
Decliuitas exterior	$2\frac{1}{2}$.	3.
Decliuitas interior.	1.	1.
Altitudo interior.	6.	6.
Altitudo exterior.	5.	5.
Pars ſuperior.	4.	3.
Scabelli latitudo.	3.	3.
Scabelli altitudo.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2}$.
Margo.	3.	3.
Latitudo foſſæ	12.	8.
Exterior decliu. foſſæ.	4.	2.
Interior declin. foſſæ.	4.	2.
Profunditas foſſę	5.	2.
Latitudo fundi.	4.	4.

Aduentante regio exercitu, Bataui circumuallationem roborarunt magis, baſim Loricæ auxerunt ad 9 pedes tribus Scabellis appoſitis, quorum latitudines iunctæ 9 explebant pedes. Altitudo Loricæ erat pedum ſimiliter 9, latitudo foſſæ 15.

PROPOSITIO III.

Reductum ſiue Turriculam exſtruere.

RES facillima eſt cùm eorum forma ſit ſimpliciter quadrata. Deſcribe igitur in terrâ Lineam 48 pedum, ac ſuper eâ quadratum delinea, ſactumque eſt quod petebatur.
Orthographia & Ichnographia eſt huiuſmodi.

Baſis	14 aut 20.
Latitudo ſuperi	4 aut 6.
Altitudo	8 aut 10.
Margo	2 aut 3.
Foſſæ latitudo	15 aut 24.
Foſſæ profund.	5 aut 6.

Loricæ duo aut tria adijciuntur ſcabella gradatim ſupra inuicem exſtructa.

PROPOSITIO IV.

Stellam delineare.

Fig. 35. VT quadrangulam delinees, ſic operare.

1. Deſcribe in campo lineam pedum 48 aut 50, ac ſuper ea quadratum deſcribe.

2. Latus AB biſeca in C, & ex C perpend. ducito CD parem $\frac{1}{4}$ ipſius AC, ſiue $\frac{1}{8}$ totius AB.

3. Iunge AD, DB, ſi hæc conſtructio in orbem fiat, habebis ſtellam quadrangulam.

Fig. 36. Pro quinquangulâ ſic operare.

Deſcribe pentagonum regulare ex latere AB biſecto in C perpendicularem excita CD parem $\frac{1}{3}$. AC, ſiue $\frac{1}{6}$ AB. Et iunge AD, DB, ſi ita conſtruas in orbem, prodibit ſtella quinquangula.

Ichnogra-

Pro ſexangulâ:

Deſcribatur ACE &c. hexagonum regulare per *prop.15 lib.4 element. à nobis editorum & caput 6 Architect. Milit.* ſingulæ facies AC &c. adæquent paſſus circiter 104: ad extremitates autem C, A &c. fiant anguli DAC, DCA &c. ſinguli 30 grad. Et fient DA, DC ſingulæ 60 paſſuum circiter. *Fig.* X.

Ichnographia & Orthographia eadem quæ Reductuum.

Stellæ maiores in vſu non ſunt.

PROPOSITIO V.

Caſtellum quadratum dimidiata habens Propugnacula delineare.

1. DEſcribe quadratum ABCD, cuius latera nec minora ſint 120 Pedibus, nec maiora 180. *Fig.* 37.

2. Triſeca latera in E, F, L, M, Q, S, T, V.

3. Singulis lateribus adde ⅓ BI, DN, CO, AH. Pro lineis autem Colli ſume ⅓ in ipſis lateribus nempe BL, DQ, CT, AE.

4. Ex terminis Linearum Colli erige normales LK, QR, TX, EG quæ ſingulæ ſint ⅓ lateris.

5. Ducantur rectæ IK, NR, OX, HG.

Habes caſtellum cum 4 dimidiatis Propugnaculis.

PROPOSITIO VI.

Caſtellum alterâ parte longius, cum dimidiatis Propugnaculis delineare.

1. VNum è minoribus lateribus AB triſeca, & abſcinde ipſius ⅓ ex omnibus lateribus pro lineis Colli AF, BG, CO, DQ. *Fig.* 38.

2. Singulis item lateribus adde AK, BL, CP, DS pares ⅓ lateris AB.

4. Ex terminis linearum Colli erige perpendiculares FI, GM, ON, QR pares ⅓ ipſius AB.

4. Iunge KI, LM, PN, SR. Dico factum.

PROPOSITIO VII.

Aliud Caſtellum quadrilaterum cum dimidiatis Propugnaculis & duplici Forcipe delineare.

1. SVme laterum quadrati ABCD tertias partes pro lineis Colli CP, AM, BN, RD.

2. Lateri CD adde vtrimque ⅙ CI, DK: lateribus autem CA, DB ſimiliter adde partes tertias AS, BT. *Fig.* 39.

3. Ex terminis linearum Colli erige normales æquales ⅙ PX, ML, NV, RZ, & iunge IX, SL, TV, KZ.

4. Biſeca CD latus in E, atque inde abſcinde EG, EH pares ⅙ lateris; indidemque erige normalem EF parem quoque ⅓.

5. Iunge EF, HF. Habes propoſitum.

Exſtruuntur ſubinde etiam Caſtella quadrata quæ duo habeant Propugnacula integra, in latere autem aduerſo Forcipem duplicem. Vide *fig.* 40. *Fig.* 40.

PROPOSITIO VIII.

Caſtellum trilaterum cum dimidiatis Propugn. delineare.

1. DEſcribe triangulum æquilaterum ABC cuius latera conuenit eſſe minora quàm quadrati. *Fig.* 41.

2. A lateribus abſcinde tertias partes AI, BL, CK pro lineis Colli.

3. Ex terminis linearum Colli erige normaliter laterum partes ſextas IH, LM, KG.

4. Lateribus adde partes tertias BD, CE, AF, & iunge FH, DM, EG. Habes propoſitum.

Caſtella

Caſtella quatuor præcedentibus propoſitionibus deſcripta, non promiſcuè & varietatis causâ exſtrui debent, ſed cum delectu pro locorum ratione. Quamuis autem robore multum cedant Caſtellis quæ integra habeant Propugnacula, vtiliter nihilominus adhibentur.

Orthographiam & Ichnographiam vel eamdem dabis quam Reductibus & Stellis, vel ſi maiori ſit opus, eam quæ in obſidione Syluaducenſi eſt adhibita; in quâ baſis Valli erat 27 pedum, altitudo 6, latitudo Valli ſuperior 18, baſis Loricæ 8, altitudo 6, Loricæ latitudo ſuperior 4. latitudo foſſæ 30.

CAPVT XX.

De Suggeſtis Tormentorum & Acceſſibus.

Circumuallatione qui primus eſt Oppugnationis actus, abſolutâ, vt traditum *præc. cap.* Suggeſta Tormentorum certis locis eriguntur, & per foſſas obliquas ad Loricam extimam itur. De his igitur præſenti capite.

PROPOSITIO I.

Suggeſtum offenſiuum & defenſiuum exſtruere.

Fig. 42. Dvplex eſt Suggeſtus Offenſiuus & Defenſiuus. Hic ad externum hoſtem, ille ad obſeſſos dirigitur. Offenſiuum ſic conſtrues.

1. Numerum Tormentorum quæ in Suggeſtum ſubuehenda multiplica per 12. Productum dabit in pedibus longitudinem Suggeſtus. Tormenta enim diſtant à ſe mutuo pedibus 12 ſingula, duo autem extrema à latere Loricæ diſtant pedibus 6.

2. Latitudinem AD habebis ſi ad longitudinem Tormenti vehiculo ſuo impoſiti, addas ſpatium 10 aut 12 pedum AF, per quod Tormentum exoneratum poſſit retrocedere, & 5 inſuper aut 6 pedes FD pro circuitu & tranſitu.

3. Planum Suggeſtus verſùs hoſtem ſit accliue vt Tormenta vi exploſionis retrò acta, ad locum ſuum facilè reducantur. Retro item ſit aditus I, K, ſemita ad eum ducens modicè accliuis, vt ſubuehi Tormenta in Suggeſtum poſſint.

4. Quâ parte hoſtem Suggeſtus ſpectat Loricâ muniendus, cuius baſis ſit 12, 15, aut 18 pedum; altitudo 6. Ad latera AD, BE ſufficiet latitudo minor.

5. In Loricâ fiant tot feneſtræ, quot ſunt Tormenta: altitudo ſit pedum 3, latitudo exterior 4, interior 2. Eſt autem latitudo exterior maior interiore vt Tormenta in plures dirigi partes poſſint.

6. Poſt Suggeſtum deſcribatur ſpatium Suggeſtui æquale ac ſimile DSNE, & in eo foſſa M quadrata fiat, longitudinem habens 10 aut 12 pedum: in quâ puluis aſſeruetur, ne ſcintilla aliqua poſſit incidere, orificium corio teges. Denique tam Suggeſtum ipſum AE, quàm ſpatium DN foſſa ambiet lata pedes 8 vel 10, profunda 6.

7. Suggeſtus primi diſtare ſolent à loco obſeſſo iactu muſqueti. Poſtmodò ad ipſas propè foſſas eriguntur. Regula generalis ſit quò propiores fuerint loco Tormentis concutiendo, eò effectum ſortiri maiorem.

Suggeſtus Defenſiui minus ſunt operoſi, eorum Lorica ſi ex terrâ fiat, ſit pedes 6 aut 7 craſſa, altitudo ea vt Tormentum vehiculo impoſitum ſuperemineat. Pro Loricâ terreâ conſtitui etiam ſolent corbes viminei ingentes terrâ replendi.

PRO-

PROPOSITIO II.

Acceſſus ſiue Brachia ad locum Oppugnationi deſtinatum dirigere.

1. AD mille circiter pedum ab vrbe diſtantiam foſſa aperiatur αx versùs locum obſeſſum ductu ſic obliquato, vt ex nullâ loci obſeſſi parte ſtringi poſſit. Quæ vbi ad ſpatium aliquod producta, noua in partem alteram linea effoditur xλ, ſimili obliquitate. Atque ita per varios flexus ad Loricam vſque proceditur, vbi tandem duabus foſſis longioribus θK, θI ad locum obſeſſum parallelis acceſſus perficiuntur Ductus illi poſtremi obſeſſores inſtar Loricæ tegunt, vt cominus præſidiarios à Valli & foſſæ defenſione deterreant. Fig. 43.

2. Quamuis ita inſtitui acceſſus debeant vt nuſquã ſtringi è Vallo hoſtili poſſint, ſedulò tamen obſeruabit Architectus ne obliquiores faciat quàm ſit neceſſe cum temporis & expenſarum diſpendio. Exiſtimo duobus flexibus ad Loricam ſemper penetrari poſſe viâ multò breuiori quàm ſi plures obliqui ductus inſtituantur. Ducatur enim à puncto vbi acceſſuum principium ſtatuis, recta linea αβ, quæ protracta cadat aliquantulum extra angulum Loricæ extimæ. Quod ſi linea producatur ex β quæ præter angulos Loricæ extimæ incedat, duobus flexibus αβ, βϑ, ad Loricam pertinges. Cur tamen hæc accedendi forma minus vſitata ſit, hanc puto eſſe cauſam quòd acceſſus longi faciliùs expugnentur quàm varijs flexibus interciſi.

3. Ad ſingulorum ductuum terminos Reductus extruantur eâ ratione vt bini à Reductu vno ſtringantur. Hic enim commodiſſimus Reductuum ſitus eſt. Si autem ductus aliquis ſit longior, etiam in medio Reductus ad defenſionem poſſunt extrui, quæ omnia figura 43 ſatis exprimit.

4 Terra quæ egeritur versùs hoſtem egeritur, vt vſum Loricæ foſſoribus præbeat.

5. Latitudo inferior ſit 6 pedum, ſuperior 12 aut 15. Profunditas minima ea ſit quæ hominem ſtantem iunctâ altitudine Loricæ tegat. Quò propiùs acceditur, eò profunditas ſit maior. Latitudo etiam augeri debet, ſi materia Vineæ per foſſas aduehenda. Scabella ſubinde etiam terna Loricæ apponuntur.

6. Ad tutelam acceſſuum Suggeſtus Tormentorum idoneis locis collocandi.

CAPVT XXI.

Perforatio Loricæ extimæ.

ACceſſibus ad Loricam vſque perductis, foſſæ binæ longiores, vt ſupra diximus, loco obſeſſo parallelæ duci debent, Loricâ versùs hoſtem præſtructâ. In bis collocandi Fiſtulatores, qui prohibeant obſeſſos capita ſupra Vallum attollere. Fig. 43.

2. His peractis, quando foſſas obliquare iam deinceps non licet, neceſſe eſt vt à ductu illo longiori ad locum impetendum parallelo Canalis rectus LH, Sappam appellant, per Loricam ad foſſam vſque Munimenti ducatur. Haud dubiè hoc opus periculoſæ plenum eſt Aleæ, quando ex Vallo directis ictibus impeti foſſores & ſterni poſſunt. Periculum minuitur hiſce modis. 1. Milites in foſſâ θI, θK diſpoſiti continuis exploſionibus impediunt Propugnatores. 2. Tormentis Loricæ, Alæ, & Valli oppoſiti franguntur vt iam conſiſtere in Vallo præſidiarij tutò nequeant. Canalis profundior ſit reliquis acceſſibus. Et ſupernè ramis, ſtramine, virgultis, pellibus alijſque rebus tegitur, vt ſi vir glandibus intercludi nequeat, conſpectui certè iaculantium foſſores eripiantur. 4. Canalis hic dirigendus ad eam Munimenti partem, quæ Vineæ cuniculo deſtinata eſt. Quare ſi Munimentum ſuis numeris abſolutum oppugnas, numquam ad Cortinam aut angulum Propugnaculi, ſed ad alterutram Propugnaculi Faciem dirigatur. Nam qui Cortinam aggreditur ab vtroque Propugnaculo & ex propinquo, qui Propugnaculi angulum ex binis itidem Propugnaculis licet remotioribus impetitur. Vbi interim qui Faciem ſibi ſumpſit expugnandam ab vno tantùm latere infeſtari poteſt. Quod ſi, vt in locis irregularibus non perfectè munitis ſæpe accidit, Cortina non habeat plenam vtrimque defenſionem, poteſt tranſfoſſio & aggreſſio dirigi ad medium Cortinæ punctum.

CAPVT XXII.

De aggere & Vinea.

Fig. 43. SAppâ LH per Loricam & viam coopertam ad foſſam vſque perductâ reliquum eſt, vt foſſa compleatur aggere per eam ducto, & Vinea ſuper aggerem conſtruatur.

1. Foſſa ſiue ſicca ea ſit, ſiue aquea, completur ſaxis, ramis, faſcibus arborum, truncis, ſaccis terrâ plenis. Sic autem materia quæ injicitur ordinanda, vt agger per foſſam exurgat ad vſque Vallum eâ latitudine cui Vinea commodè imponi poſſit.

2. Aggere iam perfecto, tantum terræ per Sappam aduectæ deijcitur in aggerem vt quemdam quaſi collem conficiat inter Propugnaculi Faciem & obſidentes interiectum. Imâ deinde molis terreæ illius parte ligonibus longioribus vltra ſuperiorem proiectâ, collis in gyrum agitur, & versùs Propugnaculi Faciem ſenſim prouoluitur.

3. Colle ad ſpatium aliquod prouoluto, eriguntur duæ portæ interuallo modico diſtantes quæ aſſeribus confeſtim tam ſupra quàm vtrimque ita coniunguntur vt nihil pateat. Illi deinde lateri quod hoſtile Propugnaculum reſpicit, tantum affunditur terræ vt ictum Tormenti ferat; alterum latus minus operosè tegitur. Pars ſuperior ſatis quoque aduersùs ignes munietur, ſi terrâ pedem vnum aut ſeſquialterum altâ inſternatur. Pari modo reliqua Vineæ membra ad Vallum vſque continuabuntur. Portarum latitudo (AB) eſt pedum 9 aut 10, altitudo 10, craſſities trabium ſex ſeptemuè pollicum, ſeu pedis medii.

4. Hæc Vinearum theoria eſt, quas haud paulò faciliùs deſcripſeris quàm conſtruxeris. Nihil in vniuerſo negotio obſidionali hac molitione periculoſiùs. Diſcrimen nihilominus minuitur hiſce modis. 1. A fronte tutos reddit mons ille volubilis inter operarios & Faciem Propugnaculi interiacens. 2. Tormentis Ala oppoſita tam quæ in Propugnaculo eſt quàm quæ in Cortinâ, frangitur vt obſeſſorum Tormentis inde verberari nequeat Vineæ latus. Ex foſsâ item θI, θK Sclopetarij in omnes Valli partes è quibus impeti poſſunt, ſtructores Vineæ collimant. 3. Noctu plerumque laboratur. 4. latera claudunt faſcibus quos bifidis lignis (candelabra vocitant) imponunt, quibus muſquetorum ictus multos eludunt, ſeque conſpectui hoſtium ſubducunt.

CAPVT XXIII.

De Cuniculo.

Fig. 43. CVniculis vſi ſunt etiam antiqui ſed fine & modo diuerſo. Hac ætate quando ea ars affecuta perfectionem ſuam videri poteſt, res in hunc fere modum peragitur.

1. Vineâ AA ad inimici Propugnaculi Faciem perductâ, deſignatur locus cui puluerem vis ſupponere. Tum per duos treſue flexus CE, EF ad deſtinatum locum K fodiendo penetratur præſidio acus nauticæ. Inflectitur canalis CEFG vt pulueri impeditior ſit exitus versùs C. Altus eſt pedes 4 aut 4½, latus 4 aut 3½: ſit tamen eò anguſtior quò loco deſtinato propinquior.

2. Vbi peruentum eſt in K locum deſignatum, effoditur ibidem receptaculum cuius altitudo plerumque 6, ſeptemue eſt pedum: latus baſeos pedes 4 aut 5. Huic vaſcula puluere plena ſic impones vt loco coniungas: ſic enim breuiori tempore puluis totus accenditur, ac proindè fortiùs agit. Illud etiam experientia docuit terram molis diffractæ in eam partem decidere ad quam plus ſpatij relictum fuit inter vaſcula pulueréa & receptaculi ſuperficiem. Itaque ſi velis terram decidere versùs hoſtem, puluerem admouebis propiùs lateri φN, ſi versùs &c.

3. Vnum vaſculum nitrati pulueris 12 pedibus terræ infert ruinam. Hinc collige quantum pulueris receptaculo ſit imponendum: Puluis autem non diu ante inferendus, quàm velis accendere, aliàs enim ſenſim humectatur & corrumpitur.

4. Diligentiſſimè obſtruitur orificium C immiſſo per id ſolùm tubulo pulueris pleno ad puluerem vſque in K depoſitum pertingente, vt fomite admoto incendi cuniculus poſſit tempore deſtinato.

Porro aggreſſionem ipſam quæ cuniculo incenſo & aditu per ruinam patefacto, inſtituitur, ducibus militibuſque ad quos ea pertinet, relinquo.

CAPVT

CAPVT XXIV.

De Defenſione.

1. PRimum principium ſit hoſtem quàm longiſſimè ac diutiſſimè à Munimento arcere: Quidquid igitur extra Munimentum moram poteſt hoſti inijcere, occupare ac tueri quoad poterunt, debent obſeſſi.

2. Acceſſus hoſtiles omni conatu impediant: erumpant igitur crebrò (ſed cautè ne ipſi cum irreparabili vrbis damno in caſſes incidant) & foſſores ac milites fugent aut ſternant. Foſſas inchoatas cumplanent. Tormenta ſi auehere nequeant, clauis infixis corrumpant.

3. Opera externa quæ tueri tota nequeunt ampliùs, reſcindant (vide de reſciſſionibus dicta ſuperius) omnino perdita, cuniculo, ſi puluis ſuppetat, vnà cum occupantibus diffringant.

4. Transfoſſio Loricæ contraria & tranſuersâ foſſione intercipienda.

5. Aggeris & Vineæ ſtructura continuis muſquetorum ac Tormentorum exploſionibus, pytobolis, alijſque incendiarijs machinationibus eminùs impedienda, neque alia reſtat via ſi foſſa ſit plena. Quod ſi foſſa fuerit ſicca, tum ijs omnibus quæ iam recenſui, tum multò etiam magis conſertâ cominùs manu ſtructores Aggeris Vineæque inuadendi, Vineaque ipſa aut incendio abſumetur, aut cuniculo euertetur.

6. Quod ſi nihilominus ſuperante vi hoſtium ad Propugnaculum Vinea perducatur, ac Propugnaculum ipſum ſuffodiatur, aduersùs hanc peſtem non aliud remedium ſupereſt, quàm detegere cuniculi locum. Varijs vtuntur praxibus. Alij ex piſorum ſuper tympano fortiter tenſo ſubſultantium motu locum ſuffoſionis conijciunt: alij terebram longiſſimam in ſolum ſuſpectum adigentes, aure ad eius extremitatem applicatâ foſſionũ pulſus venantur: alij alijs indagant modis. Modus certiſſimus eſt contrarijs ac pluribus foſſionibus ſcrutari Propugnaculi fundamentum. Cuniculo reperto puluis efferatur, ſi temporis hoc non ſinant anguſtiæ humectetur, & igni exitus aperiatur.

7. Propugnaculo euerſo, ſi nullæ obſeſſis internæ Munitiones reſtant reliquum eſt vt quando muris ac Vallo iam non poſſumus, armis ac manu hoſti per ruinam irrumpenti aditus præcludatur: Quæ cùm ducum potiùs militumque quàm Architecti ſint partes, illis cætera relinquentes, huic tractatui finem imponemus.

FINIS. ARCHITECTVRÆ MILITARIS.

ANDREÆ
TACQVET
E SOCIETATE IESV
CYLINDRICA
ET
ANNVLARIA
QVINQVE LIBRIS
COMPREHENSA.

Digitized by Google

DEFINITIONES AD LIBRVM PRIMVM ET SECVNDVM.

1. *Figura plana duci perpendiculariter, ſiue rectè*, dicitur, cùm ita mouetur, vt rectam, quæ ipſi à principio perpendicularis fuit, ad rectos ſemper angulos, & in eodem ſui puncto tangat.

Sit figura plana quæuis BED, ad quam perpendicularis erecta ſit EK: ſi figura ſic feratur per EK ſibi à principio perpendicularem, vt eam perpetuò tangat ad rectos angulos ſecundùm idem ſui punctum E; dicetur eſſe *perpendiculariter ducta*. *Schematiſmus 1. Fig. 1.*

2. *Obliquus* verò *planæ figuræ ductus* erit, cùm ita mouetur, vt rectam, quæ ſibi à principio obliqua fuit, ſub eodem ſemper non recto angulo, & ſecundùm idem ſui punctum tangat.

3. *Cylindrum* voco, ſolidum ex cuiuſuis planæ figuræ, ſiue perpendiculari, ſiue obliquo ductu procreatum.

Hinc intellige quid ſint *Cylindri* non tantùm *Circulares*, ſed etiam *Elliptici*, *Parabolici*, *Hyperbolici* &c. Sed quoniam ſingulis quædam inſunt propria, eos ſigillarim definiemus.

4. *Cylindrus Circularis rectus* eſt, qui fit ex ductu recto circuli, vel, qui ſectus plano ad axem recto, circulum exhibet.

Omnis igitur Circularis Cylindrus eſſentialiter rectus eſt: & Scalenus, licet baſim habeat circulum, Circularis non eſt: erit autem Circularis (tametſi baſim habeat ellipſim) Scalenus ille, qui plano ſectus recto ad axem, circulum exhibebit.

5. *Cylindrus Ellipticus*, eſt qui ex ellipſeos ductu recto producitur; vel, qui plano ſectus recto ad axem, ellipſim exhibet.

Omnis igitur Cylindrus Ellipticus neceſſariò rectus eſt: & Scalenus, quamuis baſim habeat ellipſim, Ellipticus non erit, ſi ſectus plano ad axem recto exhibeat circulum: erit autem Ellipticus (quamuis baſim habeat circulum) Scalenus ille, qui plano ſectus recto ad axem, ellipſim exhibet.

Quamuis autem omnes tum Elliptici tum Circulares Cylindri neceſſariò recti ſint: illis tamen hanc vocem (rectus) *deinceps adiungemus, non quaſi poſſint vlli eſſe non recti, ſed vt hanc eorum naturam, quæ non omnibus ita ſtatim ſeſe offerat, inducemus.*

6. *Cylindri Parabolici, & Hyperbolici* ſunt qui producuntur ex ductu ſeu recto ſeu obliquo parabolæ, & hyperbolæ.

7. *Axis* horum Cylindrorum eſt recta CF, ſubtenſarum DB, LH media puncta connectens. *Fig. 1.*

8. *Portionem Cylindri Circularis* voco, quæ per centrum baſeos, & punctum aliquod in latere abſcinditur.

Eſto Cylindrus Circularis CH, baſis centrum E, punctum in ſuperficie, ſiue in latere aliquo Cylindri, quoduis ſit G. Per G punctum, & E centrum baſeos, Cylindrus diuidatur. *Fig. 2.* fruſtum ſolidum FCGK, quod ſemicirculo FCK, ſemiellipſi FGK, & ſuperficie Cylindricâ GFCK continetur, *Portionem* voco *Cylindri Circularis*, *per centrum baſis & punctum in latere abſciſſam.*

9. Similiter & *Elliptici Cylindri Portionem* voco, quæ per punctum in latere, & baſeos centrum ab Elliptico Cylindro abſcinditur.

Porro, cùm in Elliptico Cylindro, perinde vt in alio Cylindro quolibet, infinita ſint latera; ſi ſectiones fiant per centrum, & alia atque alia latera, infinitæ portiones producentur, quæ omnes inter ſe (ſecus ac in Cylindro Circulari accidit) diſſimiles ſunt, ac nihilominus, vt *prop. 29. lib. 1.* demonſtrabimus, æquales.

10. *Portionis baſis*, eſt ſemicirculus, ſiue ſemiellipſis FCK.

11. *Altitudo Portionis* eſt recta CG, quæ ab extremitate diametri EC, baſim FCK bifariam diuidentis, quæ proinde alteri FK coniugata eſt, in Cylindricâ portionis ſuperficie erigitur.

12. *Sectio maxima Portionis*, eſt triangulum EGC, quod producitur ſectione factâ per baſeos centrum E, & altitudinem Portionis CG. *Maximam* voco, non quia abſolutè omnium ſit maxima; ſed quòd maxima ſit ſectionum baſi FCK perpendicularium, quæ fiunt ſecundùm rectas ad baſis ſubtenſam FK ordinatim applicatas.

13. Si Portio fuerit à Circulari Cylindro abſciſſa, *ſphæra baſeos* ea eſt, quæ à ſemicirculo, qui Portionis baſis eſt, generatur.

14. Si Portio abſciſſa ſit ab Elliptico Cylindro, per alterutrum axem baſeos, *Sphæris baſeos* ea erit, quæ fit à ſemiellipſi, baſi nempe Portionis, circa axem (FK), à quo baſis ipſa ſubtenditur, circumactâ.

15. *Portionem Cylindri Parabolici*, aut *Hyperbolici* voco, quæ à recto Parabolico, aut Hyperbolico Cylindro, ſiue per axem, ſiue per ordinatim axi applicatam, & punctum in latere abſcinditur.

Fig. 1. Eſto rectus Cylindrus Parabolicus, aut Hyperbolicus DLEKHB; baſis DEB, axis baſeos EC, ordinatim axi applicata DB. In latere BH ſumatur punctum H, perque illud, & baſeos axem CE Cylindrus diuidatur. Fruſtum ſolidum CBHE planis CHB, CBE, CHE, & curuâ ſuperficie EHB comprehenſum, voco *Cylindri Parabolici*, aut *Hyperbolici Portionem per axem baſeos, & latus abſciſſam*.

16. Quod ſi ex termino axis E erigatur in Cylindri ſuperficie recta EK, ſumptoque in eâ puncto K, per id & ordinatim axi applicatam DB Cylindrus diuidatur; fruſtum ſolidum DEKB planis DEB, DKB, & curuâ ſuperficie DKEB comprehenſum, voco *Portionem Parabolici*, aut *Hyperbolici Cylindri per ordinatim applicatam baſeos, & latus abſciſſam*.

17. Altitudines harum Portionum ſunt BH, EK.

18. Sectiones maximæ ſunt triangula CHB, CKE.

Rurſum voco *Maximas*, non abſolutè omnium, ſed eo ſenſu, quo *ſupra defin.* 12.

19. *Solidum rotundum baſeos* voco, quod fit à baſi Portionis circumactâ circa rectam, à quâ baſis ſubtenditur.

Sic in Portione CBHE, *Solidum rotundum baſeos* eſt, quod fit à baſi CBE, circa EC circumactâ. In portione autem DEKB, *Solidum rotundum baſeos* eſt, quod fit à baſi DEB circa DB in orbem verſâ.

20. *Figura plana axem habere* dicitur, in quâ recta linea duci poteſt, quæ omnes rectas vni æquidiſtantes bifariam, & ad rectos angulos diuidat. Tales præter circulum, ellipſim, parabolam, hyperbolam, dantur infinitæ.

Ex dictis facilè Portiones à quibuſcumque Cylindris abſciſſæ intelligentur.

21. *Cylindrum Portionis* eum voco à quo abſciſſa eſt Portio, & eamdem habet cum Portione altitudinem.

22. Cuiuſcumque Cylindri ſuperficiem abſque baſibus voco *curuam*, ſiue *Cylindricam*.

Fig. 2. 23. Similiter Portionis ſuperficiem, demptis planis FCK, FGK, *Curuam*, ſeu *Cylindricam* voco.

d Schematiſmus 1. 24. *Cylindrus Cauus* [d] eſt ſolidum quod remanet, cùm minor Cylindrus à maiori circa eumdem axem poſito detrahitur.

Fig. 6. e Schematiſmus 6. 25. *Annulus planus* eſt ſuperficies duabus concentricis circulorum peripherijs [e] BH, CK comprehenſa; vel eſt ſuperficies, quæ remanet cùm minor concentricus à maiori detrahitur.

26. *Centrum annuli* eſt A, centrum concentricorum.

Fig. 39. 27. *Latitudo* eſt BC pars diametri inter concentricas peripherias interiecta.

28. *Magnitudo quæuis per inſcriptas ſibi magnitudines exhauriri* dicitur, cùm inſcriptæ magnitudines ab ipſâ deficere tandem poſſunt, magnitudine datâ minori, hoc eſt quantumuis paruâ.

Similiter *magnitudo quæuis per circumſcriptas ſibi magnitudines exhauritur*, cùm hæ ipſam denique ſuperare exceſſu minori dato poſſunt.

CYLIN-

CYLINDRICORVM ET ANNVLARIVM LIBER PRIMVS.

Huius primi libri argumentum eſt [a] *Portio Cylindri non Circularis tantùm, ſed Elliptici etiam, Parabolici, Hyperbolici, quin etiam ex cuiuſuis figuræ planæ recto ductu procreati. Ordinis gratiâ in quatuor partes diſtinguo.* a Defin. 8. 15. 16.

SYNOPSIS.

PARS I.

POrtiones cum [b] rotundis baſium ſolidis comparantur.. demonſtratur igitur cuiuſcumque Cylindri non Circularis modò, ſed Elliptici etiam, Parabolici, Hyperbolici, aut alterius cuiuſcumque Portionem, ad rotundum baſeos ſolidum eam habere rationem, quam Portionis altit..do CB, ad circumſerentiam circuli cuius radius eſt AC, baſis trianguli ABC, quod Maxima eſt [c] ſectio Portionis. Decem prima theoremata apparatum ſolummodò continent ad ſequentia.

b Defin. 19

Schematiſmus 2. & 4.

c Defin. 12. 19.

PARS II.

POrtiones, & Portionum ſegmenta cum inſcriptis ſibi pyramidibus componuntur, & Cylindri quidem Circularis Portio oſtēditur maximæ inſcriptæ pyramidis eſſe dupla. Id ipſum de portionibus Cylindri Elliptici per quaſuis diametros baſis abſciſſis, demonſtratur. Ad hæc oſtendo Portionem Cylindri Parabolici inſcriptæ Pyramidis maximæ ſeſquialteram eſſe: Cylindri autem Hyperbolici Portionem ita ſe habere ad maximam ſibi inſcriptam Pyramidem, vt eſt recta lateris tranſuerſi baſeos ſeſquialtera vna cum axe baſeos, ad latus tranſuerſum cum axe. Ex his omnis generis Portiones non ſolùm à Circularibus Cylindris, ſed etiam à quibuſcumque alijs etiam hyperbolicis abſciſſæ cubantur. Exprimitur etiam ſegmentorum quæ à Portionibus reſecantur planis ſectioni Maximæ parallelis, ad inſcriptas maximas pyramides proportio: & Portiones à Cylindris Ellipticis per quaſcumque baſis diametros abſciſſæ omnes inter ſe demonſtrantur æquales.

PARS III.

CYlindri Circularis Portio cum Elliptici Cylindri Portionibus; & harum ſingulæ cum ſuis quæque Cylindris comparantur. Demonſtramus autem tam Circularis Cylindri Portionem ad Cylindrum ſuum Circularem, quàm Elliptici Cylindri Portionem ad ſuum Cylindrum Ellipticum eam habere rationem, quam duæ tertiæ diametri partes ad Circuli circumferentiam: Portionem verò Cylindri Parabolici ad ſuum eſſe Parabolicum Cylindrum vt 3. ad 16.

PARS IV.

d *Fig.* 41. PОrtionis à Cylindro circulari abſciſſæ ſegmenta planis [d] *βπωθ*, NRTPHGKL ad maximam ſectionem ABC rectis, versùs BC abſciſſa eſſe oſtendimus ad ſphæras diametrorum βθ, NP, HL, vt Portionis altitudo CB ad circumferentiam DCEY. Tum ipſa Portio cum ſegmento, quod ab ipsâ reſecatur, plano ad baſim parallelo confertur, atque inde circuli pendere quadraturam oſtendo. His verò hoc præmittimus theorema: ſi quoduis circuli ſegmentum BTC [e] circa diametrum GH, ſubtenſæ BC parallelam, in orbem duxeris, Portionem ſphæricam ab ipſo genitam æquari ſphæræ, cuius diameter eſt ipſa BC.

e *Schematiſmus* 6. *Fig.* 40.

PARS PRIMA.

PROPOSITIO I.

Schematiſmus 1. *Fig.* 1.

Datæ ſint binæ quantitates A & B, ſiue ſuperficies, ſiue corpora: data ſit item ratio quæcumque E ad F.

Si quantitatibus A & B; aliæ atque aliæ magnitudines ſine termino inſcribi poſſint, quæ & eam ſemper inter ſe rationem ſeruent, quam E & F; & quantitates ipſas A, B [a] exhauriant, hoc eſt ab ipſis deficiant defectu quantumuis paruo.

a *Defin.* 18.

Erit quantitas A ad quantitatem B, vt E ad F.

SI non; erit ratio A ad B maior aut minor ratione E ad F, ſit primo maior. Aliqua igitur quantitas Z minor quàm A, erit ad B, vt E ad F. Inſcribantur ipſis A & B magnitudines binæ M, N; M quidem ipſi A; N verò ipſi B, eâ lege, vt M & minus deficiat ab A, quàm Z, ac proinde ſit maius quàm Z, & ſimul rationem talem habeat ad N, quam E ad F: hoc enim totum fieri poterit per hypotheſim. Quoniam igitur M maius eſt quàm Z, erit M ad B in maiori, quàm Z ad B. At Z erat ad B, vt E ad F. Ergo M eſt ad B in maiori quàm E ad F; hoc eſt M eſt ad B in maiori, quàm M ad N. Ergo N magnitudo inſcripta ipſi B, maior eſt quàm B, pats ſuo toto: quod fieri non poteſt. Non igitur ratio A ad B maior ratione E ad F.

Ponatur deinde ratio A ad B minor ratione E ad F. Igitur ratio B ad A maior erit ratione F ad E. Hoc verò fieri non poſſe eodem diſcurſu oſtendetur, quo iam demonſtraui rationem A ad B non poſſe maiorem eſſe ratione E ad F.

Quare cùm ratio A ad B neque maior ſit ratione E ad F, neque minor, æqualis erit: quod erat demonſtrandum.

Idem lineis quadras, ſi loco figurarum inſcriptarum partes eâdem lege auferantur.

Corollarium.

Si quantitatibus A & B aliæ magnitudines inſcribi poſſint, quæ & ſemper æquales ſint inter ſe, & quantitates ipſas A, B exhauriant,

Erit quantitas A æqualis quantitati B.

Patet ex Propoſitione: nam ratio E ad F iſthîc data fuit quæcumque, ac proinde etiam ratio æqualitatis.

PRO-

PROPOSITIO II.

Eſto triangulum rectangulum ABD, & circulus BFA deſcriptus radio AB. Triangulumeſt ad circulum, vt BD ad circumferentiam BF. *Schematiſmus 1. Fig. 4.*

TRiangulum rectangulum BAC, cuius altitudo par eſt peripheriæ BF, æquatur [a] Circulo. Sed triangulum BAD eſt ad triangulum BAC, vt BD ad BC; hoc eſt ad peripheriam BF. Ergo etiam triangulum BAD eſt ad circulum, vt BD ad peripheriam BF: quod erat demonſtrandum. *a Archim. dim. cir. p. 1.*

Potuit hoc theorema inſcriptione Archimedæâ immediatè demonſtrari.

PROPOSITIO III.

Datus eſto planus annulus BFGD, cuius latitudo BD. Super BD erectum ſit trapezium rectangulum CBDE, bina latera BC, & DE habens, parallela & proportionalia periopherijs BF, DG. Erit vt maximum trapezij perpendiculum CB ad circumferentiam extimam annuli BF, ita ipſum trapezium ad annulum. *Schematiſmus 1. Fig. 5.*

QVoniam ex hypotheſi CB eſt ad DE, vt peripheria BF ad peripheriam DG, hoc eſt vt [a] BA ad DA, patet CE productam cadere in A. Quia verò proportio tam circulorum BFA, DGA, quàm ſimilium triangulorum BCA, DEA, eadem eſt, quæ quadratorum BA, DA; erit triangulum BCA ad triangulum DEA, vt circulus BFA ad circulum DGA. Igitur permutando, vt triangulum BCA ad circulum BFA, ita triangulum DEA ad circulum DGA. Ergo & reliquum trapezium BCED eſt, ad reliquum annulum BFGD, vt triangulum BCA ad circulum BFA; hoc eſt vt [b] BC ad peripheriam BF, quod erat propoſitum. *a Pappus l. 5 p. 41. b 2. huius.*

Corollarium.

Hinc patet ſi perpendicula BC, DE æqualia fuerint peripherijs BF, DG, trapezium annulo plano eſſe æquale.

PROPOSITIO IV.

Datus ſit circulus BFA, & alius ei concentricus DGA, radij ſint AD, AB, ex eorum terminis erigantur perpendiculares DE, BC, quibus ex centro occurrat recta in E & C. *Schematiſmus 1. Fig. 5.*

Vt BC eſt ad circumferentiã BF, ſic DE eſt ad circumferentiã DG.

EST enim BC ad DE, vt BA ad DA, hoc eſt vt circumferentia [a] BF ad circumferentiam DG. Igitur permutando liquet propoſitum. *a Pappus 6 l. 5. p. 41.*

PROPOSITIO V.

Si Cylindrus, ſiue integer, ſiue [a] cauus AB, & priſma quodcumque CH, baſes & altitudines habeant æquales, erunt æqualia. *Schematiſmus 1. Fig. 6.*

PRopoſitio eſt manifeſta, nam æqualia plana in eamdem vel æqualem altitudinem ducta, non niſi æqualia ſolida poſſunt producere, vlteriorem demonſtrationem qui deſiderat, facilè ex *elem.* 12. conficiet. *a Deſin. 24 huius.*

PROPOSITIO VI.

Schematiſmus 1. Fig. 6. Si Cylindrus, ſiue integer, ſiue cauus AB, & priſma quoduis GH eamdem habeant altitudinem, erunt inter ſe vt baſes.

a Præced. PRiſma CH baſim habens parem Cylindrico ſolido, eſt ad priſma GH, vt planum CED, (hoc eſt vt circulus vel annulus A) ad planum GFED. Sed priſma [a] CH æquatur Cylindrico ſolido AB. Ergo etiam hoc eſt ad priſma GH, vt baſis A ad baſim GFED: quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VII.

Schematiſmus 1. Fig. 7. Data ſit cuiuſcumque Cylindri recti portio per punctum in latere, & per baſeos centrum, ſiue per axem baſeos, aut per ordinatim axi applicatam abſciſſa ADBCE, cuius maxima ſectio ABC; altitudo CB; baſis DFCE. In Cylindricâ eius ſuperficie ducta ſit recta FG, & in baſi FK parallela ad CA.

Dico GF eſſe ad circumferentiam radio KF deſcriptam, vt BC eſt ad circumferentiam deſcriptam radio AC.

PRimò in portione Cylindri circularis ducantur in plano Elliptico DBE recta GH, parallela ad DA, in triangulo ABC recta HL, parallela ad BC; iungaturque KG. Quoniam GF, BC ſunt partes laterum Cylindri, ex quo ſumpta eſt portio, erunt parallelæ. Quare *a Per cõſt.* cùm [a] HL ſit parallela ad BC, etiam ad GF parallela erit. Quoniam igitur GF, FK ſunt parallelæ ad HL, LA, erunt plana KGF, AHL per illas ducta, etiam parallela. Hæc autem ſe- *b 16. Elem. 11.* cantur à plano DGBE, & communes ſectiones ſunt GK, HA Ergo [b] GK, HA ſunt parallelæ Sunt autem & parallelæ FK, LA. Ergo anguli GKF & HAL [c] æquantur. Pari modo *c 11. Elem. 11.* quoniam FG, GK æquidiſtant LH, HA, anguli KGF, AHL pares erunt. Iam autem ex *d 26. Primi elem.* demonſtratis patet AKGH eſſe parallelogrammum, ac proinde KG æquari AH. Ergo [d] GF, HL æquales ſunt, item KF, AL. Sed [e] HL eſt ad circumferentiam radij AL, ſiue KF, vt *e 4. huius* BC ad circumferentiam radij AC. Ergo etiam GF eſt ad circumferentiam radij KF, vt BC ad circumferentiam radij AC: quod erat demonſtrandum.

In portione Cylindri Elliptici, Parabolici, Hyperbolici demonſtratio eſt eadem.

Corollaria.

Ex demonſtratione patet 1. GF æqualem eſſe HL. quod ſi per puncta F, L recta ducatur circumferentiæ baſis occurrens in N, & ex N erigatur in ſuperficie Cylindricâ recta NP, hæc quoque erit æqualis ipſi HL, ac proinde etiam rectæ FG.

Patet 2. FLN eſſe parallelam ad diametrum DE; cùm enim FL, GH iungant æquales, & parallelas GF, LH, etiam FL parallela eſt ad GH; hoc eſt per conſtructionem ad DA.

Patet 3. Si ex puncto quouis O rectæ FN diametro DE parallelæ erigatur OM æquidiſtans rectæ BC, ſiue rectis FG, NP, occurrens Plano Elliptico DBE in M; hanc quoque ipſi LH, ac proinde & rectis FG, NP, æqualem fore.

Patet 4. puncta G, H, M, P, eſſe ad vnam rectam quæ parallela eſt diametro DE.

PROPOSITIO VIII.

Schematiſmus 1. Fig. 8. Rotundum ſolidum ex quâcumque planâ figurâ EZL, quæ [a] axem habeat AZ, circa ordinatim axi applicatam EL in orbem *a Defin. 20. huius.* ducta procreatum per inſcripta Cylindrica corpora exhauritur.

AXis AZ in aliquot æquales partes diuidatur, ductiſque per diuiſionum puncta rectis γH, δK, βO, ad axem perpendicularibus, figuræ ſemiſſi EZA inſcribe rectangula, & conſcribe. Hæc ſi vna cum figura EZA circa EA in orbem ducantur, ſemiſſi rotundi ſolidi

dati

dati inſcribentur, & conſcribentur Cylindrica ſolida: & ea quidem, quæ fient à rectangulis OA, FA, erunt Cylindri integri: reliqua Cylindri caui, [b] quorum baſes erunt plani annuli SS, QQ, PP. Per hæc Cylindrica corpora datum ſolidum rotundum exhauriri, ſic oſtendo. b Defin.14 huius.

Producantur αHI, MKR, in B & C, manifeſtum eſt priora Cylindrica ſolida inſcripta, quæ fiebant à rectangulis Hδ, Kβ, OA, circa EA in orbem ductis, eadem eſſe cum aggregato Cylindrorum, qui fiunt à rectangulis HA, KB, OC, circa EA conuerſis, ſicut rectangula ipſa ſunt eadem. Similiter priora Cylindrica corpora conſcripta, quæ fiebant à rectangulis αγ, Mδ, Gβ, FA eadem eſſe cum aggregato Cylindrorum genitorum à rectangulis αA, MB, GC, FD. Ergo priorum conſcriptorum, & inſcriptorum eadem eſt differentia, quæ eſt poſteriorum. Atqui poſteriorum differentia eſt [c] Cylindrus αX. Ergo etiam priorum differentia erit Cylindrus αX. Sed Cylindrus αX, fit tandem quocumque dato minor: ſi enim AZ in plures ſemper, ac plures æquales partes diuidatur, fiet tandem γH, ſiue Zα Cylindri altitudo datâ minor. Ergo differentia priorum conſcriptorum, & inſcriptorum, nimirum differentia aggregati Cylindricorum ſolidorum, à rectangulis αγ, Mδ, Gβ, FA genitorum, & aggregati Cylindricorum quæ producta ſunt à rectangulis Hδ, Kβ, OA, tandem erit minor dato. Ergo multò magis ipſius rotundi ſolidi & ipſi inſcriptorum, tandem dato minor erit: quod erat demonſtrandum. c Vide Arch. 21. de conoid.

PROPOSITIO IX.

Cylindri recti circularis portio per centrum baſis & latus ſecta per inſcripta priſmata exhauritur.

Esto Cylindri Circularis portio obliquè per centrum ſecta ADBCE, ſectio maxima ABC, baſis DCE ſemicirculus, altitudo BC. Schematiſmus 1. Fig. 9.

Radio AC in aliquot æquales partes ſecto, per ſectionum puncta MS, duc parallelas ad DE, & comple rectangula HI, RG ſemicirculo inſcripta, item rectangula Dϖ, Kϱ, αγ eidem ſemicirculo circumſcripta.

Ex punctis I, G, K, α, erigantur in Cylindricâ ſuperficie rectæ IO, GΦ, KQ, αδ. Erunt hæ parallelæ ad altitudinem portionis BC, adeóque perpendiculares baſi. Ex punctis quoque L, ϖ, ϱ, X, ξ, γ, erige LN, ϖF pares ipſis KQ, IO; & Xβ, ϱψ pares ipſis αδ, GΦ; & ζω, γϛ pares ipſi βC; ſintque omnes parallelæ ad BC, vnde etiam rectis IO, GΦ, KQ, αδ parallelæ erunt. Ex punctis quoque R, θ erige vſque ad planum Ellipticum DBE rectas RT, θλ parallelas ad KQ, LN, IO, ϖF, quæ ipſis proinde æquales [a] erunt. Erunt autem puncta N, Q, T, λ, O, F, item puncta β, δ, Φ, ψ, item puncta ω, B, ϛ, ad rectas lineas in plano Elliptico exiſtentes. Per rectas ωζ, δα, TR, & ζαR; item per rectas ϛγ, ΦG, λθ, & γGθ ducantur plana in plano Elliptico facientia ſectiones ωδT, ϛΦλ. Rurſum per rectas βX, QK, & XKH, item per ψϱ, OI & ϱIP ducantur plana, in plano Elliptico ſectiones facientia βQH, ψOP. Denique per rectas LN, LD, & Fϖ, ϖE duc plana, quæ in plano Elliptico ſectiones faciant ND, FE. a Corol.7. huius.

His planorum ſectionibus manifeſtum eſt portioni inſcriptum eſſe corpus ex pluribus rectis compoſitum priſmatibus. Primum eſt triangulare HQKIOP, cuius parallela plana ſunt triangula rectangula HQK, POI. Alterum eſt priſma rectum quadrangulum RTδαGθλΦ, cuius aduerſa plana parallela ſunt RTδα, & θλΦG trapezia, quorum bina latera TR, δα, & λθ, ΦG æquidiſtant. Reliqua ſolida ſi plura forent inſcripta, quadrangula quoque priſmata eſſent. Pari modo liquet portioni conſcriptum eſſe corpus priſmatibus conſtans, vno pluribus, quàm inſcriptum. Quorum primum eſt rectum priſma triangulare, cuius parallela plana ſunt DNL, EFϖ triangula rectangula. Reliqua KQβX ϱIOψ, & αδωζγGΦϛ ſunt priſmata recta quadrangula, quorum parallela plana ſunt trapezia rectangula bina latera αδ, ζω, & GΦ, γϛ habentia parallela.

Dico primò ſi plura ſemper ac plura rectangula baſi inſcribantur & conſcribantur, factiſque per latera ſectionibus vt priùs, plura ſemper ac plura portioni ſolida inſcribantur ac conſcribantur, fore vt tandem corpus conſcriptum ab inſcripto differat quantitate minori datâ.

Dico ſecundò inſcriptum portioni corpus, portionem [c] exhauriet. Primum ſic demonſtro: c Defin.18

Si plura ſemper ac plura rectangula ſemicirculo DCE inſcribantur & conſcribantur, rectangulum infimum DLϖE fiet tandem dato plano minus, ſed differentia rectangulorum inſcriptorum ac conſcriptorum, plana nimirum HL, RX, ζG, θϱ, Pϖ, æquantur rectangulo DLϖE,

Cæterum non copiæ aut varietatis gratiâ duplex iſta ratio exhauriendi hac propoſitione & præcedenti allata eſt, ſed quòd vtraque in ſequentibus Theorematibus vſui futura ſit.

PROPOSITIO XI.

Cylindri circularis recti portio, per punctum in latere & centrum baſeos abſciſſa, altitudinem habens æqualem circumferentiæ baſis, æqualis eſt ſphæræ baſeos.

ESto Cylindri recti portio per B punctum in latere, & per A centrum baſeos abſciſſa DBCE, cuius baſis DCE, altitudinem CB æqualem habens circumferentiæ DCEY. Demonſtrandum eſt portionem DBCE æquari ſphæræ, quæ fit à circulo DCEY. [*Schematiſmus 2. Fig. 11.*]

Radium AC ſeca in aliquot æquales partes, perque ſectionum puncta ductis parallelis ad diametrum DE, comple rectangula HI, NO, βδ. Ex punctis H, L, erige in ſuperficie Cylindricâ rectas HG, LK (erunt hæ [a] æquales & rectæ ad baſim DCE) ducanturque in plano Elliptico DBE, rectæ GF, KI, GK. His peractis, habes inſcriptum portioni priſma rectum triangulare FGHIKL, cuius aduerſa plana ſunt triangula FGH & IKL rectangula. Ex punctis N, P, erige in Cylindricâ ſuperficie rectas NR, PT, item ex M, O, rectas MQ, OS parallelas ad BC, & occurrentes plano Elliptico in Q, S: erunt hæ [b] æquales ipſis GH, LK, & puncta G, Q, S, K, ad [c] vnam rectam, ducantur rectæ QR, ST. Atque ita inſcriptum eſt portioni priſma rectum quadrangulum MQRNPOST, cuius parallela plana ſunt rectangula trapezia MQRN, & OSTP, quorum bina latera MQ, NR, & OS, PT, æquidiſtant. [*a Corol. 1. p. 7. huius.* *b Coroll. 3. p. 7. huius.* *c Coroll. 4. p. 7. huius*]

Pari modo portioni inſcribemus priſma quadrangulum αλπβθδζω. Quod ſi radio AC in plures ſemper ac plures æquales partes ſubdiuiſo, plura ſemper ac plura rectangula ſemicirculo inſcribantur, ſuper his tanquam baſibus eâdem methodo tot ſolida portioni inſcribi poterunt, vt tandem [d] exhauriatur, quemadmodum *propoſ. 9.* demonſtrauimus. [*d Defin. 28 huius.*]

Venio iam ad ſphæram baſeos DCE. Manente diametro DE ſemicirculus DCE cum iiſdem inſcriptis ſibi rectangulis circumagi intelligatur. Semicirculus deſcribet ſphæram: Rectangulum verò HI ſphæræ Cylindrum inſcribet: reliqua rectangula NO, βδ inſcribent eidem ſphæræ Cylindros, [e] quorum baſes erunt annuli plani αβγελ, MNμψλV, vt cernere eſt in *Fig. 12.* quæ circulum baſeos cum inſcriptis ſibi rectangulis ſeorſim exhibet. Et ſi ſubdiuiſo vlterius radio AC, plura ſine termino rectangula ſemicirculo DCE inſcribantur, ac dein circa diametrum DE circumagantur, ſolida Cylindrica quæ ex hac reuolutione ſphæræ inſcribentur, ſphæram ipſam tandem [a] exhaurient. [*e Defin. 24. huius.* *a 8. huius.*]

Reliquum eſt vt ſolida quæ tam portioni, quàm ſphæræ inſcripſimus, inter ſe comparemus. Atque ex eorum perpetuâ æqualitate, ipſius quoque portionis ac ſphæræ æqualitatem concludamus. Quoniam per hypotheſim portionis altitudo CB par eſt circumferentiæ DCEY, etiam HG, ſeu LK par erit [b] circumferentiæ radio HF deſcriptæ. Quia igitur rectangulum eſt triangulum GHF (cùm enim ex hypotheſi Cylindrus ſit rectus, recta GH in eius ſuperficie ducta, erit ad baſim, ac proinde ad FH in baſi ductam, perpendicularis.) Ergo [c] triangulum FGH baſis priſmatis FGHLIK, æquatur circulo, cuius radius HF; nimirum circulo HΦ, [d] qui baſis eſt Cylindri facti à rectangulo FL, circa DE circumacto. Eſt autem communis etiam vtriuſque altitudo HL. Ergo priſma FGHLIK Cylindro rectanguli FL circa DE circumacti, æquale [e] eſt. Rurſum quia BC æqualis ponitur peripheriæ DCEY, etiam MQ, (hoc eſt per *corollar. 3. p. 7. huius*, GH) & NR, parallela trapezij latera, æquantur circumferentijs, quarum radij ſunt HF, ſiue MZ, & NZ. Ergo trapezium MQRN, baſis priſmatis MQRNPOST, æquatur [f] annulo plano, qui eſt differentia circulorum radijs NZ, MZ deſcriptorum, nimirum annulo plano MNμψγV, qui baſis eſt Cylindri caui, à rectangulo NMOP producti. Quare, cùm Cylindri caui & priſmatis communis ſit altitudo NP. Erunt [g] æqualia. Non aliter oſtendetur priſma αλπθβδζω, æquari Cylindro cauo, qui producitur à rectangulo αβθδ circa DE reuoluto. [*b 7. huius.* *c Archimed. cir. p. 1.* *d Fig. 12.* *e 5. huius.* *f Coroll. p. 3. huius.* *g 6. huius.*]

Totum igitur corpus inſcriptum portioni, toti corpori inſcripto ſphæræ æquale eſt. Pari diſcurſu demonſtrabimus omnia priſmata quocumque numero portioni fuerint inſcripta, æquari ſolidis Cylindricis æquè multis ſphæræ baſeos inſcriptis. Cùm igitur tam ſolida rectilinea portionem, [h] quàm Cylindrica [i] ſphæram denique exhauriant; ipſa etiam [k] portio ſphæræ baſeos æqualis erit. Quod erat demonſtrandum. [*h 9 huius.* *i 8. huius.* *k Corol. 2. huius.*]

Aliter.

Aliter.

Schematiſmus 2. Fig. 13.

Radio DA in aliquot æquales partes diuiſo, quadranti ADC inſcribe rectangula HA, MI, RN. Ex punctis H, M, R, erige in Cylindricâ ſuperficie rectas HK, MP, RV; erunt hæ ad baſim DCE rectæ ac parallelæ ad BC. Ex punctis quoque F, L, Q erige FG, LO, QT parallelas ad BC, plano Elliptico DBE occurrentes in G, O, T; erunt etiam hæ ad baſim rectæ & parallelæ ac æquales [a] ipſis HK, MP, RV. His ita conſtitutis, inſcripta ſunt ſemiſſi portionis tria priſmata HIAFGK, MNILOP, RSNQTV: quod ſic oſtendo. Quoniam FG, HK ſunt æquales & parallelæ, quæ eas iungunt KG, HF, ac proinde etiam KG, IA, ſunt æquales & parallelæ. Igitur etiam KIGA æquales & parallelæ erunt. Quoniam ergo latera AG, GF, FA ſunt æqualia & parallela lateribus IK, KL, LI; patet oppoſita triangula eſſe æqualia, ſimilia & parallela. Quare ſolidum HIAFGK priſma eſt. Eodem modo oſtendam reliqua eſſe priſmara. Quod ſi ſubdiuiſo vlterius radio DA, plura ſemper ac plura rectangula quadranti ADC inſcripſeris, ſuper his tanquam baſibus tot priſmata ſemiſſi portionis inſcribi eâdem methodo poterunt, vt ſemiſſis portionis tandem [b] exhauriatur; quemadmodum *propoſit.* 10 demonſtratum eſt.

a Coroll. 3. p. 7. huius.
b defin. 18. huius.

Intelligatur deinde quadrans ACD cum inſcriptis ſibi rectangulis manente radio AD circumagi. Hac reuolutione quadrans deſcribet hemiſphærium; rectangula verò HA, MI, RN, hemiſphærio inſcribent Cylindros ſibi mutuo ſuperimpoſitos. Quod ſi ſubdiuiſo vlterius radio, & pluribus ſemper ac pluribus rectangulis quadranti inſcriptis ac circa DA in orbem actis, inſcripti hemiſpherio Cylindri ſine fine multiplicetur, exhaurietur tandem [c] ſemiſſis portionis.

c Ex Archim. 21. conoid.

Reſtat vt ſolida tam ſemiſſi portionis quàm hemiſphærio inſcripta comparemus. Quoniam BC altitudo portionis per hypotheſim par eſt circumferentiæ DCEY, etiam HK latus priſmaris HIAFGK æquatur circumferentiæ, [a] cuius radius HI, ſiue FA. Eſt autem & angulus IHK rectus. Ergo triangulum IHK baſis priſmatis HIAFGK, æquatur [b] circulo cuius radius HI ſiue FA, qui baſis eſt Cylindri facti à rectangulo HA circa DA reuoluto. Quare cùm vtriuſque ſolidi, Cylindri nimirum & priſmatis, communis quoque ſit altitudo HF, priſma Cylindro [n] æquale erit. Pari modo oſtendam priſma MNILOP æquari Cylindro facto ab MI rectangulo circa DA rotato; & priſma RSNQTV, æquale eſſe Cylindro, quem producit rectangulum RN circumactum circa DA. Omnia igitur portionis ſemiſſi inſcripta priſmata æquantur omnibus Cylindris hemiſphærio inſcriptis. Atque hoc ſemper eueniet quotcumque tum priſmata ſemiſſi portionis, tum Cylindros hemiſphærio, æquali numero inſcripſerimus.

a 7. huius.
b Archim. dim. cir. p. 1.
n 5 lib. 1. huius.

Quare cùm priſmata [c] ſemiſſem portionis, & Cylindri [d] hemiſphærium tandem exhauriant, liquet ſemiſſem portionis [e] hemiſphærio exæquari. Quod erat demonſtrandum.

c 10 huius.
d Archim. conoid. p. 21
e Coroll. p. 1. huius.

PROPOSITIO XII.

Præcedens theorema per indiuiſibilia ſiue per heterogena demonſtratur.

Schematiſmus 2. Fig. 13.

ESto Cylindri circularis recti portio per centrum baſeos & punctum in latere abſciſſa DBCE, cuius baſis ſit DCE, maxima ſectio ABC, altitudo CB.

Demonſtrandum eſt, ſi altitudo CB par ſit peripheriæ DCEY, portionem ſphæræ baſeos eſſe æqualem.

Secentur tum portio, tum ſphæra baſeos quotcumque planis ſectioni maximæ ABC æquidiſtantibus. Sectiones in portione erunt triangula rectangula KHI, PMN, VRS: in ſphærâ autem circuli erunt; quorum radij HI, MN, RS. Iam quia BC altitudo portionis æqualis ponitur peripheriæ DCEY, etiam KH, MP, RV peripherijs radiorum HI, MN, RS æquales [a] erunt. Ergo triangula KHI, PMN, VRS, circulis radiorum HI, MN, RS [b] ſunt æqualia. Atque hoc ſemper eueniet quotcumque ſectiones fiant per portionem & ſphæram. Portio igitur ſphæræ baſeos æqualis eſt. Quod erat demonſtrandum.

a 7 huius.
b Archim. dim. circ. p. 1

Aliter.

Schematiſmus 2. Fig. 11.

Licebit eandem veritatem per heterogenea hoc etiam modo demonſtrare. In baſi DCE ducantur quotuis rectæ HL, NP, βθ, parallelæ diametro DE, per quas ducantur plana ad

baſim

baſim recta, quæ in portione ſectiones producant rectangula HGKL, NRTP, βπωϑ. Eædem deinde parallelæ HL, NP, βϑ vnà cum ſemicirculo DCE circa DE circumactæ, inſcribant ſphæræ baſeos Cylindricas ſuperficies rectas, quæ erunt quaſi quædam curuæ ſectiones ſphæræ reſpondentes totidem rectis ſectionibus portionis. Quoniam igitur BC ponitur æqualis circumferentiæ DCEY, etiam HG, NR, βπ, circumferentijs radiorum HF, NZ, βX [c] æquales erunt. Sed rectangula, quorum baſes æquantur circumferentijs baſium Cylindricarum, altitudines verò ipſis Cylindrorum altitudinibus, ſuperficiebus Cylindricis æqualia [d] ſunt. Ergo rectangula HGKL, NRTP, βπωϑ, æquantur ſuperficiebus Cylindricis, quas producunt HL, NP, βϑ, circa DE reuolutæ. Quod quia ſemper euenit, portio ſphæræ baſeos æqualis eſt. Quod erat demonſtrandum.

c 7. *huius.*

d *Satis per ſe patet vide nihilominus prop. 4. l. 1. huius operis. quæ ab his non dependet.*

Corollarium I

Ad duas præcedentes.

SI portio ſecetur planis HGKL, NRTP &c. rectis ad baſim DCE, & tranſeuntibus per lineas HL, NP &c. diametro DE æquidiſtantes, erunt portionis ſegmenta HGBKL, NRBTP &c. æqualia ſegmentis ſphæricis quæ à circularibus planis HCL, NCP &c. circa axem DE in orbem ductis procreantur. *Schematiſmus* 2. *Fig.* 11.

Item portionis ſegmenta HDGKEL, NHGRTPLK &c. æqualla ſunt ſolidis ſphæricis, quæ fiunt à Circularibus planis DHLE, HNPL &c. circa DE in axem ductis.

Demonſtratio eadem eſt cum 1. & 4. *propoſitionis* 11. *huius*.

Corollarium II.

Si portio altitudinem CB parem habens circumferentiæ DCEY, & ſphæra baſeos ſecentur planis ad maximam portionis ſectionem parallelis IKH, NPM, SVR; erunt ſegmenta portionis æqualia ſegmentis ſphęricis quæ ab iiſdem planis circa DE reuolutis, producuntur. *Schematiſmus* 2. *Fig.* 13.

Demonſtratio eadem cum ſecundâ & tertia, quæ pro ipſo theoremate allatæ ſunt.

Scholium.

Methodum demonſtrandi per indiuiſibilia, vel (vt ego appellare ſoleo) per heterogenea, quam nobilis Geometra Bonauentura Cauallerius in lucem protulit, pro legitimâ ac Geometricâ admittendam non exiſtimo. Procedit illa à lineis ad ſuperficies, à ſuperficiebus ad corpora, atque æqualitatem vel proportionem in lineis repertam, concludit de ſuperficie; repertam in ſuperficiebus traducit ad ſolida: quâ ratiocinandi formâ, niſi ad homogenea reuocetur, conficitur omnino nihil. Nam, vt rem exemplo declaremus, quem conuincat iſthæc ratiocinatio: triangulares omnes portionis Cylindricæ ſectiones IKH, NPM &c. æquantur ſectionibus ſphæræ Circularibus quarum radij HI, MN, &c. Ergo Cylindri portio ſphæræ æqualis eſt. Nulla ſanè eſt iſta collectio; quando neque ex triangulis Cylindrica portio, neque ex circulis ſphæra componitur. Admittunt quidem Geometra lineam generari ex fluxu puncti; ſuperficiem ex fluente lineâ; corpus ex ſuperficie. Sed aliud longè eſt ex indiuiſibilium fluxu quantitatis ſpecies generari; aliud ex indiuiſibilibus componi. Primum omnino exploratæ veritatis eſt. Alterum cum Geometriâ ſic pugnat, vt niſi illud ipſa deſtruat, ipſam deſtrui neceſſe ſit. Abſit tamen vt inuento pulcherrimo debitam laudem cupiam detrahere. Hoc ſolum dico demonſtrationes per heterogenea inſtitutas ad aſſenſum non cogere, niſi, quod fieri plerumque poteſt, ad homogenea reducantur. Ita in exemplo à me iam allata, ex eo quod omnia triangula portionis omnibus ſphæræ circulis ſint æqualia, non euincitur portionis ac ſphæræ æqualitas; euincetur autem, ſi ad homogenea reuoces, hunc in modum: Quoniam triangula portionis & circuli ſphæræ æqualibus imo communibus diſtant interuallis HF, ML, &c. continuò apparet, portioni priſmata, ſphæræ Cylindros inſcribi poſſe, ſic vt communes vtrorumque *Fig.* 13.

ſint altitudines, baſes autem ſint, priſmatum quidem dicta triangula, Cylindrorum verò circuli. Ex horum autem Cylindrorum ac priſmatum perpetua æqualitate iam neceſſariò portionis ac ſphæræ æqualitas, vt in demonſtratione ſecunda fecimus, concludetur. Quod ſi aſſertio proponatur, quæ non aliter quàm indiuiſibilium methodo probetur, de illius veritate eo vſque dubitabo, dum appareat quâ ratione poſſit ad homogenea reuocari. Hoc verò efficere non aliud eſt, quàm more veterum per inſcripta homogenea propoſitas quantitates exhaurire.

Vide quæ de eodem argumentandi modo dicturi ſumus ad propoſitionem 2. lib. 2.

PROPOSITIO XIII.

Schematiſmus 2. Fig. 14.

Omnis portio Cylindri Circularis recti, per centrum baſis & punctum in latere abſciſſa, ad ſphæram baſis eam habet rationem, quam altitudo portionis ad circumferentiam baſis.

ESto DBCE portio per A centrum baſeos & B punctum in latere abſciſſa, altitudinem habens BC. Demonſtrandum eſt portionem eſſe ad ſphæram à circulo ADCEY factam, vt BC ad peripheriam DCEY.

Eâdem methodo, quâ ſupra [a] vſi in demonſtratione ſumus, portioni inſcribe corpus ex
a 11. *huius* pluribus priſmatibus compoſitum, quorum primum erit triangulare, reliqua verò quadrilatera. Item ſphæræ à rectangulis HI, NO, βϑ, circa DE in orbem ductis, inſcribantur ſolida Cylindrica, quorum primum à rectangulo HI productum, erit Cylindrus integer, reliqua verò Cylindri caui.

GH eſt ad peripheriam radij HF, vt [b] BC ad circumferentiam DCEY, ſed vt GH eſt ad
b 7. *huius* circumferentiam radij HF, ſic [c] triangulum FGH eſt ad circulum radij HF. Ergo vt BC ad
c 2. *huius* circumferentiam DCEY, ſic triangulum FGH ad circulum radij FH. Sed priſma FGHLKI, & Cylindrus factus à rectangulo HI circa DE reuoluto (quia eamdem habent altitudinem HL) ſunt inter ſe [d] vt baſes; hoc eſt vt triangulum FGH ad circulum radij FH. Ergo
d 6. *huius* priſma dictum ad dictum Cylindrum quoque eſt vt BC ad circumferentiam DCEY. Deinde quoniam tam GH (hoc eſt QM) eſt ad peripheriam radij FH, quàm NR ad peripheriam radij ZN, vt BC [e] ad peripheriam DCEY; erit QM ad peripheriam radij FH, ſiue Z-
e 7. *huius* M, vt RN ad peripheriam radij ZN. Ergo [f] trapezium rectangulum RNMQ eſt ad planum
f 3. *huius* annulum, qui latitudinis MN, eſt differentia circulorum radijs ZM, ZN deſcriptorum, vt RN maximum trapezij perpendiculum ad extimam annuli circumferentiam, cuius nimirum
g 7. *huius* radius eſt ZN; hoc eſt vt BC [g] ad peripheriam DCEY. Sed priſma MQRNPOST eſt [h] ad
h 6. *huius* Cylindrum cauum productum ab rectangulo MNPO, circa DE reuoluto (quia communis eſt vtriuſque altitudo NP) vt baſis, trapezium nempe MQRN ad baſim, ſcilicet ad annulum latitudinis MN. Ergo priſma MQRNPOST eſt ad Cylindrum cauum productum à rectangulo MNPO circa DE reuoluto, vt BC ad peripheriam DCEY. Pari modo oſtendam priſma αλπβϑδζω eſſe ad cauum Cylindrum, productum ab rectangulo βϑ circa DE circumacto, vt BC ad circumferentiam DCEY. Quoniam igitur ſingula priſmata ſunt ad ſingula Cylindrica ſolida, vt BC ad peripheriam DCEY; erunt [a] omnia priſmata ſimul ſum-
a 12. *huius* pta ad omnia Cylindrica ſolida ſimul ſumpta, vt BC ad peripheriam DCEY. Atq; hoc ſemper
b 9. *huius* eueniet, quotcumque priſmata portioni & Cylindrica ſolida ſphæræ æquali numero inſcri-
c 8. *huius* bantur. Quare, cùm tam priſmata [b] portionem, quàm [c] Cylindrica ſphæram denique exhau-
d 1. *huius* riant; etiam [d] portio erit ad ſphæram vt BC ad circumferentiam DCEY. Quod erat demonſtrandum.

Aliter.

Schematiſmus 2. Fig. 15.

Eſto Cylindri circularis portio DBCE, cuius altitudo BC, ſectio maxima ABC. Oporteat demonſtrare portionem eſſe ad ſphæram baſeos vt BC ad circumferentiam DCEY.

Inſcribatur portioni corpus ex pluribus triangularibus priſmatis compoſitum, vt factum
e 11. *huius* ſupra [e] in ſecunda demonſtratione. Similiter & ſphæræ baſeos Cylindri inſcribantur, ſupra ſe mutuo poſiti, ex rectangulis HA, MI, RN, circa DA reuolutis procreati.

f 2. *huius* Triangulum rectangulum IKH, ſiue AGF eſt ad [f] circulum radij IH, vt KH ad periphe-
g 7. *huius* riam radij IH; hoc eſt vt BC [g] ad circumferentiam DCEY. Sed [h] priſma HIAFGK eſt ad
h 6. *huius* Cylindrum productum à rectangulo HA reuolutio circa DA, vt baſis, nempe triangulum IKH ad baſim nempe, circulum radij IH, cùm vtraque ſolida communem habeant HF altitudinem,

titudinem, conſtituta nimirum inter duo parallela plana IKH, & AGF. Ergo priſma HIAFGK eſt ad Cylindrum factum à rectangulo HA, circa DA circumacto, vt BC ad circumferentiam DCEY. Eodem diſcurſu oſtendam priſmata omnia reliqua MNILOP, RSNQTV ſingula eſſe ad reliquos Cylindros ſingulos, quos producunt rectangula MI, RN circa DA circumacta, vt BC ad circumferentiam DCEY. Ergo [i] omnia priſmata ſimul ſumpta, ſunt ad omnes Cylindros ſimul ſumptos, vt BC ad peripheriam DCEY. Atque hoc ſemper eueniet, quotcumque priſmata portioni DCEY, & Cylindros æquali numero ſphæræ inſcripſerimus. Quare cùm eiuſmodi inſcriptionibus tam [a] portio quàm [b] ſphæra tandem exhauriatur; ipſa quoque portio erit ad ſphæram baſeos, vt BC ad circumferentiam DCEY. Quod erat demonſtrandum.

i Ex 12. 5. *a 10. huius* *b Archim. 22. conoid.*

Hoc theorema cùm vniuerſale ſit, etiam ij, huius complectitur, æqualitati nihilominus, quæ ſuam ſemper in demonſtrando facilitatem & elegantiam habet, viſum ſuit eam concedere prærogatiuam, vt ſeorſim exhiberetur.

PROPOSITIO XIV.

Præcedens theorema per heterogenea demonſtratur.

Portio & ſphæra ſecentur quotcumque planis ad portionis ſectionem maximam parallelis, in portione producentur triangula IKH, NPM, &c. in ſphærâ circuli, quorum radij IH, NM &c. Iam oſtendi in præced. demonſt. ſecundâ ſingula triangula eſſe ad ſingulos circulos vt BC ad peripheriam DCEY. Quare cùm hoc ſemper eueniat, erit portio ad ſphæram, vt BC ad circumferentiam DCEY. Quod erat demonſtrandum. *Schematiſmus 2. Fig. 15.*

Aliter.

Eadem veritas etiam ſic probabitur. Ducantur quotcumque rectæ HL, NP &c. ad diametrum DE parallelæ; per quas ductis planis ad baſim DCE rectis, portionem ſeca. Sectiones in portione factæ, erunt rectangula HGKL, NRTP &c. Eædem deinde parallelæ HL, NP &c. circa DE circumactæ, conficient in ſphærâ ſuperficies Cylindricas, quaſi totidem curuas ipſius ſphæræ ſectiones, planis ſectionibus portionis HGKL, NRTP &c. reſpondentes. Quia verò rectangulorum ac ſuperficierum Cylindricarum communes ſunt altitudine HL, NP &c. [c] erunt rectangula ad ſuperficies Cylindricas, vt baſes ad baſes: hoc eſt vt GH, RN &c. ad peripherias radiorum HF, NZ &c. hoc eſt vt BC ad [a] circumferentiam DCEY. Cùm igitur hoc ſemper eueniat, erit quoque portio ad ſphæram vt BC ad circumferentiam DCEY. Quod erat propoſitum. *Schematiſmus 2. Fig. 14.*

c demonſtrabitur l. 2 prop 4. independenter ab hoc theoremate. *a 27. huius*

Corollarium I

ad duas præcedentes.

Si portio ſecetur planis HGKL, NRTP &c. rectis baſi DCE; & tranſeuntibus per lineas HL, NP æquidiſtantes diametro DE: erunt portionis ſegmenta HGBKLCH, NRBTPCN &c. ad ſolida ſphærica, quæ à planis circularibus HCL, NCP &c. circa axem DE circumactis, procreantur, vt totius portionis altitudo BC ad circumferentiam DCEY. *Schematiſmus 2. Fig. 14.*

Item portionis ſegmenta HDGKEL, NHGRTPLK &c. ſunt ad ſphærica ſolida, quæ fiunt à planis DHLE, NHLP &c. circa DE reuolutis, vt BC ad circumferentiam DCEY.

Demonſtratio eadem eſt cum 1. & 4. *prop.* 13.

Corollarium II.

Segmenta portionis & ſphæræ abſciſſa planis ad maximam ſectionem ABC parallelis, ſunt etiam inter ſe, vt BC portionis altitudo ad baſis peripheriam DCEY.

Demonſtrabitur diſcurſu demonſtrationis ſecundæ ac tertiæ præcedentis huc tranſlato.

PROPOSITIO XV.

Eſto Cylindri Elliptici recti portio DBCE, per B punctum in latere, & per baſeos axem alterutrum DE abſciſſa. *Schematiſmus 2.*

Portio eſt ad ſphæroïdem, quæ fit ab Ellipticâ baſe DCE circa *Fig. 14. 15.*

Digitized by Google

PROPOSITIO XVII.

Cylindri recti Parabolici, aut hyperbolici, ſiue alterius cuiuſcumque, ex figuræ nimirum cuiuſuis curuâ & rectâ lineâ compreхenſæ, YDC, recto ducto procreati, data ſit portio ACBD, per figuræ axem AD & punctum B abſciſſa. *Schematiſmus 3. Fig. 17.*

Portio eſt ad ſolidum à baſi CDA circa axem AD in orbem ducta genitum (quod quidem ſi baſis parabola aut hyperbola eſt, conoïs erit parabolica aut hyperbolica) vt CB portionis altitudo ad peripheriam circuli, cuius radius eſt ordinatim ad axem poſita AC.

Diuidatur in aliquot æquales partes ordinatim axi applicata CA, perque ſectionum puncta K,I, H,ductis ad axem AD parallelis, inſcribantur portionis baſi rectangula ZI, VH, TA; ſuper quibus portioni inſcribantur priſmata recta, vt factum *prop.* 11. *demonſt. primâ*, quorum primi baſis erit rectangulum triangulum AEH; reliquorum verò trapezia rectangula, HEFI, IFGK.

Deinde figura ADC cum inſcriptis ſibi rectangulis circa axem AD in orbem ducatur. Hac reuolutione inſcribentur ſolido rotundo baſeos Cylindrica ſolida, quorum primum à rectangulo TA genitum, erit Cylindrus; reliqua à rectangulis VH, ZI producta, Cylindri caui, quorum baſes ſunt plani annuli RV*a*, SZ*b*, qui à rectis VR, ZS, ſiue ij qui à rectis IH, KI, reuolutione ſupradictâ generantur.

Quoniam triangulum AEH, angulum habet rectum ad H, ita erit ad circulum radij AH, vt [a] EH ad circumferentiã radij AH. Quia verò priſmatis AEHTNQ, & Cylindri à rectangulo TA facti, communis eſt altitudo HT; erit priſma ad Cylindrum, vt [b] triangulum AEH baſis priſmatis, ac circulum radij AH, baſim Cylindri; hoc eſt (quemadmodum iam oſtendi) vt EH ad circumferentiam radij AH; hoc eſt vt BC ad circumferentiam radij AC. Vlterius quoniam radiorum AH, AI peripheriæ ſunt inter ſe, vt radij AH ad AI; ſitque etiam EH ad FI, vt AH, AI; erunt trapezij rectanguli EFIH perpendicula EH, FI radiorum AH, AI peripheriis proportionales. Trapezium igitur HEFI eſt [c] ad planum annulum latitudinis HI (eſt hic par annulo RV*a*) vt maximum trapezij perpendiculum FI eſt ad maximam annuli peripheriam, cuius radius eſt AI; hoc eſt vt BC ad peripheriam radij AC. Quoniam verò priſmatis HEFIVMOR, & caui Cylindri à rectangulo VH deſcripti, communis eſt altitudo IV; erit [h] priſma ad cauum Cylindrum, vt trapezium HEFI baſis priſmatis, ad annulum latitudinis HI, baſim Cylindri caui; hoc eſt (quemadmodum iam demonſtraui) vt BC ad peripheriam radij AC. Pari modo id ipſum oſtendam de reliquo priſmate IFGKZLPS, & reliquo Cylindro cauo deſcripto à rectangulo ZI.

a 2. huius
b 6. huius
c 3. huius
h 6 lib. 2. huius

Igitur omnia priſmata portioni ACBD inſcripta, ſimul ſumpta, ſunt ad omnes Cylindros cauos, rotundo baſeos ſolido inſcriptos, ſimul ſumptos, vt BC ad circumferentiam radij AC. Atque hoc ſemper continget, quotcumque priſmata portioni & Cylindrica pari numero ſolida, rotundo baſeos ſolido inſcripſerimus. Quare cùm inſuper tam [d] portio quàm rotundum [e] baſis ſolidum per inſcriptiones illas tandem exhauriantur; etiam portio erit ad rotundum baſis ſolidum, vt BC ad peripheriam radij AC. Quod erat demonſtrandum.

d 9 huius
e 8. huius
f 1. huius

Aliter.

Axis DA baſeos in partes aliquot æquales diuidatur, & per ſectionum puncta S,N,I, ductis parallelis ad ordinatim poſitam AC, baſi rectangula HA, MI, RN, ſuperque iis portioni triangularia priſmata inſcribantur AFGKHI &c. vt factum *prop. 11. in ſecunda demonſtratione*. Eadem deinde rectangula circa axem AD in orbem ducta, inſeribant rotundo baſeos ſolido Cylindros ſibi mutuo ſuperimpoſitos. Atque hæ inſcriptiones in infinitum continuentur. Demonſtrabimus eodem diſcurſu, quo vſi ſumus *prop.* 11. *huius in ſecunda demonſtratione*, omnia priſmata portioni inſcripta, quibus ipſa tandem [a] portio exhauritur, ad omnes Cylindros, quibus tandem [b] rotundum baſeos ſolidum exhauritur, eam ſemper habere rationem, quam BC ad circumferentiam circularem radij AC. Ergo portio eſt ad ſolidum rotundum baſeos, [c] vt BC ad circularem peripheriam radij AC. Quod erat demonſtrandum.

Schematiſmus 3. Fig. 18.
a 10. huius
b Archim. 21. conoid.
c 1. huius.

o id factum

l &c. tran-
NBCHE,
n ductis, vt
e primâ.
à planis D-
fig. 2 dij AC. De-



ad ſectio-
gmenta ro-
onſtratio-



ntes ba-
; (ſiue is
yperbo-
xem ha-
habent,

s Circularis
ſtus, eſt co-
ndij AC, vt
rotundum
d portionis.
ltitudo FC

tudinis Cz,



gulo C-
riangu-
ns baſi.
conicæ

ficiet Cy-
is AD, C-
rectangu-
AD aliud
triangu-
lum

lum ABC [b] rectangulum eſt, habetque pro baſi radium AC, erit ad circulum ACMFN, vt BC, [c] altitudo trianguli ad circumſerentiam CMFN. Atqui priſma ADKCBG eſt ad Cylindrum KF, vt [d] baſis priſmatis, triangulum nempe ABC, ad baſim Cylindri circulum nempe ACMN, cùm eadem ſit vtriuſque ſolidi altitudo CK. Ergo priſma ADKCBG eſt ad Cylindrum KF, vt BC ad circumferentiam CMFN. Eſt autem priſma ADCBEH æquale [e] priſmati ADKCBG. Ergo & priſma ADCBEH eſt ad Cylindrum KF, vt BC ad circumferentiam CMFN. Quare cùm pyramis ADCB tertia ſit [f] pars priſmatis ADCBHE, & conus CDF pars quoq; ſit tertia Cylindri KF; etiam pyramis erit ad conum vt BC ad circumferentiam CMFN. Quod erat demonſtrandum.

b Ex hyp. c 2. huius d 6. huius e 40. elem. 11. f Corol. 7. undecimi.

PROPOSITIO XX.

Omnis portio Cylindri circularis recti per centrum baſeos & punctum in latere abſciſſa, maximæ pyramidis ſibi inſcriptæ dupla eſt.

Data ſit portio DBCE; cuius baſis DCE ſectio maxima ACB; altitudo CB. Inſcriptum baſi ſit maximum triangulum DCE. Demonſtrandum eſt portionem duplam eſſe pyramidis DECB, cuius baſis eſt triangulum DCE, altitudo CB.

Schematiſmus 3. Fig. 22.

Si baſis DCE cum inſcripto ſibi triangulo, quod ex duobus triangulis rectangulis CAD, CAE componitur, circa diametrum DE in orbem ducatur, inſcribentur ſphæræ baſeos duo coni recti CDF, CEF, communem habentes baſim CMFN; quorum primus CDF fit à triangulo CAD, alter CEF à triangulo CAE, pyramis autem DECB à ſectione maximâ ABC in duas ſecatur pyramides, quarum latus vnum commune BC baſi rectum eſt. Igitur pyramis DACB eſt ad [a] conum CDF, vt BC ad circumferentiam CMFN, ſiue circumferentiam DCEF. Pari modo [b] pyramis AECB eſt ad conum CEF, vt BC ad circumferentiam CMFN, ſiue DCEF. Tota igitur pyramis DECB, eſt ad totum rhombum conicum DCEF, vt BC ad circumferentiam DCEF. Atqui etiam portio ipſa DBCE eſt ad ſphæram baſeos DCEF, vt BC ad peripheriam DCEF. Ergo portio eſt ad ſphæram, vt pyramis DECB ad rhombum: & alternatim portio eſt ad pyramidem, vt ſphæra ad rhombum. Atqui [c] ſphæra rhombi dupla eſt. Ergo & portio pyramidis dupla erit. Quod fuit demonſtrandum.

a Praced. b Ibid. c Archim. l. 1 ſph. p. 81.

Corollarium.

Ex hoc theoremate habetur cubatura portionis Cylindricæ FCGK. Qui reliquam igitur Cylindri partem FKBHG cubauerit, totum Cylindrum, ac proinde & ſphæram ad rectilineum corpus reuocabit.

Schematiſmus 1. Fig. 2.

PROPOSITIO XXI.

Eſto ſphæræ ſegmentum COED abſciſſum plano ad diametrum EG recto, altitudinem habens EB. Sit autem ſegmento inſcriptus conus DEC.

Schematiſmus 4. Fig. 23.

Segmentum eſt ad conum, vt BG cum radio AG ad BG.

Fiat BF ad BE, vt BG cum AG eſt ad BG, conus CFD æquatur ſegmento [a] ſphærico COED. Sed [b] conus CFD eſt ad conum CED, vt altitudo BF ad altitudinem BE; hoc eſt per conſtructionem vt BG cum AG ad BG. Ergo ſegmentum COED eſt ad conum CED, vt BG cum AG ad BG. Quod erat demonſtrandum.

a Archim. lib 2. de ſph. p. 2. b 14. elem. 12.

PROPOSITIO XXII.

Cylindri recti circularis portio DBCE & ſphæra baſeos ſint plano ad maximam ſectionem ABC parallelo ſectæ, quod in portione producat triangulum GHK; in ſphæra circulum HILP.

Schematiſmus 4. Fig. 24.

 Segmen-

Segmentum portionis minus GHODNKH eſt ad pyramidem ſibi inſcriptam (cuius nimirum baſis eſt triangulum DHG, altitudo HK, eadem nempe quæ ſegmenti portionis) vt GE cum radio AE ad GE.

Pari modo ſegmentum portionis GHCEMBKGH eſt ad inſcriptam ſibi pyramidem (cuius baſis triangulum AEG altitudo HK) vt GD cum AD eſt ad GD.

Primam partem ſic demonſtro.

BAſis DOHG cum inſcripto triangulo rectangulo DGH circa DG circumagatur. Hac reuolutione baſis DOHG efficiet ſegmentum ſphęræ, cuius baſis HILP recta eſt axi DE; Triangulum verò producet conum rectum HDL, ſegmento ſphęrico inſcriptum. Per ea quę
a 19 huius. ſupra [a] demonſtrauimus, pyramis DGHK eſt ad conum HDL, vt KH eſt ad baſeos circum-
b 7 huius. ferentiam HILP, cuius radius eſt GH; hoc eſt [b] vt BC altitudo portionis datæ ad circum-
c Coroll. 2. 14 huius. ferentiam DCEF radio AC deſcriptam; hoc eſt [c] vt ſegmentum DNKHG ad ſegmentum ſphæricum HODQL. Igitur permutando ac inuertendo, ſegmentum DNKHG eſt ad pyramidem DGHK, vt ſegmentum ſphæricum eſt ad conum. Atqui [d] ſegmentum ſphæricum
d 21. huius. eſt ad conum, vt GE cum AE ad GE. Ergo etiam ſegmentum DNKHG eſt ad pyramidem DGHK, vt GE cum AE ad GE. Quod erat demonſtrandum.

Alteram verò partem ſic demonſtrabimus.

e 13. huius. Tota portio DBC eſt ad totam baſis ſphæram, [e] vt BC ad circumferentiam DCEF: item
f Corol. 2. p. 14. huius. portionis ſegmentum GHODNKH eſt ad ſegmentum ſphæræ HODQL, vt [f] BC ad peripheriam DCEF. Ergo & ſegmentum portionis reliquum GHCEMBKGH eſt ad reliquum ſphæræ ſegmentum LFECH, vt BC ad peripheriam DCEF. Poſt hæc totam primæ partis demonſtrationem ſi huc tranſtuleris, propoſitum concludetur.

Corollarium I.

Ex his habetur cubatura ſegmentorum portionis, quæ reſecantur planis ſectioni maximæ parallelis.

Corollarium II.

Schematiſmus 2. Fig. 14. Ducatur in portionis baſi recta quæuis HL, per quam ducto plano HGKL abſcindatur à portione DBCE ſolidum HGBKLCH. Etiam hoc cubabitur ex iam demonſtratis. Cu-
a Coroll. præced. bata enim eſt tota portio DBCE. Cubata item [a] ſunt ſegmenta DGHF & IKLE. Ergo reliquum FHGBKLI cubatum etiam eſt: à quo ſi auferas ſolidum rectilineum FGHKIL, quod ſupererit, ſolidum HGBKLCH etiam innoteſcet.

PROPOSITIO XXIII.

Sphæroïs longa (CLXM) ad ſphæram ambientem (CAXB) duplicatam habet rationem minoris axis (LM) ad maiorem (CX.)

Schematiſmus 4. Fig. 25. AXes ſint CX, LM, per quos ſectione factâ exhibeatur Ellipſis LCMX & circulus ABCX. Axe CX maiori in quotcumque æquales partes diuiſo in punctis Z, ductiſq; per ea rectis ERαβ, GPαβ, INαβ, parallelis axi alteri LM, quod producto in A & B, inſcribatur circulo rectangula EF, GH, IK, Ellipſi autem rectangula RS, PQ, NO. Quibus in orbem actis circa axem CX, inſcribetur tã ſphęroidi, quàm ſphęræ ſphæroidem ambienti corpus ex multis Cylindris ſupra inuicem poſitis conflatũ. Iam verò quia AB, Iβ, Gβ, Eβ, ſunt lineis LM, Nα, Pα, Rα, [b] proportionales, etiam quadrata AB, Iβ, Gβ, Eβ, quadratis LM, Nα, Pα, Rα; ac pro-
b Demonſt. Archim. de conoid. inde & circuli diametrorum AB, Iβ, Gβ, Eβ circulis diametrorum LM, Nα, Pα, Rα proportionales ſunt. Sed Cylindri ſphæræ inſcripti ſunt ad Cylindros inſcriptos ſphæroïdi, vt

baſes,

baſes, prædicti nimirum circuli. Ergo Cylindri ſphæræ inſcripti, ſunt Cylindris inſcriptis ſphæroidi proportionales. Quare vt vnus Cylindrus IK ad vnum NM; hoc eſt vt circulus Iβ ad circulum Nα; hoc eſt vt circulus AB ad circulum LM, ita omnes Cylindri IK, GH, EF, ſimul ſumpti, ad omnes Cylindros NO, PQ, RS, ſimul ſumptos. Pari modo oſtendam, quotcumque tandem Cylindros ſphæroidi & ſphæræ inſcripſeris, inſcriptos ſphæræ ſimul ſumptos, ſemper fore ad inſcriptos ſphæroidi ſimul ſumptos, vt circulus AB ad circulum LM. Cùm igitur per huiuſmodi Cylindrorum inſcriptiones tam ſphæra quàm ſphæroides exhauriantur, liquet ipſam [b] quoque ſphæram eſſe ad ſphæroidem vt circulus ATB ad circulum LVM, hoc eſt in duplicata ratione AB, ſiue CX, ad LM. Quod erat demonſtrandum.

Archim. conoid. p. 21
b 1. huius.

Corollarium.

Sphæroïs longa eſt ad ſphæram ſibi inſcriptam, cuius nimirum diameter eſt axis minor LM, vt axis maior CX, ad axem minorem.

Schematiſmus 4. Fig. 25.

Ratio enim ſphæræ ACBX ſphæroïdem ambientis ad ſphæram diametri LM eſt triplicata rationis CX ad LM; & ratio ſphæræ ACBX ad ſphærnïdem, vt iam oſtendimus, eſt duplicata rationis CX ad LM. Ergo ratio ſphæroïdis ad ſphæram, cuius diameter LM, ea eſt quæ CX ad LM.

PROPOSITIO XXIV.

Sphæroïs lata quæ nimirum fit ab Ellipſi ACBX circa minorem axem CX circumductâ, ad inſcriptam ſibi ſphæram LCMX duplicatam habet rationem maioris axis ad minorem.

Schematiſmus 4. Fig. 26.

CONſtructio & Demonſtratio eadem erit quæ præcedentis. Sunt enim rurſus rectæ EZ, GZ, IZ, AD rectis RZ, PZ, NZ, LD proportionales.

Corollarium.

Sphæroïs lata XACB eſt ad ſphæram ſe ambientem AYBθ vt minor axis CX ad maiorem AB.

Schematiſmus 4. Fig. 26.

Sphæra AYBθ habet ad ſphæram LCMX rationem triplicatam rationis AB ad LM, ſiue CX: & ſphæroïs lata XACB habet ad ſphæram LCMX rationem duplicatam rationis AB ad CX, vt in hac propoſitione oſtenſum eſt. Ergo ſphæra ambiens AYBθ eſt ad ſphæroidem latam ACBX, vt AB maior axis ad CX axem minorem.

PROPOSITIO XXV.

Sphæroïs ſiue longa, ſiue lata maximi rhombi conici inſcripti dupla eſt.

EST Archimedis 29. de Conoid. & ſphæroïdibus. Nos aliter & (niſi fallor) clariùs ac breuiùs ſic demonſtramus.

Data primùm ſit ſphæroïs longa, quam genuerit Ellipſis XLNCM circa axem maiorem CX in orbem ducta; cui inſcriptus ſit rhombus conicus maximus LCMX.

Schematiſmus 4. Fig. 25.

Sphæroïdi circumſcribatur ſphæra ACBX, cui maximus etiam inſcribatur rhombus conicus ACBX. Sphæra eſt ad ſphæroïdem in ratione duplicatâ [a] eius quam habet CX maior axis, ſiue AB, ad minorem axem LM. Sed etiam conus ACB eſt ad conum LCM, vt circulus ATB ad circulum LVM; hoc eſt in duplicatâ eius quam AB habet ad LM. Ergo ſphæra eſt ad ſphæroïdem, vt ACB conus ad conum LCM. Igitur permutando, vt ſphera ACBX eſt ad conum ACB, ſic ſphæroïs eſt ad conum LCM. Ac proinde vt ſphæra eſt ad rhombum ACBX, ſic ſphæroïs eſt ad rhombum LCMX. Quare cùm ſphæra [a] rhombi ACBX ſibi inſcripti dupla ſit, etiam ſphæroïs rhombi LCMX ſibi inſcripti dupla erit. Quod erat demonſtrandum.

a 23 huius.
a Archim. ſph. l. 1. prop. 33.

Data

Schematiſmus 4. Fig. 26. Data deinde ſit lata ſphæroïs genita ab Ellipſi AECBX circa minorem axem CX circumducta, cui inſcriptus ſit rhombus conicus ACBX.

Sphæroidi inſcribatur ſphæra LRCMX, & ſphæræ rhombus conicus LCMX. His conſtructis ratiocinaberis, vt in primâ parte. Sed pro 23. *huius* citanda eſt propoſitio 24.

PROPOSITIO XXVI.

Omnis portio Cylindri Elliptici recti per alterutrum baſeos axem & latus abſciſſa, maximæ pyramidis ſibi inſcriptæ dupla eſt.

Schematiſmus 4. Fig. 27. DAta ſit quæuis Cylindri Elliptici portio BECD, cuius altitudo DE: pyramidum autem ipſi inſcriptarum maxima ſit BDEC. Sphæroidi baſeos, quam nimirum producit Ellipſis BDCP, circa axem BC in orbem ducta, inſcriptus ſit rhombus conicus maximus BPCD. Pyramis AECD, cuius baſis eſt rectangulum triangulum CAD, altitudo DE, eſt ad conum PCD, qui ex eiuſdem trianguli ADC circa AC in orbem acti reuolutione producitur, *b 19. huius* ᵇ vt DE ad circumferentiam DRPQ. Tota igitur pyramis PDCE eſt ad totum rhombum, vt DE ad circumferentiam DRPQ. Atqui etiam Cylindri Elliptici portio BEDC eſt ad ſphæroïdem baſeos, quam producit Ellipſis BPCD circa axem CB in orbem ducta, vt *c 15. huius.* DE ᶜ ad circumferentiam DRPQ radio AD deſcriptam. Portio igitur eſt ad ſphæroidem, vt pyramis ad rhombum: & permutando, portio eſt ad pyramidem vt ſphæroïs ad rhombum. *a præced.* Sed ᵃ ſphæroïs rhombi dupla eſt. Ergo etiam portio pyramidis dupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Ex hoc theoremate habetur cubatio portionis à Cylindro Elliptico abſciſſę. Qui reliquam cubabit Elliptici Cylindri partem, dabit quadraturam.

PROPOSITIO XXVII.

Schematiſmus 4. Fig. 28. Cylindri recti Elliptici portio per axem CB & E punctum in latere abſciſſa, CEDB, & baſeos ſphæroïs ſectæ ſint plano ad ſectionem portionis maximam AED parallelo, quod in portione producat triangulum FHG; in ſphæroïde circulum QGNK ſegmentum portionis vnius CLHGF, cuius baſis eſt pars Ellipſeos FCOG, ita ſe habet ad pyramidem ſibi inſcriptam GHCF (cuius baſis eſt triangulum CGF, altitudo GH eadem quæ ſegmenti CLHGF) vt FB cum radio AB ad FB.

Segmentum verò maius FGHEDMB, cuius baſis eſt Ellipſeos pars FGDB, ſe habet ad inſcriptam ſibi pyramidem BGHF; vt FC cum AC ad FC.

REctangulum triangulum CFG cum Elliptico ſegmento COGF circumagi intelligatur circa CF. Segmentum Ellipticum COGF deſcribet ſegmentum ſphæroïdicum, cuius baſis GNKQ recta eſt axi CB; triangulum verò CFG conum rectum gignet GCK. Pyramis *b 19. huius* CFGH eſt ad conum GCK, vt ᵇ pyramidis altitudo HG eſt ad peripheriam GNKQ, cuius *c 7. huius.* radius eſt FG; hoc eſt vt portionis ᶜ altitudo ED ad circumferentiam radij AD; hoc eſt vt ᵃ portionis ſegmentum CLHFGOG ad ſegmentum ſphęroïdicum GNKCOG. Igitur per- *a Coroll. 2. p. 15 huius.* mutando, pyramis CFGH eſt ad ſegmentum CLHFGOC, cui inſcribitur, vt conus GCK *b Archim. conoid p 31* eſt ad ſegmentum ſphæroïdicum GNKCOG. Atqui hoc ᵇ eſt ad conum vt FB cum AB ad FB. Ergo ſegmentum CLHFGOC eſt ad pyramidem, vt FB cum AB ad FB. Quod erat primum.

c 15. huius. Tota deinde portio CEDB eſt ad totam ſphæroïdem baſeos, ᶜ vt ED ad peripheriam diametri PD: Portionis quoque ſegmentum CLHGF eſt ad ſegmentum ſphæroïdicum GOCK, vt

CK vt ED ad [d] peripheriam diametri PD. Ergo & ſegmentum reliquum FGHEMB eſt ad reliquum ſegmentum ſphæroïdicum GDBPK, vt ED ad peripheriam diametri PD. Tota deinde primæ partis demonſtratio huc transferatur: ſed pro Archimedis 31. iam aſſumetur 33.

d Coroll. 2. p. 15. huius.

Corollarium.

Ex his habetur cubatura ſegmentotum portionis Ellipticæ reſectorum planis ſectioni maximæ parallelis.

PROPOSITIO XXVIII.

Data ſit Ellipſis BCDZ, in qua binæ dentur diametrorum coniugationes BD, CZ, & HI, βP. Tum AB, AH in æquè multas æquales partes ſectis, per ſectionum puncta ordinatim applicentur EL, FM, GS, KX.

Schematiſmus 4. Fig. 29.

Dico: LE eſt ad GS, vt perpendicularis inter GS, AP interiecta, eſt ad perpendicularem inter EL, AC; & FM eſt ad KX, vt perpendicularis inter GS, KX, eſt ad perpendicularem inter EL, FM.

PRoducatur LE in R, SG in Y. Quoniam ex hyp. diametri AB, AH, proportionaliter ſectæ ſunt in E, & G, ab ordinatim RL, YS applicatis, erunt [a] ſegmenta Elliptica RBL, & YHS æqualia. Quare, cùm ſegmenta EBL, GHS ſint [b] priorum ſemiſſes, æqualia erunt. Deinde ducantur ordinatim LOX, MT, SQD, XV. Quoniam ex hypotheſi DB, IH, proportionaliter ſunt in E, & G, item in A diuiſæ, patet [c] rectangulum DAB, eſſe ad rectangulum DEB, vt rectangulum IAH ad rectangulum IGH. Sed vt DAB ad DEB, ſic [d] quadratum AC ad quadratum EL, hoc eſt ad quadratum AO; & vt IAH, ad IGH, ſic [d] quadratum AP ad quadratum GS, hoc eſt AQ. Ergo quadratum AC ad quadratum AO, vt quadratum AP ad quadratum AQ. Ergo etiam diametri AC & AP in O & Q, ab ordinatim applicatis LX, SD, proportionaliter ſecantur. Ergo ſegmenta [e] Elliptica LCX, SPD æquantur. Ergo etiam [f] eorum ſemiſſes LCO, SPQ, æquales ſunt. Sunt autem etiam ſegmenta [g] tota ABC, AHP æqualia, cùm ſingula ſint quarta pars Ellipſeos. Ergo reliqua AOLB, AQSH æqualia ſunt. Quare cùm etiam ſupra oſtenſum ſit ſegmenta EBL, GHS æquari; reliqua parallelogramma EO, GQ æqualia erunt. Igitur vt EL, ad GS, ita reciproce altitudo parallelogrammi GQ ad altitudinem parallelogrammi EO, hoc eſt diſtantia ipſarum GS, AP, ad diſtantiam ipſarum EL, AC. Quod erat primum.

a Greg. à S. Vincentio l. 4. p. 53.
b Idem l. 4. p. 45.
c Ex. 23. ſexti elem.
d Apollon. l. 1. conic p. 21.
e Greg. à S. Vinc. l. 4. p. 53.
f Idem l. 4. 45.
g Idem l. 4. p. 46.

Vlterius quia DB, IH, proportionaliter ſecantur in A, F, & in A, K; erit DAB ad DFB, vt [h] IAH ad IKH. Sed vt DAB ad DFB, ſic quadrat. AC ad quadrat. FM, hoc eſt AT; & vt IAH, ad IKH, ſic quad. AP, ad quad. KX. hoc eſt AV. Ergo quad. AC eſt ad quadrat. AT, vt quad. AP, ad quadrat. AV. Ergo AT ad AC vt AV ad AP. Sed (vt oſtendi ſupra) AC, eſt ad AO, vt AP ad AQ. Ergo ex æquo AT eſt ad AO, vt AV ad AQ. Ergo parallelogrammum OE, eſt ad parallelogr. TE, vt parallelogr. QG, eſt ad VG parallelogrammum.

h Ex. 23. elem. 6.

Quare cùm OE, QG iam oſtenderim æqualia eſſe, etiam TE, VG, æqualia erunt. Ergo quoniam per hypotheſim AE, ipſi EF, & AG ipſi GK æquales ſunt; TE ipſi EM, & VG ipſi GX ſunt æqualia. Ergo rurſum vt FM eſt ad KX, ita reciprocè altitudo ipſius GX eſt ad altitudinem ipſius EM; hoc eſt diſtantia ipſarum GS, KX, ad diſtantiam ipſarum EL, FM. Quod erat alterum.

PROPOSITIO XXIX.

Portiones æquè altæ, quæ ab eodem Elliptico Cylindro recto per latera, & quaſcumque baſeos diametros abſcinduntur, omnes inter ſe æquales ſunt.

DEtur portio ABCX (facilitatis causâ exhibentur portionum ſemiſſes) ab Elliptico Cylindro reſecta per C punctum aliquod in latere BC, & baſeos Ellipticæ diametrum Xζ.

Schematiſmus 4. Fig. 30.

Item

Digitized by Google

PROPOSITIO XXXI.

Cylindrus duplus eſt conoïdis parabolicæ, habentis eandem baſim & altitudinem.

ESto Cylindrus AφB, & conoïs parabolica EφBC huic inſcripta axis communis CD, *Schematiſmus* 5.
per quem ducto plano ſectiones erunt in Cylindro quidem parallelogrammum AB, in *Fig.* 32.
conoide verò parabola ECB. Ducantur rectæ EC, BC; & axe DC in aliquot æquales partes
ſecto, per ſectionum puncta Z, Y, X, ductis lineis ad EB, baſeos diametrum parallelis, tam
parabolæ quàm triangulo ECB, parallelogramma æquè alta inſcribantur, vt figura monſtrat.
Quod ſi parallelogramma parabolæ inſcripra circa axem CD circumagantur, inſcribentur
conoïdi parabolico Cylindri ſupra inuicem poſiti, & æquè alti, quos deinceps litteris
IR, KQ, LP, deſignabimns.

His ita conſtructis, Cylindrus IR, eſt ad Cylindrum LP, vt circulus diametri Iδ ad circulũ
diametri Lθ (ſunt enim æquè alti Cylindri per conſtructionem;) hoc eſt vt quadratum Iδ ad a 20 *primi*
quad. Lθ; hoc eſt vt [a] CX ad CZ; hoc eſt vt Mλ ad OQ, hoc eſt vt parallelogrammum MV *Conic.*
ad parallelogr. OS, ſunt enim æquè alra. A primo igitur ad vltimum Cylindrus IR eſt ad Cy-
lindrum LP, vt parallelogrammum MV ad parallelogr. OS. Eodem diſcurſu oſtendam Cy-
lindrum KQ, eſſe ad Cylindrum LP, vt parallelogrammum NT ad parallelogrammum
OS. Ergo [b] Cylindri IR & KQ ſimul ſumpti ſunt ad Cylindrum LP, vt parallelogramma b 24. 5.
MV, NT ſimul ſumpta, ad parallelogrammum OS. Igitur componendo, Cylindri IR, KQ,
LP, ſunt ad LP, Cylindrum, vt parallelogramma MV, NT, OS, ſunt ad parallelogram-
mum OS. Sed Cylindrus LP, eſt ad Cylindrum HB, vt parallelogrammum OS ad paral-
lelogrammum HB, (eſt enim Cylindrus LP, ad Cylindrum HB, vt circulus radij LZ
ad circulum radij HZ; hoc eſt in ratione duplicata LZ, ad HZ; hoc eſt, quia OZ, LZ,
HZ, [c] proportionales ſunt, vt OZ ad HZ; hoc eſt vt parallelogrammum OS ad parallelo-
grammum HB,) Cylindrus verò HB eſt ad Cylindrum AB, vt parallelogrammum HB, ad c *Greg. à*
parallelogrammum AB. Igitur ex æquo Cylindri IR, KQ, LP, ſunt ad Cylindrum AB, vt *S. Vincentio*
parallelogramma MV, NT, OS, ſunt ad parallelogrammum AB: & inuertendo, Cylindrus *prop* 42. *de*
AB eſt ad Cylindros IR, KQ, LP, conoidi inſcripros, vt parallelogrammum AB eſt ad dicta *parabola,*
parallelogramma ECB, triangulo inſcripta. Atque hoc ſemper continget, quotcumque *aliiſque.*
Cylindros conoïdi, & parallelogramma triangulo inſcripſerimus. Cùm ergo Cylindri, ſi
plures ſemper ac plures conoïdi inſcribantur, tandem deſinant in ipſum conoïdes; parallelo-
gramma verò in triangulum ECB; erit quoque Cylindrus AB ad conoïdem, vt parallelo-
grammum AB ad triangulum ECB.

Cui hoc non ſufficit, reducat ad impoſſibile hunc in modum. Si negas Cylindrum AB,
eſſe duplum conoïdis EφCB, ſiue ita ſe habere Cylindrum ad Conoidem vt parallelo-
grammum AB ad triangulum ECB, erit vel in maiori ratione, vel in minori. Sit pri-
mum in maiori. Erit igitur vt Cylindrus AB ad conoïdem, ſic parallelogrammum
AB ad planum quodpiam F minus triangulo EBC. Inſcribantur triangulo ECB tot
parallelogramma, vt eorum ſumma minus deficiat à triangulo ECB, quàm planum
F, ac proinde vt maior ſit quàm F. Totidem quoque Cylindri æquè alri inſcribantur co-
noïdi. Erir igitur (vt ſupra oſtendimus) Cylindrus AB ad Cylindros inſcriptos conoï-
di, vt parallelogrammum AB, ad parallelogramma inſeripta triangulo. Sed parallelogramma
inſcripta triangulo per conſtructionem maiora [a] ſunt plano F. Ergo Cylindrus AB ad Cy- a *per conſt.*
lindros conoïdi inſcriptos eſt in minori ratione quàm parallelogrammum AB ad planum F.
Sed ponebatur Cylindrum AB, ad conoïdem eſſe, vt parallelogrammum AB ad planum F,
ergo Cylindrus AB eſt ad Cylindros conoïdi inſcriptos in minori ratione; quàm ad ipſam
conoïdem: quod eſt abſurdum. Pari diſcurſu oſtendam Cylindrum AB ad conoidem non
eſſe in minori ratione quàm parallelogrammum AB ſit ad triangulum ECB, liquet igitur
Cylindrum AB, eſſe ad conoidem vt parallelogrammum AB, ad triangulum ECB. Quod
erat demonſtrandum.

Corollarium.

Hinc efficitur (quod Archimedes demonſtrat *prop.* 23. *de conoïd.*) conoïdem parabolicam inſcripti ſibi coni ſeſquialteram eſſe. Cùm enim conois ſit ad Cylindrum AB, vt 3. ad 6. Cy-

lindrus autem ad conum ECB, vt 6. ad 2. Erit ex æquo conoïs ad conum ECB, vt 3. ad 2.

PROPOSITIO XXXII.

Omnis portio Cylindri parabolici per axem baſeos, & punctum in latere abſciſſæ pyramidis ſibi inſcriptæ, ſeſquialtera eſt.

Schematiſmus 5. *Fig.* 33. ESto Cylindri parabolici portio DHFBCK per axem baſeos DC, & lateris BF punctum F abſciſſa, cui inſcripta ſit pyramis maxima DCBF. Demonſtrandum eſt portionem pyramidis ſeſquialteram eſſe.

a 19 *huius.* b 17. *huius.* Pyramis [a] DCBF eſt ad conum ADB maximum baſi inſcriptum, vt altitudo pyramidis FB, ad circumferentiam circuli diametro AB deſcripti. Sed etiam portio DHFBCK eſt ad [b] conoïdem parabolicam genitam ex baſi BDA, circa axem DC reuolutâ, vt FB ad circumferentiam circuli diametro BA deſcripti. Ergo portio eſt ad conoidem vt pyramis ad conum. c *Coroſ. præced.* Igitur permutando portio eſt ad pyramidem vt conoïs ad conum. Sed [c] conoïs coni ſeſquialtera eſt. Ergo & portio ſeſquialtera eſt pyramidis. Quod erat Demonſtrandum.

Corollarium.

Ex hoc theoremate habetur cubatio portionis à Cylindro parabolico abſciſſæ.

PROPOSITIO XXXIII.

Schematiſmus 5. *Fig.* 34. Eſto Cylindri hyperbolici portio GNLDAM per AG axem baſeos, & punctum F in latere abſciſſa. Sit autem baſeos (quæ hyperbole eſt) latus tranſuerſum GF, cui adiuncta ſit ipſius ſemiſſis FH.

Portio GNLDAM eſt ad pyramidem maximam GADL ſibi inſcriptam, vt HA eſt ad FA.

DEmonſtratum eſt ab Archimede *propoſ.* 27. de Conoïd. & ſphæroid. conoïdem hyperbolicam CPGMD eſſe ad conum maximum ſibi inſcriptum CGD, vt HA, ad FA. Sed portio GNLDAM eſt ad pyramidem GADL ſibi inſcriptam, vt conoïs hyperbolica CPGMD ad conum CGD (eſt enim, vt in præcedentibus demonſtrauimus tam [a] portio ad conoidem, quàm [b] pyramis ad conum, vt LD, altitudo ad circumferentiam diametri CD; ac proinde permutando, portio ad pyramidem, vt conoïs ad conum.) Ergo etiam portio hyperbolica GNLDAM, eſt ad pyramidem GADL inſcriptam, vt HA ad FA, quod erat Demonſtrandum.

a 17. *huius.* b 19 *huius.*

Corollarium.

Ex theoremate iam demonſtrato habetur cubatura portionis à Cylindro hyperbolico per latus & axem baſeos abſciſſæ.

PROPOSITIO XXXIV.

Schematiſmus 5. *Fig.* 35. Pyramides (DFGE, DBCE) Cylindri cuiuſcumque portioni inſcriptæ duplicatam habent inter ſe proportionem altitudinum FG, BC.

DVcantur CA, GN perpendiculares ad diametrum DE, & iungantur puncta AB. Ex puncto F duc FH parallelam ad DE, & ex H demittatur HK parallela ad BC. Oſtenſum a *Corol* 1. *p.* 7. *huius.* alibi eſt [a] FG, HK æquales eſſe. Sunt autem & parallelæ inter ſe, cum ambæ æquidiſtent BC.

Ergo

Ergo ſi ducatur GK, erunt GK, FH, quia æquales & parallelas iungunt, etiam ipſæ parallelæ. Cùm igitur FH æquidiſtet NA, etiam GK eidem NA parallela eſt. Quare cùm etiam GN, KA ſunt parallelæ, erit AKGN parallelogrammum, ac proinde NG, AK æquantur.

His oſtenſis, proportio pyramidis DBCE ad pyramidem DFGE compoſita eſt ex proportionibus baſeos DCE, ad baſim DGE, & altitudinis BC ad altitudinem FG. Sed proportio baſeos DCE ad baſim DGE eadem eſt quæ [b] AC ad NG, hoc eſt (vt iam oſtendi) AC ad AK; hoc eſt (quia HK eſt parallela ad BC) BC ad HK; hoc eſt [c] BC ad FG altitudinis ad altitudinem. Ergo proportio pyramidis DBCE ad pyramidem DFGE eſt dupiicata eius quam habet altitudo BC ad altitudinem FG. Quod fuit demonſtrandum. *b 1.6. Eſem* *c Corol 1. p 7 huius.*

P A R S III.

PROPOSITIO XXXV.

Sphæroïs lata ad ſphæroïdem longam ab eadem Ellipſi genitam eam habet rationem quam maior axis ad minorem.

Genitrix ellipſis ſit ACBX, axis maior AB, minor CX. Ellipſi circumſcribe circulum AYBθ, qui circumactus ſphæram producat. Ratio ſphæræ ambientis AYBθ ad ſphæroïdem longam eſt duplicata [d] rationis AB axis maioris ad CX axem minorem: item ratio ſphæræ AYBθ ad ſphæroidem latam eadem eſt [a] quæ AB ad CX. Ergo ſphæra ſphæroïs lata, & ſphærois longa proportionales ſunt. Ergo ſphærois lata eſt ad longam vt CB, ad CX. Quod erat demonſtrandum. *Schematiſmus 4. Fig. 26.* *d 23. huius* *a Coroll. p. 24. huius*

PROPOSITIO XXXVI.

Ellipſi ACBX circulum inſcribe LCMX, & alium conſcribe AYBθ. Circuli producant ſphæras; ellipſis verò ſphæroïdem latam & longam. *Schematiſmus. 4. Fig. 26.*

Sphæra LCMX; ſphæroïs longa, ſphæroïs lata ſphæra AYBθ ſunt continuè proportionales in ratione axium CX, AB.

Quòd ſi circulo AYBθ rurſùm conſcribatur ellipſis, cuius minor axis ſit AB, maior verò ad AB, vt AB eſt ad CX; huic autem ellipſi conſcribatur circulus, & ſic deinceps ſphærarum, ac ſphæroïdum in ratione axium CX, AB, continuè proportionalium ſeries ſine termino continuabitur.

Sphæra LCMX eſt ad ſphæroïdem longam XACB, vt [b] CX ad AB, & ſphæroïs longa [c] XACB eſt ad ſphæroïdem latam ACBX vt CX ad AB: ſimiliter ſphærois lata ACBX eſt ad ſphæram [d] AYBθ, vt CXAB, atque eà deinceps ſerie in infinitum. *b Corol. p. 23. huius* *c Præced.* *d Coroll. p. 24. huius*

PROPOSITIO XXXVII.

Circulo BCDG inſcripta ſit Ellipſis ſuperque his erecti intelligantur Cylindri recti, circularis, & Ellipticus, in altitudine eâdem communi CN. A Cylindro circulari abſcindatur portio BCND, ab Elliptico autem reſecetur per alterutrum axem portio FCNE, ſiue portio CKEG. *Schematiſmus 5. Fig. 36.*

Portio Cylindri circularis BCND, ad portionem Cylindri Elliptici

Digitized by Google

PROPOSITIO XL.

Omnis portio Cylindri circularis recti, per latus & centrum baſeos abſciſſa, ad Cylindrum ſuum eam habet rationem, quam duæ tertiæ diametri partes ad circuli circumferentiam. *Schematiſmus 5. Fig. 37.*

DAta primùm ſit portio CAFD altitudinem habens AF, parem baſeos diametro AB, ſiue CD; cuius duæ tertiæ ſint DP: Cylindro igitur AG, à quo ſumpta eſt portio CAFD, poterit inſcribi ſphæra LEMN, quæ æqualis erit ſphæræ à baſi ADBC productæ. Iam verò portio CAFD eſt ad ſphæram baſeos ADBC, hoc eſt ad ſphæram LEMN, vt [a] altitudo FA, hoc eſt vt diameter baſeos CD ad circumferentiam ADBC: ſphæra autem LEM- *a 13. huius*
N eſt ad Cylindrum AG, cui includitur, vt 2 [b] ad 3; hoc eſt vt DP, duæ tertiæ diametri CD
ad diametrum CD. Ergo ex æqualitate perturbata portio CAFD eſt ad Cylindrum AG, vt *b Archim. l.1. ſph manifeſt. 9.*
DP duæ tertiæ diametri CD ad circumferentiam ADBC. Quod erat demonſtrandum.
Porro dictæ æqualitatis perturbatæ ſchema eſt huiuſmodi.

Portio CADF	$\frac{2}{3}$ diametri CD
ſphæ. ADBC. /. LEMN	FA. /. CD
Cylind. AG	circumf. ADBC

Detur deinde portio CAED, cuiuſcumque altitudinis ſumpta è Cylindro AH. oſtendam nihilominus portionem eſſe ad Cylindrum vt $\frac{2}{3}$ diametri CD ad circumferentiam ADBC. Portiones CAED, & CAFD ſunt inter ſe vt [c] altitudines AE, AF. Quare cùm etiam Cy-
lindri AH, AG ſint inter ſe vt altitudines AE, AF, erit portio CAED ad portionem CA- *c 18. huius*
FD vt Cylindrus AH ad Cylindrum AG: ergo permutando, portio CAED eſt ad Cylindrum AH, vt portio CAFD ad Cylindrum AG. Sed iam oſtenſum eſt portionem CAFD eſſe ad Cylindrum AG vt ſunt $\frac{2}{3}$ diametri ad circumferentiam. Ergo etiam portio CAED eſt ad Cylindrum AH vt $\frac{2}{3}$ diametri ad circumferentiam. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Datâ igitur in rectis lineis ratione portionis ad Cylindrum, datur quadratura.

PROPOSITIO XLI.

Portio Cylindri recti Elliptici, per latus, & quamuis baſeos diametrum abſciſſa, ad Cylindrum ipſum eam habet rationem, quam duæ tertiæ diametri partes ad circuli circumferentiam.

DAtus ſit Cylindrus Ellipticus AH cuiuſuis altitudinis AF, perque alterutrum baſeos ADBC axem, exempli grat. per minorem CD, abſcindatur portio CAFD. Tum ellipſi ADBC inſcribe circulum MDPC; ſuperque eo Cylindrus ſtatuatur NK, eiuſdem cum Cylindro AH altitudinis; & per CD abſcindatur portio CNGD. *Schematiſmus 6. Fig. 38.*

Ratio Cylindri Elliptici AH ad portionem CAFD compoſita eſt ex ratione Cylindri AH ad Cylindrum NK, & ex ratione Cylindri NK ad portionem CNGD, & ex ratione portionis CNGD ad portionem CAFD. Sed ratio Cylindri AH ad Cylindrum NK eadem eſt quæ ratio baſeos Ellipticæ ADBC ad baſim circularem CNDP; hoc eſt eadem [a] cum
ratione maioris axis AB ad minorem DC: & ratio Cylindri NK ad portionem CNGD, eſt *a Archim. prop. 5. conoid.*
ratio [a] circumferentiæ ad duas tertias diametri. Item ratio portionis CNGD ad portionem
CAFD eſt ratio [b] minoris axis DC ad maiorem AB. Ergo ratio Cylindri AH ad portionem *a Praced.*
ſuam CAFD compoſita eſt ex ratione AB ad CD, & ex ratione circumferentiæ ad duas *b 38 huius*
tertias diametri, & ex ratione CD ad AB. Quare cùm rationes AB ad DC, & DC ad AB ſe *c 29. huius*
mutuo tollant, erit Cylindrus Ellipticus AH ad portionem CAFD, per minorem axem CD abſciſſam, ac proinde etiam ad reliquas portiones per quamuis diametrum reſectas (æquantur enim inter [c] ſe omnes) vt circumferentia circuli ad duas tertias diametri partes. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLII.

Omnis portio Cylindri Parabolici per latus & axem baſeos abſciſſa ad ipſum ſuum Cylindrum eam habet rationem, quã 3. ad 16.

Schematiſmus 5. Fig. 33. *d 32 huius*

ESto portio DHFBCK à Cylindro Parabolico BADEFG per baſeos axem CD, & punctum F, in latere BF, abſciſſa. Oportet oſtendere eam eſſe ad Cylindrum vt 3. ad 16. Demonſtratum eſt ſupra [d] portionem eſſe ad pyramidem maximam inſcriptam DCBF, vt 3. ad 2: Pyramis autem DCBF eſt ad pyramidem cuius baſis triangulum BDA, altitudo eadem BF, vt 2. ad 4: atque hæc ipſa pyramis eſt ad priſma ſuper baſi eâdem BDA, & eâdem altitudine BF, vt 4. ad 12: Priſma verò eſt ad Cylindrum Parabolicum vt baſis ad baſim, vt triangulum nempe BDA ad Parabolam BFDA, hoc eſt vt 12. ad 16. in ratione nimirum ſubſeſquitertiâ. Igitur ex æquo portio DHFBCK eſt ad Cylindrum Parabolicum vt 3. ad 16. Quod erat demonſtrandum.

Series proportionalium quantitatum in ſuperiore argumentatione ex æquo institutæ, hæ ſunt,

Portio DHFBCK	3
Pyramis DCBF	2
Pyramis BDAF	4
Priſma ſuper BDA	12
Cylindrus parabol.	16

PARS QVARTA.

PROPOSITIO XLIII.

Schematiſmus 6. Fig. 39.

Planus annulus eſto BCHK; cuius latitudo BC; centrum A: & circulus quiuis EGF, cuius radius EF.

Annulus eſt ad circulum vt DBC, rectangulum ad quadratum radij EF.

a 4. Elem. 2. *b 3. & 1. Elem. 2.*

CIrculus BHA eſt ad circulum CKA, vt quadratum BA ad quadratum CA. Igitur diuidendo, annulus planus BCHK eſt ad circulum CKA, vt rectangulum [a] BCA bis cum quadrato BC ad quadratum CA. Sed rectangulum BCA bis cum quadrato BC, eſt rectangulum [b] DBC. Ergo annulus planus BCKH eſt ad circulum CKA vt rectangulum DBC ad quadratum CA. Quare cùm circulus CKA ſit ad circulum EGF, vt quadratum CA ad quadratum FE; erit ex æquo annulus BCKH ad circulum EFG vt rectangulum DBC ad quadratum EF. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIV.

Schematiſmus 6. Fig. 40.

Eſto ſphæræ circulus maximus HPGK, & in eo recta quæuis non per A centrum ducta BC, cui parallela ſit diameter GH.

Solidum ſphæricum quod fit à ſegmento circulari BKC, circa diametrum GH in orbem ducto, æquale eſt ſphæræ, cuius diameter BC.

DEſcribatur circulus CNBR maximus ſphæræ diametri BC: per vtriuſque circuli centra A, S, ducatur recta QR: hæc ſecabit vtramque diametrum GH, BC ad rectos angulos. Tum radius SB in aliquot æquales partes diuidatur, & per diuiſionum puncta E, ductis EKF, ad QSR parallelis (quæ proinde erunt perpendiculares ad BS) inſcribantur rectangula tam ſegmento BKTS, quàm quadranti BFRS. Iam ſegmentum BKTS cum ſuis rectangulis in orbem ducito circa diametrum GH. Hac reuolutione ſolido ſphærico, quod

fit

fit à ſegmento BKTS, inſcribentur Cylindri caui à rectangulis EX producti, quorum baſes erunt plani annuli EKPO, altitudines KX, ſiue EE, Quod ſi quadrans BFRS cum inſcriptis ſibi rectangulis in orbem ducatur, circa diametrum BC; hemiſphærio inſcribentur à rectangulis EZ, Cylindri quorum baſes erunt circuli diametrorum NF, altitudines verò FZ, ſiue EE.

Quoniam verò tam rectangula PEK, quàm rectangula NEF æquantur [a] rectangulis BEC, erunt rectangula PEK, id eſt OKE, æqualia rectangulis NEF; hoc eſt quadratis EF. Ergo plani annuli EKPO, (qui cauorum Cylindrorũ baſes ſunt) erunt æquales [b] circulis diametrorũ NF, qui baſes ſunt Cylindrorum integrorum. Quoniam igitur cauorum Cylindrorum, qui inſcripti ſunt ſolido ſphærico, genito à ſegmento BKTS, & Cylindrorũ integrorum, qui hemiſphærio quadrãtis BFRS inſcribuntur, tum baſes tũ altitudines æquales ſunt; omnes quoq; caui Cylindri [c] omnibus Cylindris integris æquales erunt. Atq; hoc ſemper eueniet, etiãſi inſcriptiones illæ in infinitum continuentur. Cùm igitur & inſcriptionibus illis, tam [d] ſphæricum ſolidum, productum à plano circulari BKTS, circa GH circumacto, quàm hemiſphærium [e] à quadrante BFRS genitum, exhauriantur: erit ſolidum ſphæricum à ſegmento BKTS productum, æquale hemiſphærio; ac proinde totum ſphæricum ſolidum quod fit à plano BKC, circa GH reuoluto, toti ſphæræ diametri BC æquale erit. Quod erat demonſtrandum.

a 35. Elem. 3.
b Præced.
c 5. huius
d Colligitur ex diſcurſu Archimed. 21. Conoid.
e Arch. 21. Conoid.

Per heterogenea.

Solidum ſphæricum, quod fit à ſegmento circulari BTC, circa GH diametrum circumacto, & ſphæra à ſemicirculo BRC producta ſecentur plano ad GH, & BC recto. In ſolido ſphærico ſectio erit annulus planus, cuius latitudo EK, ſiue OP; in ſphærâ autem ſectio circulus eſt, cuius diameter NF. Oſtenſum verò iam eſt in demonſtratione primâ annulum circulo æquari; idque euenire ſemper, quotcumque ſectiones eiuſmodi fiant. Ergo ex heterogeneorum regulâ ſolidum ſphæricum ſphæræ eſt æquale. Quod erat propoſitum.

Schematiſmus 6. Fig. 40.

Corollarium.

Igitur ſphæricum ſolidum quod fit à circulari ſegmento GBCH, circa GH Diametrum circumacto, æquale eſt differentiæ ſphærarum, quarum diametri ſunt GH, BC.

Quod ſi duæ fuerint diametro GH parallelæ MY, BC, aut plures, erit ſphæricum ſolidum genitum à circulari plano MBCY circa GH reuoluto, æquale differentiæ ſphærarum, quarum diametri MY, BC.

PROPOSITIO XLV.

Data ſit Cylindri circularis recti Elliptica portio DBCE, per centrum baſeos & punctum in latere abſciſſa, quæ planis ſecetur HGKL, NRTP, βϖωθ, ad baſim rectis, & tranſeuntibus per lineas HL, NP, βθ diametro DE parallelas.

Schematiſmus 6. Fig. 41.

Si altitudo portionis BC, par fuerit circumferentiæ DCEY, erunt portio DBCE. Segmenta portionis HGBKLCH, GBKLCH, NRBTPCN, βϖBωθCβ, æqualia ſphæris, quarum diametri ſunt parallelæ DE, HL, NP, βθ.

Et vniuerſim iam dictæ portiones ad ſphæras dictas eam habent proportionem, quam portionis altitudo BC, ad circumferentiam DCEY.

SEgmentum HGBKLCH eſt ad ſphæricum ſolidum quod fit à circulari plano HCL circa diametrum DE in orbem ducto, [a] vt BC ad circumferentiam DCEY. Atqui ſolidum ſphæricum, quod fit à plano HCL circa DE circumacto, æquatur [b] ſphæræ, cuius diameter HL. Ergo portionis ſegmentum HGBKLCH eſt ad ſphæram diametri HL, vt BC ad circumferentiam DCEY. Quod erat propoſitum.

a Coroll. 1. p. 14. huius
b Præced.

De portione ipſa demonſtratum eſt *prop. 13. huius.*

Corollarium I.

Schematiſmus 6. Fig. 41.

Portio igitur & portionis ſegmenta dicta, proportionalia ſunt ſphæris diametrorum DE, HL, NP &c.

Corollarium II.

Portio, & portionis ſegmenta prædicta inter ſe rationem habent triplicatam parallelarum DE, HL, NP &c. ſunt enim portio, & ſegmenta ſphæris proportionalia.

Corollarium III.

Segmenta portionis DGHKLE, & reliqua quæ inter ipſa parallela plana continentur, eam rationem habent ad differentias ſphærarum, quarum diametri DE, HL, NP. &c. quam BC portionis altitudo ad peripheriam DCEY, ac proinde hæc illis proportionales ſunt.

Demonſtratur ex præſenti theoremate & 19. *quinti elem.*

PROPOSITIO XLVI.

Schematiſmus 6. Fig. 42. 43.

Data ſit Cylindri circularis recti portio DBCE, per A centrum baſeos, & punctum in latere abſciſſa, cuius altitudo CB; ſectio maxima ABC. In baſi ducatur HL parallela diametro DE, ſecans AC in P, ex P ducta ſit PS parallela ad AB occurrens BC in S, per HSL ducto plano abſcindatur portio HSCL.

Erit portio DBCE ad portionem HSCL, vt ſphæra genita à baſi DCE, ad rotundum ſolidum quod fit à circulari ſegmento circa HL reuoluto.

a Pater & Pappus l. 5. p 41. *b 13. huius* *c 16. huius*

QVoniam per constructionem PS eſt parallela ad AB, erit BC ad AC, vt SC eſt ad PC. Sed AC eſt ad circumferentiam radij AC, vt [a] PC ad circumferentiam radij PC. Igitur ex æqual. BC eſt ad circumferentiam radij PC vt SC ad circumferentiam radij PC. Atqui demonſtratum ſupra in præcedentibus eſt portionem DBCE eſſe ad ſphæram genitam à baſi DCE, vt [b] BC altitudo eſt ad circumferentiam radij AC. Item demonſtratum [c] eſt portionem HSCL eſſe ad rotundum ſolidum genitum à baſi HCL circa HL reuolutâ, vt altitudo SC ad circumferentiam radij PC. Ergo portio DBCE eſt ad ſphæram ſuæ baſeos vt portio HSCL eſt ad rotundum ſolidum baſeos ſuæ. Ergo permutando, portio DBCE eſt ad portionem HSCL, vt ſphæra baſeos DCE ad rotundum ſolidum factum ex HCL. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Propoſitio vera eſt in omni portione, ſiue ea ex Cylindro Elliptico, Parabolico, Hyperbolico, ſiue alio quocumque ſit deſumpta, ſed in demonſtratione loco propoſitionis 13. citandæ erunt 15. 16. 17. *huius.* Reliqua demonſtratio omnis conueniet.

PROPOSITIO XLVII.

Schematiſmus 6. Fig. 42. 43.

Eſto Cylindri circularis recti portio DBCE, per B punctum in latere, & per A centrum baſeos abſciſſa, quam ſeca plano GFT parallelo ad baſim DCE.

Portio DBCE eſt ad ſegmentum GBFT, vt ſphæra quæ fit à baſi DCE ad ſolidum, quod fit à circulari ſegmento GFT circa GT in orbem ducto.

SEctio portionis maxima ſit ABC; huius & planiGFT, communis ſectio ſit recta KF. Per GT ducatur planum GHLT rectum baſi DCE; producés in ſuperficie Cylindricâ rectas GH, TL; in baſi rectam HL, & in ſectione maximâ ABC rectam KP. Quoniam KP eſt commu-

communis ſectio planorum ABC, HGTL, quæ ambo recta ſunt baſi DCE, erit KP [a] perpendicularis baſi DCE. Quare cùm BC ſit ad eamdem baſim recta (eſt enim recta linea in Cylindri recti ſuperficie exiſtens) erunt KP, BC [b] parallelæ. Iam verò quia eidem KP parallelæ ad BC æquantur [c] GH, LT, erunt æquales inter ſe. Sunt autem & parallelæ, quia in Cylindri ſuperficie exiſtunt. Ergo GT, HL iungunt æquales, ac parallelas GH, TL, ac proinde etiam ipſæ æquales ſunt. Quoniam igitur æqualium circulorum ſegmenta ſunt HCL, GFT, & ſubtenſæ HL, GT æquales; erunt ſegmenta HCL, GFT æqualia & ſimilia.

a 19. *Elem.* 11.
b 6 *Elem.* 11.
c *Corol.* 1. *p.* 7. *huius.*

Deinde quia parallela plana GFT, DCE ſecantur plano ABC, erunt [a] ſectiones KF, AC parallelæ. Oſtendi autem ſupra etiam parallelas eſſe KP, BC. Ergo PKFC eſt parallelogrammum. Ergo KF æquatur PC. Iam ex P ducatur PS parallela ad AB. Similia erunt triangula KBF, PSC. Quare cùm PC ſit par KF, erit etiam CS ipſi EB æqualis. Quare ſi per HSL abſcindatur portio HSCL, erit hæc [b] æqualis, & ſimilis portioni GBFT, cùm baſes GFT, HCL æquales ac ſimiles, atque inſuper altitudines BF, SC æquales ſint.

a 16 *Elem.* 11.
b *Patet ex* 18. *huius.*

Vlterius quoniam parallela plana GFT, DCE ſecantur plano DBE, erunt ſectiones GT, DE parallelæ. Oſtendi autem ſupra etiam GTHL eſſe parallelas. Ergo HL eſt parallela DE diametro. Per conſtructionem verò PS eſt parallela ad AB. Ergo portio HSCL per rectam HL & punctum S abſciſſa, eſt ea de quâ actum eſt *propoſitione præcedenti*. Per eamdem igitur propoſitionem portio DBCE eſt ad portionem HSCL, vt ſphæra genita à baſi DCE ad ſolidum factum à circulari plano HCL circa HL reuoluto. Atqui iam oſtendimus portiones HSCL, GBFT æquales eſſe. Oſtenſum ſimiliter eſt ſegmenta HCL, GFT, ſimilia eſſe, & æqualia, ac proinde ex ijs circa ſubtenſas ſuas HL, GT reuolutis, æqualia fient ſolida. Ergo portio DBCE eſt ad portionem GBFT, vt ſphæra genita à baſi DCE ad ſolidum factum à ſegmento circulari GFT circa GT reuoluto. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Propoſitio vera eſt in omni portione, ſiue nimirum portio deſumpta ſit ex Cylindro Elliptico, Parabolico, Hyperbolico, ſiue alio quocumque. Demonſtratio etiam omnino eadem, ſed loco propoſitionis 46. aſſumatur corollarium eiuſdem.

PROPOSITIO XLVIII.

Iiſdem poſitis quæ totâ præcedenti: circa HL, diametro DE parallelam deſcribatur circulus HQLR.
Solidum HGBTLCH eſt ad ſolidum GBFT, vt ſphæra diametri HL, ſiue genita à ſemicirculo HQL eſt ad ſolidum quod fit à ſegmento circulari HCL circa eamdem HL in orbem ducto.

Schematiſmus 6. *Fig.* 42. 43.

Solidum HGBTLCH eſt ad [a] portionem totam DBCE, vt ſphæra diametri HL, ad ſphæram diametri DE. Portio autem tota DBCE eſt ad ſegmentum GBFT, vt [b] ſphæra diametri DE ad ſolidum genitum à ſegmento GFT circa GT, hoc eſt à ſegmento [c] HCL circa HL reuoluto. Ergo ex æquali, ſolidum HGBTLCH eſt ad ſegmentum GBFT, vt ſphæra diametri HL ad ſolidum quod fit à circulari ſegmento HCL, circa eamdem HL in orbem ducto. Quod erat demonſtrandum.

a *Coroll.* 1. *p.* 45. *huius*
b *Præced.*
c *Oſtenſum in præced.*

Corollarium.

Igitur diuidendo, ſegmentum Cylindricum, inter æqualia, ſimilia, & parallela plana HCL, GFT contentum, eſt ad portionem Cylindricam GBFT, vt ſolidum factum à plano, quod ſemiperipheriâ HQL & arcu HCL continetur, circa HL reuoluto ad ſolidum factum ex plano HCL, circa eamdem HL in orbem ducto.

PROPOSITIO XLIX.

Iiſdem poſitis: Cylindricum ſegmentum parallelis circularibus planis HCL, GFT interiectum, erit ad ſolidum ſphæricum quod

Schematiſmus 6. *Fig.* 42. 43.

quod fit à circulari plano HQLCH, circa HL in orbem ducto, vt BC ad circumferentiam DCEY.

SEgmentum enim Cylindricum HCLTFG, eſt ad ſolidum GBFT, vt ſegmentum ſphæricum factum ex plano HQLCH, circa HL reuoluto, ad ſegmentum ſphæricum factum ex HCL, circa eamdem HL in orbem ducto per *Coroll. præced.* Igitur permutando, Cylindricum HCLTFG eſt ad ſegmentum ſphæricum quod fit ex plano HQLCH, circa HL reuoluto, vt ſolidum GBFT, (hoc [a] eſt ſolidum HSCL) ad ſphæricum ſegmentum genitum à plano HCL circa HL in orbem ducto; hoc eſt vt portio DBCE ad [b] ſphæram baſeos DCE; hoc eſt vt BC [c] ad circumferentiam DCEY. Quod erat propoſitum.

a *Oſtenſum p. 47. huius.* b 46. *huius* c 13. *huius*

PROPOSITIO L.

Schematiſmus 6. *Fig.* 42. 43.

Iiſdem poſitis quæ tribus præcedentibus.

Erit ratio ſegmenti Cylindrici, quod fit ex plano circulari HCL in altitudinem CS, ad portionem à ſe abſciſſam HSCL, compoſita ex ratione ſphærici ſegmenti, quod fit à plano comprehenſo à ſemiperipheria HQS, & arcu HCL, circa HL reuoluti ad ſphæricum ſegmentum quod fit à plano HCL, circa eamdem HL in orbem ducto; & ex ratione PC ad PA.

IN *prop.* 47. oſtenſum eſt PKFC eſſe parallelogrammum. Quare KP, FC ſunt æquales. Quia verò triangula AKP, PSC ſimilia ſunt (ſunt enim KP, CB, per demonſtrata; [a] & AB, PS per [b] conſtructionem parallelæ) erit KP, id eſt (vt iam oſtendi) FC ad SC, vt AP ad PC. Iam verò ratio ſegmenti Cylindrici, quod fit ex plano HCL in altitudinem CS, ad ſegmentum HSCL eſt compoſita ex ratione ipſius ad Cylindricum ſegmentum HCLTFG, & ex ratione ſegmenti Cylindrici HCLTFG ad ſegmentum HSCL. Atqui ratio Cylindrici, quod fit ex plano HCL ducto io altitudinem CS, ad Cylindricum HCLTFG, eſt ratio CS ad CF, hoc eſt (vt iam oſtendi) ratio PC, ad PA: ratio autem Cylindrici HCLTFG ad ſegmentum HSCL, ſeu GBFT, (ſunt enim [c] æqualia) eſt ratio [d] ſegmenti ſphærici facti ex plano HQLCH circa HL reuoluto, ad ſegmentum ſphæricum factum ex plano HCL circa HL in orbem ducto. Ergo ratio ſegmenti Cylindrici quod fit ex HCL in altitudinem CS, ad portionem ſuam HSCL compoſita eſt ex ratione PC, ad AP, & ex ratione ſphærici ſegmenti facti ex HQLCH circa HL reuoluto ad ſphæricum ſegmentum factum ex HCL. Quod erat demonſtrandum.

a 47. *huius.* b *Ibidem.* c *Oſtenſum ibidem.* d *Coroll.* 48 *huius.*

PROPOSITIO LI.

Schematiſmus 6. *Fig.* 42. 43.

Si portionis (DBCE) à Cylindro recto circulari per baſeos diametrum DE, & punctum B in latere abſciſſæ, ſegmentum GBFT, reſectum plano GFT ad DCE baſim parallelo, cubetur, aut eius ratio ad portionem totam in rectis lineis exhibeatur; dabitur etiam circuli quadratura

AVferatur à ſemicirculo DCE ſegmentum quoduis HCL per lineam HL diametro DE parallelam. Per HL factâ ſectione HGTL ad baſim DCE rectâ, à portione totâ reſecetur portio HGBTLCH, erunt GT, HL, [a] parallelæ. Per GT fiat ſectio GFT parallela baſi DCE, erit hæc [b] æqualis & ſimilis plano HCL; ac proinde HCLTFG Cylindri ſegmentum eſt inter parallela æqualia, & ſimilia plana conſtitutum. Iam verò quia cubata eſt portio HGBTLCH, ſi cubetur etiam ſegmentum GBFT, cubabitur & reliquum ſegmentum Cylindricum HCLTFG. Segmentum igitur circulare HCL, ipſius Cylindrici baſis, æquabitur plano rectilineo, quod baſis erit ſolidi rectilinei eiuſdem cum Cylindrico magnitudinis & altitudinis.

a *Oſtenſum* 74. *huius.* b *Ex diſcurſu eiuſdem.* c *Corol.* 2. *p.* 22. *huius.*

Pari modo ſi exhibeatur ratio portionis DBCE ad ſegmentum GBFT, quoniam nota

eſt

eſt *ratio portionis DBCE ad ſolidum HGBTLCH, nota quoque erit ratio ſolidi HGBTLCH ad ſegmentum GBFT. Quare cùm * HGBTLCH cubatum ſit; etiam GBFT cubabitur; ac proinde rurſus & reſiduum Cylindricum HCLTFG. Vnde iterum quadratura circularis plani HCL.

d Ex Coroll p. 45. huius.
e Coroll 2. p. 22. huius

PROPOSITIO LII.

Iiſdem poſitis quæ in totâ præcedenti: ſi exhibeatur in rectis lineis ratio alicuius ſphæræ ad ſphæricum ſolidum factum ex circulari plano quopiam HCL, circa HL reuoluto: datur quadratura circuli.

Schematiſmus 6. Fig. 42. 43.

DEmonſtratum eſt à nobis *f* ſupra portionem DBCE eſſe ad ſegmentum GBFT vt ſphæra diametri DE ad ſphæricum ſolidum factum à circulari ſegmento GFT, circa GT, hoc eſt *g* HCL, circa HL reuoluto. Quare ſi detur ratio ſphæræ ad ſphæricum ſolidum, dabitur & ratio portionis DBCE ad ſegmentum GBFT; atque hinc per præcedentem ipſa quoque circuli quadratura exhibebitur. Quod erat propoſitum.

f 47. huius.
g Oſtenſum eſt ibid.

Aliter.

Solidum HGBTLCH eſt ad ſegmentum *a* GBFT, vt ſphæra ſemicirculi HQL ad ſolidum ſphæricum ſegmenti HCL. Quare ſi innoteſcat ratio ſphæræ ad ſolidum ſphæricum, innoteſcet quoque ratio ſolidi HGBTLCH ad ſegmentum GBFT. Atqui nota *b* etiam eſt ratio portionis DBCE ad ſolidum HGBTLCH. Ergo ex æquali nota erit ratio portionis DBCE, ad ſegmentum GBFT. Habetur igitur per 51. *huius* circuli quadratura.

a 48. huius
Fig. 42. 43.
b Ex 45. huius.

PROPOSITIO LIII.

Iiſdem poſitis,
Si in rectis lineis exhibeatur ratio ſolidi facti ex circulari ſegmento HCL, circa HL, ſiue ex ſegmento GFT circa GT reuoluto, ad conum maximum ei inſcriptum, qui fit à triangulo rectangulo HPC, aut aliquemuis alium; dabitur circuli quadratura.

Schematiſmus 6. Fig. 42. 43.

INſcribatur ſemiſſi ipſi GBFT ſolidi pyramis GBFK, cuius baſis ſit triangulum rectangulum GKF, quod conum genuit. Quoniam portio DBCE abſciſſa eſt ex hypotheſi à Cylindro recto, erit eius altitudo BFC recta plano DEC. Quare cùm planum GFT ſit parallelum plano DCE, etiam BF erit plano GFT recta. Pyramidis igitur GKFB altitudo eſt FB. Itaque pyramis GKFB eſt ad conum factum à triangulo GKF, vt *c* BF ad circumferentiam radij KF. Sed etiam ſegmentum GNBKF eſt ad *d* rotundum ſolidum factum à circulari ſegmento GOFK circa GK in orbem ducto, vt BF ad circumferentiam radij KF. Ergo ſegmentum GNBKF eſt ad rotundum ſolidum, factum ex GOFK, vt pyramis GKFB, ad conum factum ex triangulo GFK. Permutando igitur, ſegmentum GNBKF erit ad inſcriptam ſibi pyramidem GKFB, vt rotundum ſolidum plani GOFK, ad inſcriptum ſibi conum. Quare ſi ratio rotundi ſolidi ad conum innoteſcat, ratio etiam ſegmenti GNBKF ad pyramidem innoteſcet.

c 19. huius
d 16. huius

Atque ita ſegmentum GNBKF, adeoque totum ſolidum GBFT ad corpus rectilineum reducetur. Vnde rurſum per 51. *huius* habetur circuli quadratura. Quod erat propoſitum.

FINIS LIBRI PRIMI.

CYLIN-

CYLINDRICORVM ET ANNVLARIVM LIBER SECVNDVS.

a Defin.1. l.1.huius. *Superficies portionis abſciſſæ à Cylindro cuiuſcumque figuræ planæ recto [a] ductu procreato, huius ſecundi libri argumentum erit; quem qui cum primo contulerit, mirabilem ac prope perpetuam inter portionum ſoliditatem & ſuperficiem analogiam reperiet.*

SYNOPSIS.

PARS I.

b Defin. 22
c Defin.19.
d Fig. 52. 54. 15.
e Defin.12. 18.

CYlindrica portionum [b] ſuperficies comparatur cum curuâ ſuperficie rotundorum baſeos ſolidorum. [c] Oſtendo igitur Cylindricam ſuperficiem portionis, à Cylindro quouis non circulari modò, ſed Elliptico etiam, Parabolico, hyperbolico, aut quocumque alio abſciſſæ, ad curuam ſuperficiem ſolidi rotundi baſeos eam habere rationem, quam portionis altitudo [d] DE ad peripheriam circuli, cuius radius eſt HD, baſis trianguli AED, quod maxima eſt portionis ſectio [e].

a Defin. 22
b Fig.52.

Demonſtratur item quæ Cylindri circularis portioni inſunt propria: Cylindricam [a] nimirum eius ſuperficiem ad ſemicirculum [b] BDG; qui baſis eſt portionis, eam habere rationem, quam portionis altitudo DE octies ſumpta, ad totam habet baſeos circumferentiam BDCX: & plura alia, quæ in libri decurſu reperies.

PARS II.

c Schematiſmus 3. Fig. 24.
d Schematiſmus 4. Fig. 24.

COnferuntur portionum Cylindricæ ſuperficies cum duobus triangulis maximis, quæ ijs inſcribi poſſunt. Hæc igitur demonſtrantur. Portionis à circulari Cylindro abſciſſæ Cylindrica ſuperficies eſt ad duo maxima ſibi inſcripta triangula DBC, EBC [c] vt quadrati diameter ad latus. Quod ſi portio dirimatur plano GHK [d] ſectioni maximæ ABC parallelo, ſuperficies DNKH eſt ad inſcriptũ ſibi triangulum DKH, vt diameter DE eſt ad ſubtenſam HE: ſuperficies verò EMBKH eſt ad inſcriptum ſibi triangulum HKE vt eſt diameter DE ad ſubtenſam HD. Portionum ab alijs Cylindris deſumptarum ſuperficies Cylindricæ ſunt ad inſcripta ſibi triangula maxima, vt rotundi baſeos ſolidi curua ſuperficies eſt ad conicas ſuperficies, rotundis ſolidis inſcriptas, quarum axes ſunt ſubtenſæ baſium.

PARS III.

POrtionis à Cylindro circulari abſciſſę Cylindrica ſuperficies cum ſectione portionis maximâ, cum ſui Cylindri ſuperficie, cum ſuperficie curuâ ſegmenti plano ad baſim parallelo abſciſſi (vnde & circuli pendere quadraturam oſtendo) comparatur. Et ſectionis quidem maximæ

ximç, ᶜ (ABC) Cylindrica portionis ſuperficies oſtenditur eſſe quadrupla. Ad Cylindri verò ſui Cylindricam ſuperficiem eam rationem habet, quam diameter circuli ad circumferentiam, ad ſuperficiem GBFT ᵃ plano GFT ad baſim parallelo abſciſſæ, ſe habet vt ſuperficies ſphæræ baſeos ad ſuperficiem rotundi ſolidi, quod fit à circulari ſegmento GFT, circa GT in orbem ducto. c Schematiſmus 3. Fig. 22. a Schematiſmus 6. Fig. 42.

PARS PRIMA.

PROPOSITIO I.

Datæ ſint binæ quantitates A & B, ſiue ſuperficies, ſiue corpora, data item ſit ratio E ad F. Schematiſmus 6. Fig. 44.

Si quantitatibus A & B aliæ atque aliæ magnitudines ſine termino & inſcribi & conſcribi poſſint, eâ lege, vt quæ inſcribuntur & conſcribuntur ipſi A eam ᵇ exhauriant, hoc eſt ab A differant quantitate quantumuis paruâ; atque inſuper ad inſcriptas ipſi B eandem ſemper rationem ſeruent, quam E ad F: b Defin. 28

Erit quantitas A ad quantitatem B, vt E ad F.

SI non; erit ratio A ad B maior vel minor ratione E ad F. Sit primò maior. Aliqua igitur quantitas X minor quàm A, erit ad B, vt E ad F. Inſcribantur ipſis A & B magnitudines binæ M, & N: M quidem ipſi A, N verò ipſi B, eâ lege, vt M & minùs deficiat ab A, quàm X deficit (ac proinde maior ſit quàm X) & ſimul ſit ad N, vt E ad F; vtrumque enim poſſibile eſt per hypotheſim. Quoniam igitur volebas X eſſe ad B, vt E eſt ad F, eſtque M maior quàm X: erit M ad B in maiori, quàm E ad F. Sed M per conſtr. eſt ad N, vt E ad F. Ergo M eſt ad B in maiori quàm ad N. Ergo N inſcripta magnitudo ipſi B, maior eſt quàm B, quod eſt impoſſibile. Non igitur ratio A ad B maior eſt ratione E ad F.

Ponatur deinde ratio A ad B minor ratione E ad F. Aliqua igitur quantitas Z maior quàm A, erit ad B vt E ad F. Conſcribantur ipſis A & B binæ magnitudines, O quidem ipſi A; P verò ipſi B, eâ lege vt O & minùs excedat A quàm Z (ac proinde minor ſit quàm Z) & ſimul ſit ad P, vt E ad F; vtrumque enim per hypotheſim licet. Quoniam igitur volebas Z eſſe ad B, vt E eſt ad F, eſtque O minor quàm Z; erit O ad B in minori ratione, quàm Z ad B; hoc eſt quàm E ad F. Sed O per conſtructionem eſt ad P, vt E ad F. Ergo O eſt ad B in minori quàm ad P. Itaque B maior eſt, quàm conſcripta ipſi magnitudo P. Quod eſt impoſſibile. Non igitur ratio A ad B eſt minor ratione E ad F. Quare cùm neque maior ſit, eadem ei ſit neceſſe eſt. Quod demonſtrandum fuit.

Corollarium.

Hinc patet ſi magnitudines, quæ quantitati A inſcribuntur & conſcribuntur, ipſam A poſſint exhaurire, & ſemper æquales ſint ijs quæ inſcribuntur, & conſcribuntur quantitati B; A & B æquales eſſe.

PROPOSITIO II.

Coni recti (ABNC) curua ſuperficies eſt ad triangulum altitudinem habens (KL) parem (AB) lateri coni, vt circumferentia baſis coni ad baſim trianguli (LM.) Schematiſmus 6. Fig. 45. 46.

INſcribatur cono pyramis quæcumque, & altera conſcribatur. Facile oſtenſu eſt inſcriptæ ac conſcriptæ pyramidis ſuperficies à ſe mutuo, adeóque & ab ipſâ coni ſuperficie differre

Ducatur recta quæuis GK parallela ad FE, ſecans circuli circumferentiam in G, & rectam BF in O. Si hæc cum circulo & inſcriptis lineis in orbem ducatur circa punctum A. Puncta G & O, hoc in conicâ, illud in annulari ſuperficie, deſcribent peripherias inter ſe æquales: atque hoc ſemper eueniet. Omnes igitur peripheriæ annularis ſuperficiei omnibus peripherijs ſuperficiei conicæ æquales erunt. Quare ſi legitima eſt indiuiſibilium methodus, ipſa quoque annularis ſuperficies ſuperficiei conicæ æqualis erit.

Denique ſic probabitur, quadrati diametrum lateri, & circuli circumferentiam diametro eiuſdem, imò omnes lineas rectas inter ſe eſſe æquales.

Reſpondeo nihilominus ad inſtantias hactenus allatas, in ijs non ſeruari æqualia indiuiſibilium interualla. Rectæ enim BI, II, circumferentiarum BNC, IMQ, IMQ interualla, maiora ſunt ſequentis axeos; quæ ſunt interualla rectarum BC, IQ, IQ. Quod ipſum in reliquis etiam inſtantijs minimè fuiſſe obſeruatum perſpicuum erit conſideranti. Manet nihilominus ex indiuiſibilibus ſeu heterogeneis per ſe nihil effici. Quod enim, dum interualla ſeruantur æqualia, ex ijs verum deducatur, inde fit quod tum reuocari ad homogenea poſſint, vt in Scholio propoſitionis duodecimæ libri primi *notatum eſt. Quæ quidem reductio niſi fiat, aut via demonſtretur, quâ poſſit fieri; dubia manebit concluſio.*

PROPOSITIO III.

A cono recto AEB abſciſſus ſit truncus EDGBFA plano baſi parallelo. Datum item ſit trapezium rectangulum HKNM, cuius parallelæ HM, KN circumferentijs CGDO; AFBT ſint proportionales: altitudo autem KH par AC lateri trunci. *Schematiſmus 7. Fig. 48. 49.*

Dico ſuperficiem conicam trunci eſſe ad trapezium, vt maxima circumferentia AFB, ad maximam trapezij parallelam KN.

Quod ſi parallelæ HM, KN æquales ſint peripherijs CGDO, AFBT: Dico ſuperficiem conicam trunci æqualem eſſe trapezio.

Rectæ KH, NM productæ concurrant in P. KP eſt ad HP, vt KN ad HM; hoc eſt per hyp. vt circumferentia AFB ad circumferentiam CGD; hoc eſt vt [a] AB ad CD; hoc eſt vt latus coni AE ad latus coni CE. Ergo diuidendo KH eſt ad HP, vt AC ad CE. Cùm ergo KH, AC per hypotheſin æquales ſint, etiam HP, CE, adeóque totæ KP, AE æquales erunt. Quare per *præcedentem* triangulum KPN erit ad ſuperficiem conicam AEB, vt KN ad circumferentiam AFB: & triangulum HPM erit ad ſuperficiem conicam CED, vt HM ad circumferentiam CGD; hoc eſt rurſum, vt KN ad circumferentiam AFB. Ergo & reliquum KHMN trapezium erit ad reliquam ſuperficiem conicam CGDBFA, vt KN ad circumferentiam AFB. Quod erat demonſtrandum. *a Pappus l. 5 p. 41.*

Corollarium.

Iiſdem poſitis: ſuperficies conica CABD æquatur rectangulo cuius altitudo eſt par ipſi AC: baſis verò ſemiſſis rectarum peripherijs CGDO, HFBT, æqualium.

Ponantur enim HM, KN (licet id figura non exprimat) æquales peripheriis CGDO, AFBT. Biſecetur MN in Q, & per Q ductâ normali, comple KS rectangulum. Erit hoc æquale trapezio NH, hoc eſt ſuperficiei conicæ CAFD: altitudo autem eius eſt KH, id eſt AC; baſis verò KR, eſt ſemiſſis rectarum KN, HM; hoc eſt peripheriarum AFBT, CGDO.

PROPOSITIO IV.

Schematiſmus 7. Fig. 50. Data ſit figura quæcumque plana in eaſdem partes curua, & ſuper ea Cylindrus rectus IKFG.

Curua Cylindri ſuperficies eſt ad rectangulum, cuius altitudo Cylindri latus, vt perimeter baſeos AKF ad baſim rectanguli.

a p. 1. l. 2. huius. DEmonſtratio ſimilis eſt ei quæ allata fuit ſupra [a], per plana inſcripta & conſcripta ſuperficiei conicæ,

Per heterogena ſic probabitur. Rectangulum habens eandem cum Cylindro altitudinem eſto FT. Fiat ſectio baſi parallela PRQ. Erit linea PRQ ad lineam VQ, vt perimeter baſis AKF ad rectanguli baſim SF, & hoc ſemper eueniet. Ergo &c.

Corollaria.

Ex theoremate habemus ea quæ de rectangulis ſunt demonſtrata, ad rectas quaſcumque Cylindricas ſuperficies transferri poſſe.

Quare ſi duorum Cylindrorum rectorum quorumcumque latera & baſium perimetri reciprocantur, ſuperficies Cylindricæ æquales erunt. Et contra.

b deſin. 22. Et Cylindrorum rectorum quorumcumque [b] curuæ ſuperficies rationem inter ſe habent compoſitam ex ratione laterum, & ex ratione perimetrorum baſium.

Et Cylindrorum quorumcumque rectorum æquè altorum ſuperficies ſunt, vt baſium perimetri.

Et quorum perimetri baſium æquantur, ſuperficies ſunt vt altitudines.

PROPOSITIO V.

Schematiſmus 1. Fig. 7. Data ſit portio Cylindri cuiuſcumque recti per A centrum baſeos & punctum B in latere abſciſſa, DBCE, cuius altitudo BC, diameter baſeos DE.

Datum item ſit punctum Q in plano baſeos, à quo duci poſſit diametro DE parallela, quæ baſim ſecet. Ex Q erigatur recta QR, parallela BC, occurrens plano DBE Elliptico, in R; item QD parallela ad AC, occurrens diametro in quouis puncto D. Recta RQ eſt ad peripheriam radij QD, vt BC ad peripheriam radij AC.

DVcatur ex Q recta QF parallela ad DE. Per hypotheſim occurret hæc baſi, puta in F. Ex F erige in Cylindricâ portionis ſuperficie rectam FG, quæ occurrat plano Elliptico DBE in G. Ducatur item FK parallela ad AC. Demonſtraui [a] GF eſſe ad peripheriam radij KF, vt BC, ad peripheriam radij AC. Sed vt FG eſt ad peripheriam radij FK, ſic RQ eſt ad peripheriam radij DQ. Ergo RQ eſt ad peripheriam radij DQ, vt BC ad peripheriam radij AC. Quod erat demonſtrandum. *a 7. l. r. huius.*

PROPOSITIO VI.

Schematiſmus 7. Fig. 51. Eſto ſphæra, cuius diameter BC; maximus circulus BICQ; centrum A.

Semicirculo BIC inſcribi & conſcribi poſſunt ſemiſſes polygonorum regularium, habentium vnum latus, vt GI, LM, diametro BC parallelum; quæ ſi circa diametrum BC circumagantur, ſphæræ datæ inſcribent & conſcribent ſolida, quorum ſuperficies

ficies

ficies à ſphæricâ ſuperficie differant quantitate quantumuis paruâ.

POlygono regulari OXGIZP, quod ſemicirculo BIC inſcriptum eſt, poteſt inſcribi alius circulus OFKP, qui omnia polygoni latera tangat, ac proinde ſuperficies à perimetro polygoni generatæ, & ſuperficiei ſphæricæ conſcriptæ erunt, quam producit circulus OFKP, & nihilominus inſcriptæ ſuperficiei ſphæricæ datæ BIZQ. Per ea igitur quæ demonſtrat Pappus *libro 5, prop. 24*, ſuperficies à perimetro XGIZ productæ, æquantur circulo, cuius radius ſit diameter OP. Pari modo, quia ex hypotheſi ſuperficies, quas efficit perimeter HLMN conſcriptæ ſunt ſphæræ datæ, etiam erunt æquales circulo, cuius radius ſit diameter BC, per eandem Pappi *propoſ.* Ergo ſuperficies genitæ à perimetro HLMN, ſunt ad ſuperficies genitas à perimetro XGIZ, vt circulus radij BC ad circulum radij OP; hoc eſt vt quadratum BC ad quadratum OP. Sed etiam circuli geniti à radijs HB, NC ſunt ad circulos genitos à radijs XO, ZP, vt quadratum BC ad quadratum OP (nam HB, NC ſunt ad XO, ZP, vt perimeter BHLMNC ad perimetrum OXGIZP; hoc eſt, quia polygona ſimilia ſunt, vt BC ad OP) ergo ſuperficies genitæ à toto perimetro BHLMNC, quæ datæ ſphæræ BIZQ ſunt conſcriptæ, ſunt ad genitas à toto perimetro OXGIZP, quæ ſphæræ datæ ſunt inſcriptæ, vt quadratum BC ad quadratum OP, hoc eſt vt polygonum conſcriptum ad inſcriptum. Sed hæc differre poſſunt à circulo BICQ quantitate quantumuis paruâ, vt colligitur ex *propoſ. 6. Archimedis l. 1. de ſph. & Cyl.* Ergo etiam ſuperficies, quæ datæ ſuperficiei ſphæricæ BICQ conſcribuntur & inſcribuntur, differre tandem à ſphærica ſuperficie poſſunt quantitate quantumuis paruâ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VII.

Cylindrica [a] ſuperficies cuiuſcumque portionis à Cylindro circulari recto per centrum baſeos & punctum in latere abſciſſæ, altitudinem habentis æqualem circumferentiæ baſeos, ſuperficiei ſphæræ baſeos æqualis eſt. *a defin. 12.*

ESto Cylindri recti portio BREDC per A, centrum baſis BCD, & E punctum in latere abſciſſa, altitudinem DE parem habens circumferentiæ BDCX. Demonſtrandum eſt ſuperficiem curuam ſiue Cylindricam portionis æqualem eſſe ſuperficiei ſphæræ à circulo BCDX generatæ. *Schematiſmus 7. Fig. 52.*

Semicirculo BDC inſcribantur & conſcribantur ſemiſſes polygonorum regularium latera KO, IL, habentium diametro BC parallela. Hæc ſi in orbem ducantur circa diametrum BC, latus KO ſphæræ inſcribet ſuperficiem Cylindricam; latus verò IL conſcribet latera KG, ON inſcribent conorum truncorum ſuperficies; latera IH, LV conſcribent: latera demum GF, NM inſcribent ſuperficies planas circulares; latera HB, VC conſcribent.

Deinde ex punctis G, K erigantur rectæ in ſuperficie Cylindrica: item ex puncto P recta ad DE parallela, quæ omnes plano Elliptico BEC occurrant in punctis R, S, δ: ducanturque rectæ FR, RS, Sδ. His peractis, ſemiſſi ſuperficiei Cylindricæ portionis inſcripta ſunt plana FRG, GRSK, KSδP: atque eâdem methodo reliquæ ſemiſſi eadem plana inſcribentur, omnia autem ſimul ſumpta minora erunt Cylindricâ portionis ſuperficie.

Ex punctis quoque H & I, erige rectas parallelas ad DE, occurrentes plano Elliptico BEC in Q & T. Ex puncto etiam contactus ϑ erigatur recta in ſuperficie Cylindricâ, occurrens plano BEC in β. Erit hæc parallela rectæ DE, ac proinde etiam rectis HQ, IT. Vnde cùm etiam eidem inſiſtant rectæ HI, erunt HQ, ϑβ, IT in vno plano: Per tangentem igitur HI & tres iam dictas HQ, ϑβ, IT: item per tangentem ID, ac rectas IT, DE; item per tangentem HB & rectam HQ, fiant planorum ſectiones, quæ in plano Ellipſeos BEC producent rectas ET, TQ, QB Ellipſim tangentes in E, β, B: circa ſemiſſem portionis autem tria plana efficient, triangulum nempe BQH, trapezium QHIT portionem tangens in rectâ ϑβ, & rectangulum ITED tangens portionem in rectâ ED. Eâdem methodo portionis ſemiſſi alteri eadem plana conſcribentur, quæ omnia ſimul ſumpta paret maiora eſſe Cylindricâ portionis ſuperficie.

Reliquum eſt vt ſuperficies ſphæræ inſcriptas ac conſcriptas cum planis inſcriptis ac conſcriptis portioni, comparemus, atque ex eorum perpetuâ æqualitate ipſius quoque portionis ſuperficiei Cylindricæ cum ſphæricâ ſuperficie æqualitatem concludamus.

Quoniam Cylindrus portionis ex hyp. rectus eſt, erit RG ad baſim BDC recta, ac proinde

a defin. 3. elem. 11. b 7. l. 1. huius. c Arch. dim. circ. prop. 1. d 7. l. 1. huius. e 5. l. 2. huius. f 4. l. 2. huius.

inde etiam [a] angulus RGF rectus eſt, & RG altitudo eſt trianguli FGR. Iam verò quia ex hypotheſi altitudo portionis DE æquatur circumferentiæ radij AD, etiam [b] RG par erit peripheriæ radij FG; ac proinde triangulum [c] FGR æquatur circulo radij FG. Rurſum quia DE par eſt peripheriæ diametri XD per hyp. etiam [d] SKRG, quæ ſunt parallela latera trapezij rectanguli RGKS, æquantur peripherijs diametrorum φK, ωG. Eſt autem GK trapezij altitudo, ipſum trunci conici latus. Ergo trapezium RGKS æquatur [e] ſuperficiei trunci conici à rectâ KG deſcriptæ.

Denique quoniam KS, vt iam oſtendi, æquatur peripheriæ diametri KΦ, & KP eſt altitudo communis tum rectanguli SKPδ, tum Cylindricæ ſuperficiei à rectâ KP deſcriptæ; erit [f] rectangulum SKPδ æquale Cylindricæ ſuperficiei, per rectam KP deſcriptæ. Superficies igitur hemiſphærio DBX inſcriptæ, ſuperficiebus portionis ſemiſſi inſcriptis æquales ſunt. Quod cùm eodem modo de altero hemiſphærio, ſemiſſeque alterâ portionis oſtendatur; omnes ſuperficies ſphæræ baſeos inſcriptæ omnibus planis portioni inſcriptis æquales erunt. Atque hoc ſemper eueniet quotcumque fuerint tum ſphæræ, tum baſi inſcriptæ ſuperficies.

a Hyp. b 5. l. 2. huius. c Arch. dim. circ. p. 1.

Nunc idipſum de conſcriptis ſuperficiebus oſtendamus. Quoniam DE [a] par eſt peripheriæ radij AD, etiam QH par erit [b] peripheriæ radij BH. Eſt autem & QH recta ad BH (eſt enim per conſt. QH parallela DE, quæ recta eſt ex hyp. plano BDC). Ergo [c] triangulum BQH par eſt circulo radij BH. Deinde, vt ſupra, oſtendam ex 5 & 3 *huius* libri, trapezium QHIT ſuperficiei trunci conici à rectâ HI deſcriptæ; Item ex 5 & 4 *huius libri* rectangulum TIDE ſuperficiei Cylindricæ à rectâ ID deſcriptæ exæquari; eademque omnia in altero hemiſphærio, reliquâque portionis ſemiſſe eodem diſcurſu concludemus. Omnes igitur ſuperficies ſphæram ambientes, omnibus planis portioni conſcriptis æquales erunt. Atque hoc ſemper eueniet quocumque tandem numero ſuperficies tum ſphæræ, tum portioni conſcribamus. Quare cùm etiam ijs inſcriptionibus ac conſcriptionibus ſphæram exhauriri demonſtratum [d] ſit, ipſa quoque ſphæræ baſeos ſuperficies, portionis ſuperficiei Cylindricæ æqualis [e] erit. Quod erat demonſtrandum.

d Praeced. e 1. l. 2. huius.

Obſerua inſignem analogiam inter portionis ſoliditatem & ſuperficiem, quod enim libro primo prop. 12. de portione ipſa, hic idem prorſus de Cylindrica eius ſuperficie demonſtratum eſt.

Per Heterogenea.

Schematiſmus 7. Fig. 52.

Secentur tam ſphæra, quàm portio planis parallelis ſectioni maximæ portionis AED, ſiue rectis plano BDCX, quæ forment in ſuperficie quidem Cylindricâ portionis, rectas SK, RG &c. in ſuperficie verò ſphæricâ circumferentias producant, quarum diametri φK, ωG &c.

Iam demonſtratum eſt in diſcurſu præcedenti, rectas SK, RG, æquales eſſe circumferentijs diametrorum φK, ωG. Quare cùm hoc ſemper eueniat, erit ſuperficies portionis Cylindrica æqualis ſphæricæ. Quod erat propoſitum.

Corollarium I.

a 6. huius.

Hinc patet primò; plana portioni inſcripta, portionis ſuperficiem exhaurire, plana enim illa æquantur ſuperficiebus ſphæræ inſcriptis. Sed hæc [a] exhauriunt ſuperficiem ſphæræ, hoc eſt ſuperficiem portionis. Ergo & illa.

Patet 2; ſi loco planorum FRG, OKSY, MNπ, ſubſtituantur plana BRG, KSED, OYED, CπN, portionis ſuperficiem à fortiori exhauſtum iri.

Corollarium II.

Si portio & ſphæra ſecentur planis ad ſectionem portionis maximam AED parallelis, erunt ſegmenta ſuperficiei Cylindricæ portionis æqualia ſegmentis ſuperficiei ſphæricæ inter eadem parallela conſtitutis. Demonſtrabitur diſcurſu eodem quo theorema.

PROPOSITIO VIII.

Cylindrica ſuperficies cuiuſcumque portionis, à Cylindro circulari recto per centrum baſeos & punctum latere abſciſſa, eam habet rationem ad ſuperficiem ſphæræ baſeos, quam portionis altitudo ad circumferentiam baſeos.

Demon-

Demonſtratio.

Eſto Cylindri circularis recti portio BRSEDC, per centrum A baſeos BDCX, & E puncto in latere abſciſſa. Oſtendendum eſt ſuperficiem Cylindricam portionis eſſe ad ſuperficiem ſphæricam à peripheria BDCX generatam, vt DE altitudo portionis ad peripheriam BDCX. *Schematiſmus* 7. *Fig.* 35.

Inſcribantur & conſcribantur tum ſphæræ tum portioni ſuperficies, vti factum in præcedenti, vt ED eſt ad peripheriam radij AD, ſic [a] RG eſt ad peripheriam radij FG. Quia verò triangulum FGR habet angulum ad G rectum, erit triangulum [b] FGR ad circulum radij FG, ſiue diametri ωG, vt RG ad circumferentiam diametri ωG; hoc eſt, vti iam oſtendi, vt ED ad circumferentiam diametri XD. Deinde quia tam RG eſt ad [c] peripheriam diametri ωG, quàm SK ad peripheriam diametri φK, vt ED eſt ad peripheriam diametri XD; erunt rectæ RG, SK (parallela latera trapezij rectanguli RGKS) peripherijs diametrorum ωG, φK proportionales. Eſt autem & GK altitudo trapezij, ipſum latus ſuperficiei trunci conici à rectâ KG productæ. Ergo [d] trapezium RGKS eſt ad ſuperficiem conicam à rectâ KG productam, vt SK maxima trapezij parallela ad maximam trunci conici circumferentiam, cuius nempe diameter eſt φK; hoc eſt (quemadmodum iam oſtendi) vt FD eſt ad peripheriam diametri XD. Denique rectangulum SKPδ eſt ad Cylindricam ſuperficiem à rectâ KP factam, vt [e] SK ad circumferentiam diametri Kφ, hoc eſt [f] rurſum, vt ED ad peripheriam diametri XD. Singula igitur plana portionis ſemiſſi inſcripta ſunt ad ſingulas ſuperficies inſcriptas hemiſphęrio DBX, vt ED eſt ad peripheriam diametri XD. Eodem modo idipſú in alterâ portionis ſemiſſe, reliquoque hemiſphærio oſtendemus. Omnia igitur plana portionis curuę ſuperficiei inſcripta ſimul ſumpta ſunt ad omnes ſuperficies toti ſuperficiei ſphęricę inſcriptas etiam ſimul ſumptas, vt ED ad circumferentiam diametri XD, ſiue ad circumferentiam baſeos BDCX. Atque hoc ſemper eueniet quotcumque ſuperficies portioni ac ſphæræ inſcribantur.

a 7. l. 1. huius. b 2. l. 2. huius. c 7. l. 1. huius. d 3. l. 2. huius. e 4. l. 2. huius. f 7. l. 1. huius.

Iam hoc ipſum de ſuperficiebus conſcriptis demonſtremus.

Triangulum QHB quia angulum ad H habet rectum, eſt [g] ad circulum radij BH, vt QH eſt ad peripheram radij HB; hoc eſt vt [a] ED ad peripheriam radij AD. Deinde (vt ſupra) oſtendam ex 5 & 3 *huius libri* trapezium QHIT eſſe ad ſuperficiem conicam à recta IH deſcriptam, vt ED ad peripheriam radij AD. Item ex 4 & 5 rectangulum TIDE habere ſe ad Cylindricam ſuperficiem à rectâ ID factam, vt rurſum ED ad peripheriam radij AD. Eademque omnia in ſemiſſe portionis alterâ, reliquoque hemiſphærio DCX demonſtrabimus. Cùm igitur plana ſingula portioni conſcripta, ſint ad ſingulas ſuperficies conſcriptas ſphęræ, vt ED ad peripheriam radij AD, hoc eſt peripheriam BDCX; etiam omnia plana ſimul ſumpta, erunt ad ſuperficies omnes ſimul ſumptas, vt ED ad peripheriam BDCX. Atque hoc ſemper eueniet, quotcumque plana curuæ ſuperficiei portionis & ſuperficies ſphęricæ ſuperficiei circumſcripſerimus. Quare cùm inſcriptionibus illis ac conſcriptionibus ſphęrica ſuperficies [b] exhauriatur, ipſa quoque portionis ſuperficies curua erit ad ſphęræ ſuperficiem [c] vt ED ad peripheriam BDCX. Quod erat demonſtrandum.

g 2. l. 1. huius. a 5. l. 2. huius. b 6. l. 2. huius. c 1. l. 2. huius.

Obſerua magnam huius Theorematis analogiam cum p. 13. libri 1. quod enim hic de ſuperficie oſtenditur, iſthic oſtenſum eſt de ſoliditate.

Per Heterogenea.

Secentur portio & ſphæra planis, ſectioni portionis maximæ AED parallelis, quæ in ſuperficie curuâ portionis forment rectas SK, RG &c. In ſuperficie autem ſphæricâ efficiant peripherias, quarum diametri Kφ, Gω &c. Iam oſtenſum in demonſtratione præcedenti eſt rectas SK, RG eſſe ad peripherias diametrorum Kφ, Gω, vt ED eſt ad peripheriam BDCX. Quare cùm hoc ſemper eueniat, ipſa quoque portionis ſuperficies curua eſt ad ſphęræ ſuperficiem, vt ED eſt ad peripheriam BDCX. Quod erat propoſitum. *Schematiſmus* 7. *Fig.* 53.

Hoc Theorema uniuerſale eſt; adeoque etiam rationem æqualitatis complectitur. Sed cùm hæc ſibi proprijs plerumque medijs demonſtretur, ſeorſim illam à *prop.* 7. exequi viſum eſt.

Corollarium I.

Si portio & ſphæra ſecentur planis, ad ſectionem portionis maximam AED parallelis, erunt quoque ſegmenta curuæ ſuperficiei portionis ad ſegmenta ſuperficiei ſphęricæ, vt ED portionis altitudo ad baſeos peripheriam BDCX. Eadem eſt demonſtratio quæ Theorematis.

Corollarium II.

a patet ex Archim. l. 2. de ſph. p. 3

Cùm per Corollarium 1. ſegmenta curuæ ſuperficiei portionis proportionalia ſint ſegmentis ſuperficiei ſphæricæ; hæc autem [a] proportionalia ſint ſegmentis axeos BC: etiam ſegmenta curuæ ſuperficici portionis axeos BC ſegmentis proportionalia erunt.

PROPOSITIO IX.

Schematiſmus 7. Fig. 54.

Cylindrica ſuperficies portionis, à Cylindro circulari recto per latus & centrum baſis abſciſſæ, altitudinem habentis parem circumferentiæ baſeos Cylindri, ſuæ baſeos octupla eſt.

Sit portio BEDC; cuius altitudo ED par ſit peripheriæ BDCX. Demonſtrandum eſt Cylindricam portionis ſuperficiem baſeos portionis, nempe ſemicirculi BDC, octuplam eſſe.

b Archim. p. 30. l. 1. ſphæ.

Quoniam ED par eſt circumferentiæ BDCX, erit portionis Cylindrica ſuperficies æqualis ſuperficiei ſphæræ à ſemicirculo BDC generatæ, vt *propoſitione 7 libri huius* demonſtrauimus. Atqui huius ſphæræ ſuperficies quadrupla [b] eſt circuli BDCX; hoc eſt octupla ſemicirculi BDC. Ergo etiam Cylindrica ſuperficies portionis eiuſdem ſemicirculi octupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO X.

Cylindrica ſuperficies portionis, à Cylindro circulari recto per latus & baſeos centrum abſciſſæ, ad ſuam baſim eam habet rationem, quam portionis altitudo octies ſumpta ad circumferentiam baſis Cylindri.

Schematiſmus 7. Fig. 54.

Sit portio BEDC, cuius altitudo ED, demonſtrandum eſt Cylindricam portionis ſuperficiem eſſe ad ſemicirculum BDC vt altitudo ED octies ſumpta, eſt ad circumferentiam BDCX.

a Archim. l. 1. ſphæ. p. 30.

Cylindrica portionis ſuperficies eſt ad ſuperficiem ſphæræ à portionis baſi BDC generatæ, vt ED portionis altitudo ad baſeos Cylindri circumferentiam BDCX, vti demonſtrauimus *prop. 8. huius libri*. Sed circulus ABDCX eſt pars quarta [a] ſuperficiei ſphæricæ iam dictæ, ac proinde ſemicirculus pars octaua. Ergo Cylindrica portionis ſuperficies eſt ad ſemicirculum, vt altitudo DE octies ſumpta, eſt ad circumferentiam BDCX. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XI.

Schematiſmus 7. Fig. 54.

Cylindri circularis recti portio, per baſeos centrum & latus abſciſſa BEDC, & ſphæra ab eiuſdem baſi BDC generata, ſecentur planis ad ſectionem portionis maximam AED parallelis, quæ in ſuperficie Cylindrica portionis producant rectas FO; in ſphæra baſis circulos, quorum diametri OG; ducanturque rectæ BO.

Dico: ſi altitudo ED par ſit circumferentiæ BDCX, ſuperficiei Cylindricæ ſegmenta BFO æqualia ſunt circulis, quorum radij BO; ſiue quadrupla circulorum; quorum diametri ſunt BO.

Et vniuerſim ſegmenta BFO ſunt ad circulos radiorum BO, vt

ED

ED portionis altitudo ad circumferentiam BDCX, ſiue ſegmenta BFO ſunt ad circulos diametrorum BO, vt quadrupla altitudinis DE ad circumferentiam BDCX.

CYlindricæ ſuperficiei ſegmenta BFO ſunt ad ſuperficiei ſphæricæ ſegmenta OBG, vt [a] ED ad circumferentiam BDCX. Atqui circuli radiorum BO æquantur [b] ſuperficiei ſphæricæ ſegmentis OBG. Ergo Cylindricæ ſuperficiei ſegmenta BFO ſunt ad circulos radiorum BO, vt ED ad circumferentiam BDCX. Quod erat demonſtrandum,

a *Coroll.* 1. *p.* 8. *l.* 2. *huius.*
b *Archim. l.* 1 *ſph p.* 36.37.

Corollarium I.

Superficiei igitur Cylindricæ ſegmenta BFO circulis radiorum BO, & diametrorum BO proportionalia ſunt.

Corollarium II.

Superficiei Cylindricæ ſegmenta OFFO, OFFO ſunt ad circulorum radijs BO deſcriptorum differentias, vt portionis altitudo DE ad peripheriam BDCX; ac proinde hæc illis proportionalia ſunt. Patet ex præſenti Theoremate & 19 quinti elementi.

PROPOSITIO XII.

Iiſdem poſitis:

Si altitudo portionis DE par fuerit peripheriæ BDCX; Cylindricæ ſuperficiei ſegmenta BFO æqualia ſunt ſuperficiebus ſphæricis quarum diametri BO. *Schematiſmus* 7. *Fig.* 54.

Et vniuerſim ſegmenta BFO Cylindricæ ſuperficiei ſunt ad ſuperficies ſphæricas diametrorum BO, vt DE portionis altitudo ad peripheriam BDCX.

MAnifeſta eſt demonſtratio ex præcedenti, & Archimedis *l.* 1 *de ſph. & Cylind. p.* 30. circulis enim radiorum BO æquantur ſuperficies [a] ſphæricæ diametrorum BO. Atqui ſegmenta [b] BFO ſunt ad circulos radiorum BO, vt DE ad peripheriam BDCX. Ergo etiam ſegmenta BFO ſunt ad ſphæricas ſuperficies diametrorum BO, vt DE ad peripheriam BDCX. Quod erat propoſitum.

a *Archim. l.* 1. *ſph. p.* 30
b *Præced.*

Corollarium 1.

Igitur Cylindricæ ſuperficiei ſegmenta BFO, ſuperficiebus ſphæricis diametrorum BO proportionalia ſunt.

Corollarium II.

Superficiei Cylindricæ ſegmenta OFFO, OFFO ſunt ad ſuperficierum ſphæricarum, quarum diametri BO, differentias, vt ED ad peripheriam BDCX, ac proinde hæ illis proportionales ſunt, patet ex præſenti Theoremate, & 19 quinti Euclidis.

Corollarium III.

Quodlibet Cylindricæ ſuperficiei ſegmentum OFFO, eſt ad totam portionis Cylindricam ſuperficiem BEDC, vt differentia ſuperficierum ſphæricarum, quarum diametri BO, BO, ad ſuperficiem ſphæricam diametri BC.

Demonſtratio patet ex Corollario ſecundo & ex *p.* 8. *huius libri.*

PRO-

Digitized by Google

dictis inſcriptionibus ac conſcriptionibus conoïs exhauritur. Quare ipſa quoque portionis curua ſuperficies, erit ad ſuperficiem conoïdis baſeos, vt ED ad circumferentiam radij ED. Quod erat propoſitum. *1. l 2. huius.*

PROPOSITIO XV.

Eſto rurſum portio Cylindri recti Parabolici, aut Hyperbolici, vel alterius cuiuſuis, non iam per axem AD, ſed per ordinatim applicatam BC obliquè abſciſſa, altitudinem habens, ED, *Schematiſmus 8. Fig. 56.*

Etiam huius portionis ſuperficies curua eſt ad ſuperficiem rotundi ſolidi, à baſi BDC circa ordinatim applicatam BC circumactâ producti, vt ED Altitudo portionis ad circumferentiam circuli, cuius diameter DX.

DEmonſtratio eadem erit, quæ propoſitionis octauæ huius libri.

Corollarium

ad duas præcedentes.

Et ſi portiò ac rotundum ſolidum ſecentur planis ſectioni maximæ AED parallelis, erunt ſegmenta curuæ ſuperficiei portionis ad ſegmenta ſuperficiei rotundi ſolidi, vt ED ad circumferentiam diametri XD.

Obſerua analogiam cum prop. 17. & 16. libri primi; iſthîc enim eadem omnia de portionum ſoliditate, quæ hîc in 14 & 15 de ſuperficie demonſtrantur.

PROPOSITIO XVI.

Curuæ ſuperficies portionum (ADFCE, ADBCE) ab eodem Cylindro recto (ſiue circularis ille ſit, ſiue Ellipticus, ſiue Parabolicus, ſiue Hyperbolicus, ſiue ex cuiuſuis figuræ planæ recto ductu procreatus) diſſectarum, eam inter ſe rationem habent, quam altitudines (CF, CB.) *Schematiſmus 3. Fig. 19. 20.*

CVrua ſuperficies, lineis DBE, DCE comprehenſa, eſt ad ſuperficiem curuam ſolidi rotundi baſeos (quod quidem, ſi Cylindrus fuerit circularis, ſphæra eſt; ſi Ellipticus, eſt ſphæroïs; ſi Parabolicus, aut Hyperbolicus, eſt conoïs Parabolica, aut Hyperbolica) vt BC ad peripheriam radij AC; quemadmodum *prop.* 8. 13, 14, 15 *huius libri* demonſtratum eſt. Superficies autem curua ſolidi rotundi baſeos eſt ad ſuperficiem curuam lineis DFE, & DCE comprehenſam, vt circumferentia radij AC ad CF, quemadmodum locis iam citatis oſtenſum eſt. Igitur ex æquo ſuperficies lineis DBE, DCE comprehenſa, eſt ad ſuperficiem comprehenſam lineis DFE, DCE, vt CB ad CF. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Segmenta igitur ſuperficiei curuæ, inter lineas DCE, DB2E, DFE, DB3E interiecta, eam inter ſe rationem habent, quam altitudinis BC ſegmenta CB, 2BF, FB3.

Eadem reperies l. 1. prop. 18 demonſtrata de portionum ſoliditate: rurſum igitur analogia.

PARS SECVNDA.

PROPOSITIO XVII.

Cuiuſcumque portionis à Cylindro circulari recto per centrum baſeos & punctum in latere abſciſſæ Cylindrica ſuperficies ad duo *Schematiſmus 3. Fig. 22.*

maxima

maxima triangula ſibi inſcripta eam habet rationem, quam diameter quadrati ad latus eiuſdem.

ESto Cylindri circularis recti portio DBCE per A baſeos centrum & punctum in latere abſciſſa, quamcumque altitudinem habens BC: Oſtendendum eſt Cylindricam portionis ſuperficiem, quæ nimirum curuis lineis DCE, DKBGE continetur, eſſe ad duo triangula maxima DBC, EBC, ſibi inſcripta, vt diameter quadrati ad latus.

Quoniam Cylindrus portionis, ex hypotheſi rectus eſt, erit BC, recta plano baſeos DCEF, ac proinde angulus DCB rectus, & DC altitudo erit trianguli BDC. Triangulum ergo BDC eſt [a] ad curuam ſuperficiem maximi coni CDF, hemiſphærio CODF inſcripti, vt BC ad circumferentiam CMFN. Sed etiam [b] Cylindrica portionis ſuperficies eſt ad ſuperficiem ſphæræ baſeos DCEF, vt BC ad circumferentiam CMFN, ſiue DCEF. Ergo Cylindrica portionis ſuperficies eſt ad ſuperficiem ſphæræ baſeos, vt triangulum BDC eſt ad ſuperficiem coni curuam CDF. Igitur permutando, ſuperficies portionis Cylindrica eſt ad triangulum DBC, vt ſuperficies ſphærica ad conicam CDF. Ergo Cylindrica portionis ſuperficies eſt ad duo triangula inſcripta æqualia DBC, & EBC, vt ſuperficies ſphærica eſt ad duas æquales ſuperficies conicas CDF, & CEF.

a 2.l.2.huius.
b 8.l.2.huius.

Iam verò quoniam [a] conica ſuperficies CDF æquatur triangulo cuius altitudo CD; baſis autem par eſt peripheriæ CMFN; erit vtraque ſimul conica ſuperficies CDF & CEF, par triangulo, cuius altitudo CD, baſis autem duæ peripheriæ CMFN. Deinde quia circulus CMFN par eſt triangulo, [b] cuius altitudo eſt radius AD, baſis autem peripheria CMFN; erunt duo circuli CMFN æquales triangulo, cuius altitudo DE diameter tota, baſis autem peripheria CMFN. Ergo quatuor circuli (hoc eſt ipſa [c] ſuperficies ſphærica) æquantur triangulo cuius altitudo DE, baſis autem duæ circumferentiæ CMFN.

a 2.l.2.huius.
b Archim dim cir. p.1.
c Archim. l 1. ſph.p. 30.

Atqui triangulum, cuius altitudo eſt DE, baſis autem dupla peripheriæ CMFN (hoc eſt, vt iam oſtendi, ſphærica ipſa ſuperficies) ita ſe habet ad triangulum, cuius altitudo CD, baſis autem etiam dupla circumferentiæ CMFN (hoc eſt, vt oſtendi ſupra, curua ſuperficies vtraque conorum CDF, & CEF) vt ED ad CD. Ergo ſuperficies ſphærica eſt ad vtramque conicam vt ED ad CD. Quare cùm demonſtratum ſupra iam ſit ſuperficiem Cylindricam portionis eſſe ad duo triangula DBC, EBC, vt ſuperficies ſphærica eſt ad vtramque conicam; etiam Cylindrica portionis ſuperficies erit ad duo triangula DBC, EBC, vt ED ad DC; hoc eſt vt quadrati diameter ad latus eiuſdem. Quod erat demonſtrandum.

Nota analogiam huius cum prop. 20. lib. 1. *Iſthic oſtenſum eſt rationem portionis ad pyramidem maximam eſſe duplam: hic verò oſtenditur rationem ſuperficiei Cylindricæ, portionis ad eam partem ſuperficiei pyramidis maximæ, quæ portionis Cylindricam ſuperficiem ſubtendit, eam eſſe, quæ eſt diametri quadrati ad latus, hoc eſt dimidiatam duplæ.*

Corollarium

Ex hoc theoremate (vide *fig.* 2. ſchematiſmo 1.) habetur quadratura ſuperficiei Cylindricæ, quæ peripheriâ ſemicirculari KCF & peripheriâ ſemiellipticâ FGK continetur. Dabit igitur circuli quadraturam qui reliquam quadrauerit Cylindricam ſuperficiem GFKBH.

PROPOSITIO XVIII.

Schematiſmus 4. Fig. 24.

Cylindri circularis recti portio DBCE, & ſphæra baſeos ſectæ ſint plano ſectioni portionis maximæ ABC parallelo, quod in portione faciat triangulum GHK, in ſphærâ circulum HILP.

Cylindrica ſuperficies DNKH, quæ lineis DOH, HK, KND continetur, eſt ad inſcriptum ſibi triangulum DKH, vt diameter baſeos DE eſt ad ſubtenſam HE.

Superficies autem Cylindrica HKBCME, ea nempe, quæ comprehenditur lineis KH, HCE, EMBK, eſt ad triangulum EKH ſibi inſcriptum, vt diameter DE ad DH ſubtenſam.

Primam partem ſic demonſtro.

SVperficies Cylindrica DNKH eſt ad ſuperficiem ſphæricam HODL, factam ab arcu HOD, circa DE circumacto, vt [a] BC ad peripheriam DCEF, ſiue ad peripheriam radij AC; hoc eſt vt [a] KH ad HILP peripheriam radij GH. Sed etiam [b] triangulum KHD eſt ad curuam ſuperficiem coni maximi HDL, portioni ſphæricæ inſcripti, vt KH ad peripheriam HILP (nam cùm angulus KHD rectus ſit, DH latus ipſum coni, erit altitudo trianguli KHD). Ergo curua ſuperficies DNKH eſt ad ſuperficiem ſphæricam HODL, vt triangulum KHD eſt ad curuam ſuperficiem coni HDL. Igitur permutando, Cylindrica ſuperficies DNHK eſt ad triangulum DKH, vt ſuperficies ſphærica HODQL eſt ad conicam HDL.

Ponatur deinde SH media proportionalis inter DH & GH. Igitur [c] circulus radij SH æquatur ſuperficiei conicæ HDL. Æquatur autem [d] & ſuperficies ſphærica HODQL, circulo radij DH. Ergo ſuperficies ſphærica HODQL eſt ad conicam HDL vt circulus radij DH ad circulum radij SH; hoc eſt in duplicata ratione DH ad SH; hoc eſt (quia DH, SH, HG ſunt continuè [e] proportionales) vt DH ad GH; hoc [f] eſt vt DE ad EH.

Quare cùm oſtenſum ſupra ſit Cylindricam ſuperficiem DNKH eſſe ad triangulum DKH, vt ſphærica ſuperficies HODQL eſt ad conicam; erit quoque Cylindrica ſuperficies DNKH ad triangulum ſibi inſcriptum DKH, vt DE diameter ad ſubtenſam EH. Quod erat demonſtrandum.

a Coroll. 1. p. 8 l. 2. huius. a 7. l. 1. huius.
b 2. l. 2. huius.
c Arch. l. 1. ſph. pro 14.
d Archim. l. 1 ſph. prop. 31.
e Per conſt.
f 8. Sexti elem.

Partem ſecundam ita demonſtrabimus.

TOta [g] portionis DBCE Cylindrica ſuperficies eſt ad totam ſuperficiem ſphæricam DCEF, vt BC ad circumferentiã DCEF. Pari modo ſegmenti GHKND Cylindrica ſuperficies DNKH eſt ad ſuperficiem ſphæricã HODQL, vt [h] BC ad peripheriam DCEF. Ergo & reliqua Cylindrica ſuperficies HKBCME eſt ad reliquam ſphæricam ſuperficiem HCEFL, vt BC ad circumferentiam DCEF; hoc eſt [i] vt KH ad circumferentiam HILP; hoc eſt [a] vt triangulum rectangulum KHE ad ſuperficiem conicam HEL. Igitur permutando, ſuperficies Cylindrica HKBCME eſt ad inſcriptum ſibi triangulum KHE, vt ſuperficies ſphærica HCEFL eſt ad inſcriptam ſibi conicam HEL. Eſt autem ſuperficies ſphærica HCEFL, par [b] circulo radij HE; conica verò HEL, par circulo, cuius radius eſt media proportionalis inter HE & HG, puta HV. Quare cùm circulus radij HE ad circulum radij HV ſit, vt HE, prima proportionalium HE, HV, HG eſt ad tertiam HG, etiam ſphærica ſuperficies HCEFL eſt ad conicam HEL, vt HE ad tertiam HG; hoc eſt [d] vt diameter DE ad ſubtenſam DH. Quare cùm Cylindrica HKBCME ſit ad triangulum EKH, vt ſphærica HCEFL ad conicam HEL; etiam Cylindrica HKBCME erit ad triangulum EKH, vt DE ad DH. Quod erat demonſtrandum.

g 8. l. 2 huius
h Coroll. 1. p. 8. l. 2. huius.
i 7. l. 1. huius.
a 2. l. 2. huius.
b Archim. l. 1 ſph. p. 32.
c Archim. l. 1. ſph. p. 14.
d 8. ſexti elem.

Corollarium.

Ex his datur quadratura ſegmentorum ſuperficiei Cylindricæ DNKH & HKBCME.

PROPOSITIO XIX.

Eſto Cylindri Elliptici recti portio CEDB per alterutrum axem CB, & E punctum in latere abſciſſa, altitudinem habens DE. Cylindrica portionis ſuperficies eſt ad duo triangula maxima ſibi inſcripta CED, BED, vt ſuperficies ſphæroïdis productæ à baſi BDC circa axem CB circumactâ, eſt ad duas maximas ſuperficies conicas ſibi inſcriptas DCP, & DBP.

Schematiſmus 4. Fig. 27.

CVrua ſuperficies portionis eſt ad ſuperficiem ſphæroïdicam productam à perimetro baſeos CDB circa CB reuolutæ, [a] vt ED altitudo portionis ad DRPQ circumferentiam circuli, cuius diameter DP. Atqui etiam triangulum EDC eſt ad ſuperficiem conicam DCP, [b] vt ED ad circumferentiam DRPQ (eſt enim angulus EDC rectus, ac proinde CD, ipſum coni latus, eſt altitudo trianguli EDC). Ergo ſuperficies curua portionis eſt ad ſu-

a 13 l. 2. huius.
b 2. l. 2. huius.

perficiem ſphæroïdeos, vt triangulum CED eſt ad conicam ſuperficiem DCP; hoc eſt vt duo triangula CED, BED ſunt ad duas conicas ſuperficies DCP, DBP. Igitur permutando, ſuperficies curua portionis eſt ad duo triangula CED, BED ſibi inſcripta, vt ſuperficies ſpheroïdeos ad duas conicas ſuperficies DCP, DBP ſibi inſcriptas. Quod erat demonſtrandum.

Confer cum demonſtratione prop. 26. l. 1. huius. Et nota analogiam inter portionis ſuperficiem ac ſoliditatem.

PROPOSITIO XX.

Schematiſmus 4. Fig. 28. Cylindri recti Elliptici portio CEDB, & ſphæroïs facta à baſi circa axem CB circumactâ, ſectæ ſint plano ſectioni portionis maximæ AED parallelo, quod in portione faciat triangulum FHG. In ſphæroide autem circulum QGNK.

Curua ſuperficies CLHG quæ lineis COG, GH, HLC continetur, eſt ad inſcriptum ſibi triangulum CHG, vt ſphæroïdica ſuperficies GOCK eſt ad maximam ſuperficiem conicam GCK ſibi inſcriptam.

Altera verò curuæ ſuperficiei pars GHEDMB, quæ lineis GH, HEMB, BDG comprehenditur, eſt ad inſcriptum ſibi triangulum BHG, vt reliqua ſphæroïdica ſuperficies GDBPK eſt ad maximam conicam ſuperficiem ſibi inſcriptam GBK.

Primam partem ſic oſtendo.

a Coroll. 1. p. 13. l. 2. huius. *b 7. l. 2. huius.* *c 2. l. 2. huius.*

CVrua ſuperficies CLHG eſt ad ſphæroidicam GOCK ſuperficiem, vt ED [a] ad peripheriam radij AD; hoc eſt vt HG ad [b] peripheriam QGNK; hoc eſt vt triangulum [c] rectangulum CGH ad ſuperficiem conicam GCK. Igitur permutando, curua ſuperficies CLHG eſt ad triangulum CGH ſibi inſcriptum, vt ſphæroïdica ſuperficies GOCK, ad conicam ſibi inſcriptam GCK. Quod erat demonſtrandum.

Secundam verò partem ita demonſtrabimus.

ELlipticæ portionis CEDB curua ſuperficies tota eſt ad ſuperficiem ſphæroïdeos factæ ab Ellipſi PCDB circa axem CB reuolutâ, vt ED portionis altitudo eſt ad peripheriam circuli, cuius diameter eſt axis alter DP; quemadmodum *prop. 13 libri huius* demonſtratum eſt. Per corollarium quoque primum eiuſdem propoſitionis ſuperficies curua CLHG eſt ad ſphæroïdicam ſuperficiem GOCK, vt ED ad peripheriam diametri DP. Ergo & reliqua ſuperficies curua GHEDMB eſt ad ſphæroïdicam reliquam GDBPK, vt ED ad peripheriam diametri DP; hoc eſt [d] vt HG ad peripheriam QGNK; hoc eſt vt [e] triangulum rectangulum HGB ad conicam ſuperficiem GBK. Igitur permutando, curua ſuperficies GHEDMB eſt ad triangulum ſibi inſcriptum HGB, vt ſphæroïdica ſuperficies GDBPK eſt ad inſcriptam ſibi conicam GBK. Quod erat demonſtrandum.

d 7. l. 1. huius. *e 2. l. 1. huius.*

Confer cum demonſtratione prop. 27. lib. 1. huius. Et nota analogiam.

PROPOSITIO XXI.

Schematiſmus 5. Fig. 33. Eſto Cylindri recti Parabolici aut Hyperbolici, ſiue ex cuiuſuis alterius figuræ planæ recto ductu procreati, portio CDHFB, per CD axem baſeos, & quoduis in latere punctum F abſciſſa.

Portionis curua ſuperficies, quæ lineis DKB, BF, FHD, continetur, eſt ad triangulum maximum DFB ſibi inſcriptum, vt ſuperficies conoïdeos Parabolicæ vel Hyperbolicæ, ſiue alterius

rotundi

rotundi ſolidi, quod fit à baſi BKDA, circa axem CD reuoluta, eſt ad curuam maximi coni BDA ſibi inſcripti ſuperficiem.

CVrua portionis ſuperficies eſt ad curuam ſuperficiem rotundi ſolidi, generati à baſi circa axem CD circumactâ, vt [a] FB portionis altitudo ad peripheriam circuli, cuius diameter AB; hoc eſt vt rectangulum [b] triangulum FBD ad conicam ſuperficiem BDA. Quare permutando, portionis curua ſuperficies eſt ad triangulum ſibi inſcriptum FBD, vt rotundi ſolidi curua ſuperficies eſt ad ſuperficiem conicam BDA ſibi inſcriptam. Quod erat demonſtrandum. a 14. l. 2. huius. b 2. l. 2. huius.

Hanc confer cum demonſtratione propoſ. 32. & 33. libri 1, huius & analogiam nota ſuperficiem inter ac ſoliditatem: quam itidem reperies in duabus ſequentibus.

PROPOSITIO XXII.

Eſto Cylindri parabolici aut hyperbolici, aut ex cuiuſuis alterius figuræ planæ axem habentis recto ductu procreati, portio CEDB, abſciſſa per E, punctum in latere, & per CB ordinatim applicatam ad baſeos axem AD: ſitque altitudo portionis DE. *Schematiſmus 8. Fig. 57.*

Erit nihilominus curua portionis ſuperficies ad duo maxima triangulà ſibi inſcripta CED, BED, vt ſuperficies rotundi ſolidi facti à baſi CDB circa CB circumactâ, ad duas conicas ſuperficies maximas DCP, DBP, rotundo ſolido inſcriptas.

POrtionis curua ſuperficies eſt ad [a] ſuperficiem ſolidi rotundi, quod fit à baſi CDB circumactâ circa CB, vt ED portionis altitudo ad peripheriam circuli, cuius radius AD; hoc eſt vt [b] rectangulum triangulum EDC ad conicam ſuperficiem DCP. Quare permutando, curua ſuperficies portionis eſt ad triangulum CED; vt ſuperficies rotundi ſolidi baſeos ad ſuperficiem conicam DCP. Ergo & portionis curua ſuperficies eſt ad duo triangula CED, BED ſibi inſcripta, vt rotundi ſolidi baſeos ſuperficies eſt ad duas conicas ſuperficies DCP, DBP ſibi inſcriptas. Quod erat demonſtrandum. a 15. l. 2. huius. b 2. l. 2. huius.

PROPOSITIO XXIII.

Iiſdem poſitis: tam portio, quàm ſolidum rotundum baſeos plano ſecentur ad maximam portionis ſectionem AED parallelo, quod in portione producat triangulum FHG, in ſolido rotundo baſeos circulum GNKQ. *Schematiſmus 8. Fig. 57.*

Curua ſuperficies CLHG, quæ lineis COG, GH, HLC continetur, eſt ad inſcriptum ſibi triangulum CHG, vt GOCK curua ſuperficies ſegmenti à rotundo ſolido abſciſſi, eſt ad curuam ſuperficiem maximi coni GCK, ſegmento inſcripti.

Reliqua item curua portionis ſuperficies GHEDMB eſt ad inſcriptum ſibi triangulum BHG, vt reliqua rotundi ſolidi ſuperficies GDBPK ad inſcriptam ſuperficiem coni maximi GBK.

DEmonſtrabitur eodem diſcurſu quo *prop. 20 huius libri*, niſi quod loco propoſitionis 13. *libri huius*, iſthic citatæ, hîc citanda & adhibenda ſit propoſitio 15.

PARS III.

PROPOSITIO XXIV.

Cylindrica ſuperficies portionis, à Cylindro circulari recto per punctum in latere & centrum baſeos abſciſſæ ſectionis maximæ quadrupla eſt.

Schematiſmus. 3. Fig. 22.

DAta ſit portio DBCE à Cylindro circulari recto abſciſſa, cuius maxima ſectio ſit triangulum ABC. Demonſtrandum eſt Cylindricam portionis ſuperficiem, maximæ ſectionis ABC quadruplam eſſe.

a 17. l. 2. huius.

Inſcribantur ſuperficiei Cylindricæ portionis duo trianguls maxima DBC, EBC. Cylindrica ſuperficies CBKD eſt ad triangulum DBC, vt [a] quadrati diameter ad latus, nempe vt ED ad DC. Sed triangulum DCB eſt ad triangulum ABC, vt DC ad AC, cùm eadem ſit vtriuſque altitudo BC. Ergo ex æquo ſuperficies Cylindrica CBKD eſt ad triangulum ABC, vt DE ad AC, vt diameter nempe ad ſemidiametrum. Superficies ergo CBKD, quę totius Cylindricæ ſuperficiei portionis eſt ſemiſſis, trianguli ABC dupla eſt. Quare tota portionis Cylindrica ſuperficies trianguli ABC quadrupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

En Cylindricæ portionis ſuperficiei quadraturam longè facillimam.

PROPOSITIO XXV.

Schematiſmus 5. Fig. 37.

Cylindrica ſuperficies portionis, à Cylindro circulari recto abſciſſæ, ad totam Cylindri ſuperficiem abſque baſibus, eam habet rationem, quam diameter circuli ad circumferentiam.

a 8. l. 2. huius.

DAta primò ſit portio CDFA, cuius altitudo AF par ſit diametro baſeos AB. Huius igitur portionis Cylindro AG ſphæra inſcribi poterit LMEN. Portionis CDFA Cylindrica ſuperficies eſt ad ſuperficiem ſphæræ baſeos, hoc eſt ad ſuperficiem ſphæræ LEMN, vt AF ad circumferentiam ACBD; quemadmodum ſupra [a] demonſtratum eſt. Superficies autem ſphæræ LMEN, quia Cylindricæ ſuperficiei AG ipſam ambienti æqualis eſt (vt patet ex Archimedis *manifeſto 6 lib. 1. de ſph.*) eſt ad ſuperficiem Cylindricam AG vt circumferentia ACBD ad ſeipſam. Igitur ex æquo ſuperficies portionis CDFA eſt ad Cylindricam AG, vt FA; hoc eſt ex hyp. vt diameter AB ad circumferentiam ACBD. Quod erat demonſtrandum.

b 16. l. 2. huius.

Detur deinde portio cuiuſuis altitudinis CDEA, à Cylindro HA abſciſſa. Superficies Cylindricæ portionum CDEA, CDFA, ſunt inter ſe [b] vt altitudines EA, FA. Quare cùm Cylindricæ ſuperficies AH, AG etiam ſint inter ſe vt altitudines EA, FA, erunt hæ ſuperficiebus portionum proportionales. Cùm igitur ſuperficies portionis CDFA ſit ad ſuperficiem Cylindricam AG, vt diameter circuli ad circumferentiam, ſuperficies quoque portionis CDEA, erit ad Cylindricam AH, vt diameter circuli ad circumferentiam.

Nota analogiam huius cum propoſ. 40. lib. 1. iſthìc enim oſtenſum eſt portionem eſſe ad Cylindrum ſuum vt duæ tertiæ diametri ad circumferentiam, hìc verò demonſtratur Cylindricam portionis ſuperficiem eſſe ad Cylindri ſui ſuperficiem, vt diameter ad circumferentiam.

Corollarium.

Si igitur in rectis lineis exhibita fuerit ratio ſuperficiei Cylindricæ portionem cingentis ad Cylindri, de quo ſumpta eſt portio, ſuperficiem abſque baſibus; habebitur quadratura circuli.

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

Data ſit Cylindri circularis recti portio DBCE per latus & centrum baſeos abſciſſa, cuius altitudo BC; ſectio maxima ABC. *Schematiſmus 6.*
In baſi ducatur HL parallela diametro DE, ſecans AC in P. Ex P ducatur SP parallela ad AB, occurrens BC in S. Per HSL ducto plano abſcindatur portio HSCL. *Fig. 42. 43.*

Cylindrica ſuperficies portionis DBCE eſt ad Cylindricam ſuperficiem portionis HSCL, vt ſuperficies ſphæræ à ſemicirculo DCE productæ, ad ſuperficiem ſphærici ſolidi, quod fit à ſegmento circulari HCL circa HL in orbem ducto.

SVperficies Cylindrica, ſiue curua portionis DBCE eſt ad ſuperficiem ſphæræ à baſi DCE generatæ, vt [a] BC ad circumferentiam DCEY, cuius radius eſt AC. Pari modo curua ſuperficies portionis HSCL eſt ad ſuperficiem ſphærici ſolidi facti ex ſegmento HCL, circa HL in orbem ducto, vt [a] portionis HSCL altitudo SC, ad circumferentiam circuli, cuius radius PC. Deinde, quia SP, AB, æquidiſtant, erit BC ad SC, vt AC ad PC; hoc eſt vt circumferentia [b] radij AC ad circumferentiam radij PC. Igitur permutatim, BC eſt ad circumferentiam radij AC, vt SC ad circumferentiam radij PC. Quare etiam ſuperficies curua portionis DBCE eſt ad ſuperficiem ſphæræ baſeos DCE, vt curua ſuperficies portionis HSCL ad ſuperficiem ſphærici ſolidi à plano HCL producti. Permutando igitur habetur propoſitum.

a 8. l. 2. huius. *a 15. l. 2. huius.* *b Pappus l. 5. p. 42.*

Notetur inſignis analogia huius cum prop. 46. lib. 1. quod enim iſthic de ſoliditate, hic de ſuperficie portionis oſtenſum eſt.

Corollarium.

Propoſitio vera eſt in omni portione, ſiue ex Cylindro circulari, Elliptico, parabolico, hyperbolico, ſiue alio quocumque deſumpta ſit. Sed in demonſtratione loco propoſitionis *8 l. 2. huius*, citandæ erunt 13, 14, 15 *eiuſdem libri*. Reliqua omnis demonſtratio eadem.
Nota rurſus analogiam cum Corollario 46. lib. 1.

PROPOSITIO XXVII.

Cylindrici circularis recti portio DBCE per latus & A centrum baſeos abſciſſa, ſit diuiſa plano GFT, baſi DCE parallelo. *Schematiſmus 6. Fig. 42. 43.*

Cylindrica portionis DBCE ſuperficies eſt ad Cylindricam ſuperficiem ſegmenti GBFT, vt ſuperficies ſphæræ baſeos DCE ad ſuperficiem ſphærici ſolidi, quod fit à ſegmento circulari GFT, circa GT in orbem ducto.

SIt ABC maxima portionis ſectio, & BC altitudo portionis. Per GT fiat ſectio GHLT recta baſi DCE, faciens in ea ſectionem communem HL, quæ occurrat ipſi AC in P. Ex P ducatur PS parallela ad AB, ductoque per HSL plano, abſcindatur portio HSCL. Erit HL parallela ad DE, & CS æqualis FB, & ſegmenta circularia HCL, GFT æqualia (quæ omnia demonſtrata ſunt *prop. 47. lib. 1. huius*) AC proinde portionum HSCL, GBFT curuæ [a] ſuperficies ſunt æquales. Et quia HL parallela eſt DE, & PS parallela ad AB; erit portio HSCL ipſa illa, de qua in *præcedenti* actum eſt. Per eandem igitur propoſitionem, erit ſuperficies curua portionis DBCE ad ſuperficiem curuam portionis HSCL; hoc eſt, vt iam demonſtrauimus, ad ſuperficiem curuam portionis GBFT, vt ſuperficies ſphæræ baſeos DCE ad ſuperficiem ſphærici ſolidi facti à ſegmento HCL, hoc eſt, per iam demonſtrata facti à ſegmento GFT. Quod erat demonſtrandum. *a 16. l. 2. huius*

Notetur mirabilis analogia huius cum p. 47. libri 1.

PROPOSITIO XXVIII.

Schematiſmus 6. Fig. 42. 43. Iiſdem poſitis, quæ totâ præcedenti; ducantur DH, DL. Superficies Cylindrica HGBTL (quam nimirum à totius portionis DBCE Cylindricâ ſuperficie aufert planum HGTL) eſt ad Cylindricam ſuperficiem GBFT, vt differentia ſuperficierum ſphæricarum, quarum diametri DH, DL, eſt ad ſuperficiem ſphærici ſolidi producti à ſegmento circulari HCL circa HL, in orbem ducto.

a Coroll. 3. p. 12. l. 2. huius. b Præced. SVperficies Cylindrica HGBTL eſt ad ſuperficiem curuam totam DBCE, vt [a] differentia ſuperficierum ſphæricarum, quarum diametri DH, DL, ad ſuperficiem ſphæricam diametri DE. Superficies autem curua DBCE eſt ad ſuperficiem curuam GBFT, vt [b] ſphærica ſuperficies diametri DE eſt ad ſuperficiem rotundi ſolidi, quod fit à plano GFT, circa GT; hoc eſt à plano HCL, circa HL in orbem ducto. Ergo ex æquali ſuperficies Cylindrica HGBTL eſt ad ſuperficiem Cylindricam GBFT, vt differentia ſphæricarum ſuperficierum, quarum diametri DH, DL eſt ad ſuperficiem ſolidi facti à ſegmento HCL, circa HL in orbem ducto. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIX.

Schematiſmus 6. Fig. 42. Data ſit portio DBCE à Cylindro circulari recto per latus & baſeos centrum abſciſſa, altitudinem habens CB; quæ diuidatur plano GFT baſi DCE parallelo.

Si quadretur Cylindrica ſuperficies GBFT; aut eius proportio ad totam ſuperficiem DBCE innoteſcat, dabitur quadratura circuli.

DVcatur HL parallela ad DE, auferens à peripheriâ DCEY arcum HCL peripheriæ commenſurabilem. Per HL fiat ſectio HGTL, recta ad baſim DCE. Erit GT parallela ad HL. Per GT fiat ſectio GFT parallela baſi. Quoniam quadrata eſt tam [c] ſuperficies *c 17. & 24. l. 2. huius. d 18. l. 2. huius.* DBCE, quàm ſuperficies [d] DGH, & ETL; etiam reliqua ſuperficies HGBTL quadrata eſt. Quare ſi quadretur etiam ſuperficies GBFT, reliqua HCLTFG quadrabitur. Atqui hæc pars eſt ſuperficiei Cylindricæ, cuius baſis eſt DCEY, altitudo CF; & quidem nota pars, cùm ſuperficies HCLTFG ſit ad totam Cylindri ſuperficiem curuam vt arcus HCL ad commenſurabilem ſibi ex conſt. peripheriam DCEY. Ergo quadrabitur etiam tota Cylindri dicti curua ſuperficies. Quæ cùm ad circulum [a] reducta iam ſit, ipſe etiam circulus *a Ab Archimede.* quadrabitur.

Quod ſi innoteſcat ſaltem ratio ſuperficiei GBFT ad ſuperficiem DBCE. Quoniam quadrata eſt DBCE, quadrabitur etiam GBFT: vnde rurſum quadratura circuli, vt iam demonſtrauimus.

Hanc confer cum 51. lib. 2. & miram obſerua inter portionum ſoliditatem, ac ſuperficiem analogiam.

PROPOSITIO XXX.

Schematiſmus 6. Fig. 42. 43. Si innoteſcat ratio, quam habet ſuperficies ſphærici ſolidi, facti à circulari ſegmento aliquo HCL, circa chordam ſuam HL in orbem ducto ad ſuperficiem ſphæræ, dabitur quadratura circuli.

POnantur eadem, quæ præcedenti propoſitione. Superficies ſphærica diametri DE eſt ad ſuperficiem ſphærici ſolidi facti à plano HCL, ſiue GFT, vt curua [b] portionis ſuperficies *b 27. l. 2. huius.* DBCE eſt ad curuam ſuperficiem GBFT. Quare ſi innoteſcat ratio ſuperficiei ſphæricæ diametri

diametri DE ad ſuperficiem ſolidi facti ex HCL, etiam innoteſcet ratio ſuperficiei DBCE ad ſuperficiem GBFT: quâ cognitâ, habetur quadratura circuli, vt oſtenſum eſt *prop. præcedenti.*

Confer cum 52. lib. 1. & mirabilis notetur inter vtriuſque analogia.

PROPOSITIO XXXI.

Si innoteſcat quam rationem habeat ſuperficies ſolidi ſphærici facti à ſegmento aliquo circulari GFT, circa chordam ſuam GT in orbem ducto, ad ſuperficiem conicam ſibi inſcriptam, dabitur quadratura circuli. *Schematiſmus 6. Fig. 42. 43.*

POnantur eadem, quæ io præcedentibus, & plani GFT ac maximæ ſectionis ABC communis ſectio ſit KF. Ducantur rectæ GF, TF, & GB, TB. Deinde ſegmentum GOFT cum triangulo GFT in orbem ducatur circa GT. Inſcribentur ſphæricali ſolido duo coni recti oppoſiti, communem habentes baſim. Demonſtratum eſt [a] curuam ſuperficiem GBFT eſſe ad duo maxima triangula ſibi inſcripta GBF, & TBF, vt ſuperficies ſolidi facti à plano GOFT, circa GT circumacto, ad ſuperficies conicas à rectis GF, TF productas. Quare ſi innoteſcat ratio ſuperficiei rotundi ſolidi ad ſuperficiem conicam ſibi inſcriptam, etiam innoteſcet ratio ſuperficiei GBFT ad duo inſcripta triangula GBF, TBF: adeóque ſuperficies GBFT quadrabitur. Atque inde [b] ipſius circuli dabitur quadratura.

Notetur etiam hic in portionibus, ſoliditatum ac ſuperficierum analogia ex hac & 53. lib. 1.

[a] 22. l. 2. *huius.*
[b] 29. l. 2. *huius.*

FINIS LIBRI SECVNDI.

CYLINDRICORVM
ET
ANNVLARIVM
LIBER TERTIVS.

Hic tandem aggredior potiſſimam operis huius partem, annularia nimirum corpora non circularia tantùm, ſed Elliptica etiam, Parabolica, Hyperbolica, imò ex figuræ cuiuſuis planæ circulari ductu procreata. Hæc præcipuè conatus iſte noſter ſpectauit; atque horum maximè gratiâ priores libros conſcripſi. Quod enim portio per latus & baſis diametrum abſciſſa eſt in Cylindro, hoc in circulari annulo ſphæra genitoris circuli, in Elliptico, genitricis Ellipſeos, ſpheroïs in Parabolico & Hyperbolico, Parabolæ aut Hyperbolæ genitricis conoïs eſt.

DEFINITIONES
AD DVOS SEQVENTES LIBROS.

Schematiſmus 8. Fig. 58. 59.60. 61.62. 63.64. 65.66.
1. ESto figura quæuis plana CKB, axem habens EK, & ſubtenſam CB, ordinatim axi applicatam. In ſubtenſâ ſumatur punctum aliquod A, quod vel extra figuram ſit in ſubtenſâ productâ, vel in ipſo figuræ perimetro. Deinde puncto A immoto permanente, figura CKB in orbem circumducatur, ſic vt recta ABC in vno feratur plano, & figura, dum circumducitur, ſibi ipſi maneat parallela, ſolidum, quod à figurâ CKB ſic in orbem ductâ, deſcribitur, *Annulum* voco.

Schematiſmus 8. Fig. 59. 61.63. 65.
2. *Annulus clauſus* eſt, cùm punctum immobile (A) in ipſo perimetro figuræ ſtatuitur. Eiuſmodi repræſentant figuræ 59.61.63.65.

3. *Annulus patens*, cùm immobile punctum (A) eſt extra figuram in ſubtenſa productâ. Exhibentur figuris 58.60.62.64.66.

4. *Figuram genitricem* voco CKB, quæ in orbem ducta annulum fecit.

Fig. 58. 60.62. 64.66.
5. *Polus annuli*, ſiue *centrum*, eſt punctum A, quod manſit immobile.

6. *Latitudo*, ſeu *ſpiſſitudo annuli* eſt BC, ipſa nimirum ſubtenſa.

7. *Punctum medium figuræ* eſt E, in quo figuræ genitricis axis KE ſecat ſubtenſam, ſeu latitudinem CB bifariam.

Fig. 58. 59.60. 61.62. 63.64. 65.66.
8. *Diameter reuolutionis* eſt recta AE polum annuli cum puncto medio connectens.

9. *Peripheria annuli media* eſt ED, quam punctum medium E in reuolutione deſcribit.

Nota: In annulo clauſo quem circulus genuit, peripheria media æqualis eſt peripheriæ genitrici.

10. *Peripheria annuli maxima* eſt CH, quæ in reuolutione fit ab extremo ſubtenſæ puncto C.

Fig. 58. 60.62. 64.66.
11. In patente annulo *peripheria minima* eſt BG, quæ deſcribitur ab alterâ latitudinis, ſeu ſubtenſæ extremitate B, inter polum A & medium E punctum conſtituta.

12. *Maxima annuli patentis ſectio per polum facta*, eſt planus [a] annulus, quem in reuolutione deſcribit ſubtenſa CB, maximâ & minimâ peripheriâ comprehenſus.

[a] Vide defin. 25. ante l. 1. huius.

13. *Maxima per polum clauſi annuli ſectio* circulus eſt, cuius radius eſt annuli latitudo CB.

14. *Maxi-*

14. *Maxima annuli ſectio per figuræ genitricis axem* KF, eſt Cylindrica ſuperficies in reuolu- *Fig.* 59.
tione ab axe KE genita. 61.63.

15. *Annuli pars exterior* ea eſt, quæ ab genitricis figuræ exteriori ſemiſſe EKC procreatur. 65.

16. *Pars interior* quæ gignitur à figuræ genitricis ſemiſſe interiori EKB. *Fig.* 58.

17. *Superficies annularis exterior* ea eſt, quam genitoris perimetri exterior ſemiſſis CK pro- 59.60.
ducit. 61.62.

18. *Superficies annularis interior* eſt, quæ producitur à genitoris perimetri ſemiſſe interio- 63.64,
ri BK. 65.66.

Porro annuli à figuris genitricibus ſpeciem ac denominationem ſumunt.

19. Itaque *Circularis annulus* eſt, quem circulus, *Ellipticus*, quem Ellipſis; *Parabolicus*, quem Parabola; *Hyperbolicus* quem Hyperbola genuit, & ſic de cæteris.

Rurſus quemadmodum ſphæroidium aliæ longæ ſunt, aliæ latæ; ita & annulorum ab Ellipſibus genitorum alij longi ſunt, lati alij.

20. *Annulus Ellipticus longus* eſt, qui fit ab Ellipſi ita poſitâ, vt maior eius axis KF ſit re- *Schema-*
uolutionis diametro AE perpendicularis. *tiſmus* 8.

21. *Annulus Ellipticus latus* eſt, qui gignitur ab Ellipſi itâ poſitâ, vt minor eius axis KF dia- *Fig.* 62.
metro reuolutionis perpendiculariter inſiſtat. 63.

22. Quemadmodum in Annulis ita & in Cylindris peripheriæ mediæ reperiuntur. *Mediam* *Fig.* 60.
igitur *in Cylindro integro peripheriam* eam voco, quæ centro baſeos per medium radij punctum 61.
deſcribitur.

In cauo autem Cylindro *Peripheriam mediam* voco, quæ centro A deſcripta, biſecat CB la- *Schema-*
titudinem planl annuli, qui caui Cylindri baſis eſt. *tiſmus* 9.
Fig. 69.

S Y N O P S I S
LIBRI TERTII.

P A R S I.

ANnulorum tum ad Cylindros, tum ad inuicem comparatorum multiplices proprietates demontirantur.

In primis autem hæ. Omnis annulus (hoc eſt à quâuis planâ figurâ genitus; atque ita ſemper inrellige) ad Cylindrum, ſuper figurâ genitrice erectum, eam habet rarionem, quam peripheria annuli media ad Cylindri altitudinem: & omnis patens annulus ſibi contigui annuli æquè craſſi, & ab æquali figurâ geniti, triplus
eſt. Et ſi [a] quotcumque fuerint æquè craſſi contigui annuli, ab æqualibus figuris geniti, a *Vide fig.*
quorum primus clauſus ſit, eam inter ſe rationem habent, quam ſeries numerorum impa- 79.
rium ab vnitate: & clauſi annuli, à ſimilibus figuris geniti, triplicatam habent ſuarum lati- *Schema-*
tudinum (AB, [b] AC) rarionem: & clauſus [c] annulus quotcumque annulos contiguos ab æ- *tiſmi* 11.
qualibus & ſimilibus figuris genitos complectens, eorum aggregatum toties continet, quot b *Vide fig.*
contigui erant annuli. Reliqua libri decurſus dabit. 10.
Schema-
tiſmi 11.
c *Vide fig.*
79.

P A R S II.

ANnulorum ſegmenta, planis ad reuolutionis diametrum rectis abſciſſa, cum ſemiſſis Cylindricæ ſegmentis, etiam planis ad baſim rectis diuiſæ, comparantur.

P A R S III.

a *Def.* 15.
l. 3. *huius.*
b *Def.* 16.
l. 3 *huius.*

ANnulorum exteriores partes [a] conferuntur cum [b] interioribus. Et quidem circularis c *Vide*
annuli pars exterior excedit interiorem genitoris circuli ſphærâ bis ſumptâ. *Schema-*
Vniuerſim autem annulorum à quibuſuis figuris planis genitorum pars exterior interio- *tiſmum* 13
rem ſuperat rotundo ſolido bis ſumpto, quod fit à genitrice figurâ circa axem ſuum [c] FD, *Fig.* 89.
qui reuolutionis diametro AD perpendiculariter inſiſtit, circumactâ. Quod ſi à circularis 90.91.
annuli 92.

fegmenta SE-
erius genitum à

S C iametri partes,
& omnis El-
longam, ad
itudinis annu-
s patens Elli-
Ad hæc clau-
nulus autem
rm ex ratio-
rione 16 ad
dem qui par-
rit, is circuli

fig. 67



utem la-
entia B-
G.
ltitudo



ucatur A-
ulum da-
Atqui re-
planum

medium
d quod
E F, fiue

ulorum

A

axem
nimi-
bitur.
pfum
it; al-

ralle-

Google

Parallelepipedum eſt ad cauum Cylindrum, vt altitudo CK ad peripheriam mediam DZ.

ACcipiatur BK pro baſi ipſius KN parallelepipedi. Tunc parallelepipedi altitudo erit CG, eadem nimirum quæ Cylindri caui. Ergo parallelepipedum CN erit ad Cylindrum cauum, vt [b] baſis ad baſim, hoc eſt vt rectangulum BK ad planum annulum BCZ; hoc eſt b 6.l.1.huius.
vt altitudo CK, [c] ad peripheriam DZ. Ergo parallelepipedum CN eſt ad cauum Cylindrum, vt CK altitudo ad peripheriam mediam DZ. Quod erat demonſtrandum. c 1.l.3. huius.

Corollarium.

Similiter parallelepipedum, cuius baſis eſt rectangulum deſcribens Cylindrum, eſt ad Cylindrum, vt parallelepipedi altitudo ad peripheriam mediam Cylindri.

PROPOSITIO III.

Annulare ſolidum inſcriptionibus Cylindricorum corporum exhauritur.

Schematiſmus 9. Fig. 71.

ESto quoduis annulare ſolidum genitum à figurâ DEC; centrum ſit A; craſſities DC; peripheria media $B\lambda$, axis figuræ genitricis EB.

Aſſignetur ſolidum ζ quantumuis paruum, clarum eſt ſuper annulo plano latitudinis DC fieri poſſe cauum Cylindrum minorem ſolido ζ. Sit huius Cylindri altitudo ψ. Diuidatur axis BE in tot partes æquales $B\gamma, \gamma\pi, \pi\varrho, \varrho\varepsilon$; donec vna particula $B\gamma$ ſit minor altitudine Cylindri ψ. Erit ergo Cylindrus cauus ſuper annulo latitudinis DC erectus, altitudinem habens $B\gamma$, minor Cylindro cauo priori, altitudinis ψ, ac proinde multò minor ſolido dato ζ. Per diuiſionum puncta γ, π, ϱ, ductis lineis ad DC parallelis inſcribantur, & conſcribantur figuræ genitrici rectangula. hæc ſi vnà cum figurâ genitrice, ſupra datum planum perpendiculariter erectâ, centro A in orbem ducantur, ſic vt ſemper maneant dato plano perpendicularia; ſolido annulari inſcribent, & conſcribent Cylindros cauos ſupra inuicem poſitos: eritque inſcriptorum, ac conſcriptorum corporum differentia par Cylindro, quem deſcripſit rectangulum $D\varphi VC$, quod ſic oſtendo.

Rectæ KSG, LM protrahantur in y & Z, item IQH, RN, in X & ω. Conſtat Cylindros cauos à rectangulis KM, $Z\omega$ centro A deſcriptos, æquari; nam altitudines $E\varrho\gamma B$ per conſt. ſunt pares, item Cylindri vnius baſis, annulus nempe planus à rectâ SM deſcriptus, æquatur annulo plano deſcripto per æqualem ipſi SM rectam y Z, qui baſis eſt Cylindri alterius caui.

Pari ratione demonſtrabitur Cylindros cauos à rectangulis IG, θH, φF, MN, NP, PC genitos, æquari Cylindris cauis, quos produxerunt rectangula $\omega\kappa$, HF, OD, YZ, Pω, Vβ. Caui igitur Cylindri à dictis rectangulis KM, IG, θH, φF, MN, NP, CP deſcripti, ſimul ſumpti, hoc eſt ipſa inſcriptorum, ac conſcriptorum differentia, æquantur Cylindro cauo, deſcripto à rectangulo $D\varphi VC$. Atqui Cylindrus cauus deſcriptus à rectangulo $D\varphi VC$ ſupra oſtenſus eſt minor eſſe ſolido ζ. Igitur inſcriptorum ac conſcriptorum corporum differentia etiam minor eſt quàm ζ. Multò igitur magis ipſius annularis ſolidi, & inſcriptorum ſibi corporum differentia, erit dato ſolido ζ minor; hoc eſt annulare ſolidum per inſcripta ſibi corpora [a] exhauritur. Quod erat demonſtrandum. a Deſin. 2.l.1. huius.

Demonſtratio in clauſis aunulis hoc ſolum habet diuerſum, quod ſolidum ab infimo rectangulo genitrici figuræ conſcripto productum, Cylindrus ſit integer.

PROPOSITIO IV.

Cylindrus ex cuiuſuis planæ figuræ recto ductu procreatus, per inſcripta ſolida exhauritur.

CYlindri baſis eſto figura quæuis DEC, cuius axis BE, altitudo $C\delta$: ad axem ordinatim poſita ſit DC; & ſolidum quantumuis paruum ſit ζ. Manifeſtum eſt exhiberi poſſe *Schematiſmus 9.*
parallelepipedum altitudinis $C\delta$, quod minus ſit ſolido ζ. Huius parallelepipedi baſis eſto re- *Fig. 72.*
ctangulum ξ. Axis BE diuidatur in tot æquales partes donec vna $B\gamma$ cum DC faciat rectangulum

titudinis
s quàm
criban-
ſcripta,
rentias
er dif-
C∂ ſu-
?. At-
n alti-
nſcri-
ipto-
r in-

nte
alis
tu-

ſiue
qui
BS.
par

guræ
ucan-
baſes
nc ſu-
is in-

riphe-
tro A
tu de-
æ me-
ngulo
ri dati
o in-
,quod

tos æ-
mnes
ro in-
lelepi-
annu-
is erit.

erque
ctio e-
figuræ
ta, par
drum
tudine
ectan-
gulo

gulo (quod ſectio Cylindri eſt) contento ſub yM & peripheriâ à puncto H in reuolutione deſcriptâ, hoc eſt contento ſub yM, & peripheriâ mediâ BS; hoc eſt ex hypotheſi ſub yM, & CR Cylindri altitudine. Igitur ſectio ſolidi annuli dati, & Cylindri ſectio æquales ſunt. Quod cùm ſemper eueniat; ex heterogeneorum regula ſolidus annulus Cylindro æqualis erit. Quod erat propoſitum.

Aliter.

In figurâ genitrice ducantur rectæ IK, PL parallela ad axem EB, & æqualiter ab eo remotæ, ac proinde inter ſe æquales. Hæ cum figurâ genitrice in orbem ductæ, deſcribent intra annulum Cylindricas ſuperficies rectas: ea, quam deſcribit IK, æquatur [b] rectangulo contento ſub IK, & peripheria radij AK: quam facit PL, æquatur rectangulo ex PL, & peripheriâ radij AL. Quare cùm peripheriæ radiorum AK, AL, ſimul ſumptæ, duplæ ſint peripheriæ mediæ BS; ac proinde & rectangula ex IK, & peripheria radij AK, ex PL, & peripheriâ radij AL, ſimul ſumpta, rectanguli ex IK, ſiue PL, & peripheriâ mediâ BS ſint dupla, etiam Cylindricæ ſuperficies à rectis IK, PL factæ, erunt duplæ rectanguli ex IK, ſeu PL & peripheriâ BS; hoc eſt (quia ex hypot. peripheria media BS æquatur altitudini Cylindri CR) æquales erunt duobus rectangulis, quæ producuntur intra Cylindrum, factâ ſectionibus per eaſdem lineas IK, PL, ad baſim rectis. Quare cùm hoc ſemper contingat; ex heterogeneorum regulâ annulus Cylindro æqualis erit. Quod erat propoſitum. b 4. l. 2. huius.

PROPOSITIO VI.

Omnis annulus à quacumque planâ figurâ (DEC) procreatus, axem (EB) habente reuolutionis diametro (DA) perpendicularem, eſt ad Cylindrum DT, cuius baſis eſt figura eadem (DEC) vt media annuli peripheria (BS) ad Cylindri altitudinem (BZ, ſiue CT.) *Schematiſmus 10 Fig. 73. 74. 75.*

INtelligatur ſuper eâdem baſi Cylindrus DR altitudinem habens CR, mediæ peripheriæ BS æqualem. Cylindrus DT eſt ad Cylindrum DR, vt CT ad CR. Quare cùm Cylindrus DR par ſit [a] annulo, & ex hypotheſi CR ſit par peripheriæ mediæ BS; erit quoque Cylindrus DT ad annulum, vt CT ad BS peripheriam mediam. Quod erat demonſtrandum. a *Præced.*

Hoc Theorema independenter à præcedenti per iuſcriptiones cauorum Cylindrorum etiam poterat demonſtrari.

PROPOSITIO VII.

Si figura genitrix cuiuſcumque annuli ſit ad baſim cuiuſuis Cylindri, vt reciprocè Cylindri altitudo eſt ad peripheriam annuli mediam: annulus Cylindro æqualis eſt. Et è conuerſo.

SVper figurâ genitrice intelligatur Cylindrus (quem vocemus Z), altitudinem habens peripheriæ mediæ parem. Quia Cylindrus Z, & Cylindrus datus habent baſes & altitudines reciprocè proportionales, erit Cylindrus datus par [b] Cylindro Z, hoc eſt [c] annulo dato. Quod erat propoſitum. Similis eſt demonſtratio conuerſæ. b 11. *Elem.* 12. c 5. l 3. *huius.*

PROPOSITIO VIII.

Omnis annulus ad omnem Cylindrum rationem habet compoſitam ex ratione figuræ genitricis ad baſim Cylindri, & ex ratione peripheriæ mediæ ad Cylindri altitudinem.

SVper figurâ genitrice intelligatur Cylindrus (quem vocemus Z) in altitudine peripheriæ mediæ. Habebit Cylindrus Z ad datum Cylindrum, rationem compoſitam ex ratione altitudinis ſuæ (hoc eſt peripheriæ mediæ) ad altitudinem alterius, & ex ratione ſuæ baſeos,

[illegible] Google

proinde cùm CE ponatur par aut minor BO; anoulus BON eſt par, aut minor anoulo CEK: quod eſt abſurdum, cùm oſtenſus etiam ſit eſſe maior.

Demonſtratio conuerſæ fiet ex primâ parte per reductionem ad impoſſibile.

Lemma.

Dentur rationes maioris inæqualitatis AB ad CB, & DE ad FE. Sitque ratio AB ad CB compoſita ex ratione DE ad FE, & ex ratione CB, ad AB. *Schematiſmus 11 Fig. 77.*

Dico rationem DE ad FE duplicatam eſſe rationis AB ad CB.

Fiat vt CB ad AB, ſic FE ad GE. Ratio DE, ad GE componitur ex ratione DE, ad FE, & ex ratione FE ad GE; hoc eſt per conſtructionem CB, ad AB. Sed ex hypotheſi ratio AB, ad CB componitur ex iiſdem rationibus. Ergo rationes DE ad GE, & AB, ad CB ſunt æquales. Quare cùm per conſtructiooem rationes GE ad FE, & AB, ad CB, etiam æquales ſint; patet rationem DE ad FE duplicatam eſſe rationis AB ad CB.

PROPOSITIO XII.

Omnes annuli à ſimilibus figuris geniti, quorum diametri reuolutionum duplicatam habent rationem latitudinum ſumptarum reciprocè, ſunt æquales. Et è conuerſo.

Annulorum latitudines ſint BO, & CE; reuolutionum diametri PA, QA. *Schematiſmus 11 Fig. 77.*

Si ratio PA ad QA eſt duplicata rationis CE ad BO, anouli æquales erunt: & ſi annuli æquales ſunt, erit ratio PA ad QA, duplicata rationis CE ad BO.

Quoniam ratio PA ad QA ponitur duplicata rationis CE ad BO, erit ratio CE ad BO compoſita [a] ex ratione PA, ad QA, & ratione BO ad CE. Sed ratio ſectionis maximæ BON, ad ſectionem maximam CEK, componitur ex iiſdem [b] rationibus. Ergo ratio CE ad BO æquatur rationi ſectionis maximæ BON, ad ſectionem maximam CEK. Ergo dati annuli [c] æquales ſunt. Quod erat demonſtr.

a Per lemma inferius
b Demonſtr præced.
c Præced.

Demonſtratio conuerſæ deducetur ex prima parte per reductionem ad impoſſibile.

Lemma.

Sit ratio DE ad FE, duplicata rationis AB ad CB. Dico rationem AB ad CB componi ex ratione DE ad FE, & ratione CB ad AB. *Schematiſmus 11 Fig. 77.*

Fiat vt AB, ad CB, ſic DE, ad GE.

Quoniam ratio DE, ad FE, ponitur duplicata rationis AB ad CB, eſtque per conſt. ratio DE ad GE par rationi AB, ad CB; etiam ratio GE ad FE rationi AB ad CB, æqualis erit. Sed ratio GE ad FE componitur ex ratione GE ad DE, (hoc eſt ratione [a] CB ad AB) & ex ratione DE ad FE. Ergo etiam ratio AB ad CB, componitur ex ratione CB, ad AB, & ratione DE, ad FE. Quod erat demonſt.

a Per conſtr.

PROPOSITIO XIII.

Omnes annuli rationem inter ſe habent compoſitam ex ratione diametrorum reuolutionis (PA, QA,) & ex ratione figurarum genitricum (BFO, CGE.) *Schematiſmus 11 Fig. 77.*

Super figuris genitricibus BFO, & CGE erecti intelligantur Cylindri altitudinem habentes parem peripherijs medijs PN, QK, erunt hi annulis [b] æquales. Quare cùm horum Cylindrorum ratio compoſita ſit ex ratione baſium, nempe ex ratione BFO, ad CGE; & ex ratione altitudinum, hoc eſt ratione peripheriæ PN, ad peripheriam QK, hoc eſt, [c] ratione PA, ad

b 5. l. 3. huius.
c Pappus l. 5. p. 41.

ad QA; etiam ratio annulorum ex iiſdem rationibus BFO, ad CGE, & PA ad QA, compoſita erit. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIV.

Schematiſmus 11 *Fig.* 77.

Omnes annuli à ſimilibus figuris geniti rationem inter ſe habent compoſitam ex ratione latitudinum (BO, CE) & ſectionum per polos maximarum (BON, CEK.)

d defin. 12. *&* 13. *l.* 3. *huius.* *a Oſtenſum* 11. *l.* 3. *huius.* *b Praced.*

RAtio plani BON, ad planum annulum CEK compoſita [a] eſt ex ratione PA, ad QA, & ratione BO, ad CE. Ergo ratio quæ componitur ex rationibus BON ad CEK, & BO, ad CE eadem eſt cum eâ, quæ compoſita eſt ex ratione PA ad QA, & ratione BO, ad CE, bis, ſiue duplicatâ. Sed quoniam ex hyp. figuræ genitrices BFO, CGE, ſimiles ſunt, ratio BFO, ad CGE eſt duplicata rationis BO, ad CE. Ergo ratio compoſita ex rationibus BON, ad CEK, & BO, ad CE, eadem eſt eum compoſita ex rationibus PA, ad QA, & BFO ad CGE. Atqui ratio datorum annulorum compoſita eſt ex ratione [b] PA ad QA, & ratione BFO, ad CGE. Ergo ratio annulorum datorum etiam eſt compoſita ex ratione BO ad CE, & BON ad CEK. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XV.

Schematiſmus 11. *Fig.* 77.

Annuli à ſimilibus (CGE, RSV) figuris geniti qui latitudines habent (CE, RV) reuolutionum diametris (QA, IA) proportionales, triplicatam inter ſe habent latitudinum rationem.

c Praced. *d Oſtenſum* *p.* 11. *l.* 3. *huius.* *e hypoth.*

ANnuli à ſimilibus figuris geniti rationem habent compoſitam ex ratione ſectionum per polos maximarum [c] CEK, RVL, & ex ratione latitudinum CE, RV. Sed ratio CEK ad RVL, eſt ratio compoſita [d] ex ratione CE ad RV, & ex ratione QA ad IA, hoc eſt [e] CE ad RV: ac proinde ratio compoſita ex rationibus CE ad RV, & CEK ad RVL, eſt ratio triplicata rationis CE ad RV. Ergo ratio annulorum à ſimilibus figuris CGE, RSV genitorum, qui latitudines habent reuolutionum diametris proportionales, triplicatam habent latitudinum rationem. Quod erat demonſt.

PROPOSITIO XVI.

Schematiſmus 11 *Fig.* 78.

Omnes annuli ab æqualibus figuris (BNE, DPF,) geniti, inter ſe rationem habent quam reuolutionum diametri (OA, CA.)

Et annuli, qui eam inter ſe rationem habent, quam reuolutionum diametri, geniti ſunt à figuris æqualibus.

a 5. *l.* 3. *huius.* *b Ex* 13. *vndec. elem.* *c Per conſt.* *d Pappus* *l.* 5 *p.* 41.

SVper figuris genitricibus æqualibus intelligantur Cylindri, quorum altitudines ſint peripheriæ mediæ OH, CG. Erunt hi annulis [a] æquales. Sed hi Cylindri eam inter ſe rationem [b] habent, quam altitudines; hoc eſt quam [c] peripheriæ mediæ; hoc eſt quam [d] OA, ad CA. Ergo & annuli eam inter ſe rationem habent, quam OA ad CA. Quod erat primum.

Alterum ex prima parte demonſtrabitur per reductionem ad impoſſibile.

PROPOSITIO XVII.

Schematiſmus 11 *Fig.* 79.

Annulus patens ſibi contigui clauſi annuli eiuſdem craſſitudinis, & ab æquali figurâ geniti, triplus eſt.

e defin. 7. *l.* 3. *huius.* *f defin.* 8. *l.* 3. *huius.*

FIguræ genitrices æquales, & æqualibus baſibus impoſitæ, & contiguæ ſint QGR, RFA; quæ polo A in orbem ductæ annulos deſcribant. Dico annulum patentem à figura QGR deſcriptum, eſſe triplum clauſi annuli, quem genuit figura RFA.

Puncta media [e] ſint C, & B; ac proinde reuolutionum diametri [f] CA, & BA. Quoniam latitudi-

latitudines QR, RA æquales ex hypotheſi, ſunt in [a] B, & C biſectæ ; patet CA eſſe triplam BA. Sed vt CA ad AB, ſic annulus [b] ad annulum. Ergo annulus annuli triplus eſt. Quod erat demonſtrandum.

a *Defin. 7. lib. 3. huius.*
b *Præced.*

A fortiori verum eſt theorema ſi figuræ genitrices æquales ac ſimiles fuerint.

Propoſitione 14. libri ſequentis etiam ſuperficiem patentis annuli eſſe triplam ſuperficiei clauſi annuli contigui demonſtrabimus. Quod inter admiranda Geometriæ numerari poteſt.

PROPOSITIO XVIII.

Annuli contigui æquè craſſi quorum primus ſit clauſus, ab æqualibus figuris (AFR, RGQ, QHP, PKO) procreati, eam inter ſe rationem habent, quam imparium numerorum ſeries ab vnitate, 1, 3, 5, 7, & eo deinceps ordine in infinitum.

Schematiſmus 11 Fig. 79.

PVncta annulorum media ſint B, C, D, E, &c. reuolutionum diametri BA, CA, DA, EA &c. Quoniam ex hypotheſi æquales ſunt latitudines annulorum OP, PQ, QR, RA, & omnes biſectæ ſunt [c] in E, D, C, B, punctis medijs : patet omnes AB, BR, RC, CQ, QD, DP, PE, EO æquales eſſe. Itaque reuolutionum diametri BA, CA, DA, EA, eam inter ſe rationem habent quam 1, 3, 5, 7, & reliqui impares. Atqui annuli dati, cùm à figuris æqualibus deſcribantur, eam inter ſe rationem habent [d], quam reuolutionum diametri BA, CA, DA, EA. Ergo etiam annuli ſunt inter ſe, vt impares numeri 1, 3, 5, 7, & eâ deinceps ſerie in infinitum. Quod erat demonſtrandum.

c *Defin. 7. l. 3. huius.*
d *16. l. 3. huius.*

PROPOSITIO XIX.

Clauſi annuli à figuris ſimilibus geniti triplicatam inter ſe habent latitudinum rationem.

FIguræ ſimiles genitrices ſint AEB, AFC quæ polo A in orbem ductæ clauſos deſcribant annulos, quorum latitudines ſint AB, AC : his biſectis in O, & K reuolutionum diametri ſint OA, KA.

Schematiſmus 11 Fig. 80.

Ratio annuli geniti à figurâ AFC ad annulum genitum à figurâ AEB, compoſita [a] eſt ex ratione figuræ AFC ad figuram AEB, & ex ratione diametrorum reuolutionis KA, OA. Sed, quia per hypotheſim figuræ AFC, AEB, ſimiles ſunt, earum ratio duplicata eſt rationis latitudinum CA, BA ; & ratio KA ad OA, eadem eſt cum ratione latitudinum CA, BA, cum CA, BA ipſarum KA, OA, ſint duplæ. Ergo ratio annuli clauſi, geniti à figurâ AFC, ad annulum clauſum, genitum à figurâ AEB, eſt triplicata rationis latitudinum CA, BA. Quod erat demonſtrandum.

a *13. l. 3. huius.*

PROPOSITIO XX.

Dati ſint quotcumque annuli contigui, quorum primus ſit clauſus, geniti à figuris æqualibus & ſimilibus AFR, RGQ, QHP, PKO, OLN, circa polum A in orbem actis. Datus item ſit annulus clauſus, genitus à figurâ AZN prioribus ſimili, polo item A, priores omnes complectens.

Schematiſmus 11 Fig. 97.

Dico hunc toties continere aggregatum annulorum contiguorum, quot ſunt contigui annuli.

PRimus annulus, quem polo A gignit figura AFR, ſiue vnitas, ſit α. Multitudo annulorum contiguorum ſit β. Eorumdem aggregatum eſto γ, annulus clauſus omnes complectens ſit δ.

Quoniam ex hypotheſi figuræ genitrices ſunt æquales & ſimiles, patet latitudines AR, RQ, QP, PO, ON æquales eſſe. Itaque dati annuli contigui ſunt inter ſe, vt numeri [a] impares, 1, 3, 5, 7, 9. Sed horum aggregatum eſt ad vnitatem in duplicatâ ratione eius, quam

a *18. l. 3. huius.*

d vnitatem. Ergo
habet duplica-
i annulus clau-
A polo A', tri-
; hoc eſt eius
ius annulus *ȣ*,
et rationem,
uatuor quan-
t in triplica-
ropoſitum.

rum
inde
abet

mino
mini.
mini;
uplus
o ter-
rum.
ſe ip-

eni-
lin-
ten-

me-
peri-
alti-
OF
ltitu-
peri-
OD
heriæ
EN,

de-

ra-

lendo
BE
BP,

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XXII.

Annulorum concentricorum ab æqualibus figuris (BFE, CGD) genitorum, qui latitudinum ſemiſſem (CE) habeat communem, differentia eſt clauſus annulus, ab alterutra figurarum genitricum procreatus. *Schematiſmus 12. Fig. 82.*

ANnulus patens genitus à figurâ BFE, polo A, in orbem ductâ, æquatur [b] annulo clauſo, qui fit ab eâdem figurâ BFE, polo E, in orbem ductâ; & Cylindro, cuius baſis eſt BFE, (ſiue CGD), altitudo peripheria EK. Atqui annulus factus à figurâ CGD, polo A in orbem actâ, æquatur [c] Cylindro, cuius baſis CGD, altitudo peripheria EK, quæ annuli media eſt. Ergo annulus genitus à figura BFE, polo A, æquatur annulo clauſo qui ab eâdem fit figurâ vnà cum annulo, qui fit ab CGD, polo A. Ergo concentricorum annulorum ab æqualibus figuris BFECGD, polo A genitorum, & communem habentium latitudinum ſemiſſem CE, differentia eſt annulus clauſus ab BFE, ſiue CGD, procreatus. Quod erat demonſtrandum.

b *Præced.*
c 5. l. 3 *huius.*

PROPOSITIO XXIII.

Datæ ſint figuræ planæ æquales BQD, NPO, ſiue contiguæ, ſiue diſſitæ, ſiue mutuoſecantes, (duos primos caſus figuræ exprimunt) quæ polo A in orbem ductæ deſcribant annulos quorum mediæ peripheriæ ſint CF, & EG. *Schematiſmus 12. Fig. 83. 84.*

Dico: eorum differentia eſt annulus CQDH genitus à figurâ BQD, polo E, cuius nimirum diameter reuolutionis eſt peripheriarum mediarum CF, EG, interuallum CE.

CEntro E, per C deſcribatur peripheria CH. Erit hæc peripheria media annuli à figurâ BQD, polo E, geniti. Oſtenſum [a] eſt ſupra CF peripheriam æquari peripherijs EG, & CH. Ergo Cylindrus ſuper BQD in altitudine peripheriæ CF æquatur Cylindris ſuper BQD in altitudine peripheriæ CH, & ſuper NPO (hoc eſt BQD ex hyp.) in altitudine peripheriæ EG. Atqui Cylindro ſuper BQD in altitudine CF æquatur annulus, [b] genitus à BQD, polo A; & Cylindro ſuper BQD in altitudine [c] CH, æquatur annulus genitus à BQD, polo E. Similiter Cylindro ſuper NPO in altitudine EG æquatur annulus [d] genitus ab NPO, polo A. Ergo annulus genitus à BQD polo A, æquatur annulo, genito à BQD, polo E, & annulo genito ab NPO polo A. Ergo annulus genitus à BQD polo E, reliquorum differentia eſt. Quod erat demonſtrandum.

a *Lemma; poſt 21. l. 3 huius.*
b 5. l. 3. *huius.*
c *Ibidem.*
d *Ibidem.*

PARS SECVNDA.

PROPOSITIO XXIV.

Cylindrus eſto rectus EFCω, ex cuiuſcumque figuræ EFC ductu recto procreatus. Secetur autem plano per axem EVωC; iungaturque recta VC, per quam fiat ſectio VTRC ad planum EVωC recta. Ex puncto D medio ipſius EC, duc DF perpendicularem ad EC. Tandem per DF, & Cylindri axem Dδ fiat ſectio DδRF. *Schematiſmus 12. Fig. 85.*

Dico ſolidum Cylindricum EVRFDE, quod nimirum planis VE-

Dδ, DδRF, δRTV, & ſuperficiei Cylindricæ ſegmento continetur, per inſcripta priſmata exhauriri.[a]

a Defin. 28. l. 1. huius.

ASſignetur ſolidum quantumuis paruum Y, cuius dimidium ſit ζ, per punctum δ fiat ſectio βRω ad baſim DFC parallela. Hac ſectione diuiditur Cylindricum ſolidum EVδRFDE in duo ſegmenta, quorum alterum eſt Cylindrus EβRFDδ; alterum βδRV, eſt illa portio Cylindri de quâ duobus iam libris egimus, radio ED in aliquot æquales partes ſecto, ductiſque per ſectionum puncta lineis ad FD parallelis, baſi EFD inſcribe rectangula, ſuperque iis Cylindro EβRFD priſmata inſcribantur. Demonſtrauimus[b] per huiuſmodi inſcripta priſmata Cylindrum EβRFD exhauriri. Statuamus igitur Cylindro tot iam inſcripta eſſe priſmata, vt Cylindri ac priſmatum differentia ſit minor ſolido ζ. Deinde priſmata Cylindro ſic inſcripta producantur vſque ad planum Ellipticum VTRδ, quo facto ipſi etiam portioni βVRδ, atque adeò toti Cylindrico ſolido EVRFD inſcripta erunt priſmata. Tum verò, quia & portio βVRδ minor eſt Cylindro EβRFD, & inſcripta portioni priſmata minora ſunt ijs quæ inſcripta ſunt Cylindro, portionis ac priſmatum portioni inſcriptorum differentia minor erit, quàm differentia Cylindri EβRFD, & inſcriptorum ipſi priſmatum; hoc eſt, vt iam oſtendimus, minor ſolido ζ, quod ſemiſſis eſt ſolidi Y. Ergo differentia Cylindri EβRFD, ac inſcriptorum ſibi priſmatum, & differentia portionis βVRD, ac priſmatum illi inſcriptorum, ſimul iunctæ, hoc eſt differentia totius Cylindrici ſolidi EβRFD, & inſcriptorum illi priſmatum, eſt minor ſolido dato Y. Datum igitur Cylindricum ſolidum per inſcripta priſmata exhauritur. Quod erat demonſtrandum.

b 4. l. 3 huius.

Schematiſmus 12 Fig. 86.

Quod ſi ſolidum Cylindricum EVRFD fuerit à Cylindro Eω abſciſſum plano VRθδ, non pertingente ad baſim EFC, ſed vnum Cylindri latus ſecante in θ: nihilominus per inſcripta priſmata eodem prorſus modo exhaurietur; eritque omnino eadem demonſtratio.

PROPOSITIO XXV.

a Defin 15. l. 3 huius.
b Defin. 28. l. 1. huius.

Cuiuſuis annularis ſolidi pars[a] exterior per inſcripta Cylindrica ſolida exhauritur.[b]

Schematiſmus 12 Fig. 87. 88.

GEnitrix figura dati annuli ſit EFC; axis eius FD; annuli centrum A; latitudo EC, ad axem ordinatim poſita.

Diuidatur FD in aliquot partes æquales DS, SL, LG, GF; inſcribanturque figuræ genitricis ſemiſſi EFD rectangula GQ, MP, NO, ſic vt latera IM, KN, ſi protrahantur, tranſeant per puncta L, S.

Si hæc rectangula vnà cum figurâ, cui inſcripta ſunt, centro A, in orbem ducantur, manifeſtum eſt parti exteriori annularis ſolidi inſcriptum iri Cylindros excauatos iuxta inuicem poſitos, quorum baſes erunt plani annuli à rectis DQ, QP, PO, deſcripti; altitudines verò QH, PI, OK. Atqui aggregatum horum cauorum Cylindrorum, idem eſt cum aggregato eorum, quos producunt rectangula LH, SI, DK. Quare cùm Cylindri caui à rectangulis LH, SI, DK, geniti,[a] exhauriant annulare ſolidum; etiam ij qui à rectangulis GQ, MP, NO producuntur, exhaurient. Quod erat demonſtrandum.

a 3. l. 3. huius.

Eadem eſt conſtructio, & demonſtratio, ſiue annulus ſit patens, ſiue clauſus.

Exterioris partis ſegmenta, quæ nimirum fiunt à ſegmentis figuræ EHQ &c. pari modo exhaurientur.

PROPOSITIO XXVI.

Schematiſmus 12 Fig. 87. & 85.
Quæ alternis inſpicienda.
b Defin. 10. l. 3. huius.

Datus ſit annulus clauſus à figurâ quâcumque planâ EFC, axem DF habente diametro reuolutionis perpendicularem genitus; latitudo AE, ſiue CE ad axem ordinatim poſita; centrum A; peripheria media DZ; maxima[b] Eγ.

Datus item ſit Cylindrus rectus EFCω, cuius baſis ſit figura EFC, quæ annulum genuit; altitudo autem EV, in plano EVωC per Cylindri axem tranſeunte duc rectam VC, occurrentem axi in δ, per

δ, per quam fiat ſectio VRC ad planum EVωC recta. Deinde per DF axem figuræ genitricis, & Dδ axem Cylindri fiat ſectio DδRF.

Dico: Pars clauſi annuli[c] exterior eam habet rationem ad Cylindricum ſolidum EVRFDδ (id nempe quod planis EVδD, DδRF, RVδ, & ſegmento ſuperficiei Cylindricæ continetur), quam maxima annuli circumferentia Eγ, ad altitudinem EV.

c Def. 15 l. 3. huius.

AXe DF in partes aliquot æquales diuiſo, inſcribantur figuræ genitricis ſemiſſi EFD rectangula GQ, MP, NO, ſic vt latera IM, KN protracta tranſeat per puncta L, S. Hæc rectangula ſi cum figurâ, cui inſcripta ſunt, centro A, in orbem ducantur exteriori parti annularis ſolidi inſcribent Cylindros cauos, quorum baſes erunt plani annuli, qui à rectis DQ, QP, PO, centro A, in orbem ductis producuntur; altitudines verò QH, PI, OK.

Fig. 87.

Deinde ſuper iiſdem rectangulis GQ, MP, NO (eſt enim per hypotheſim vna eademque figura EFD, & genitrix ſegmenti exterioris annularis, & baſis Cylindrici ſolidi EVRFDδ) inſcribantur Cylindrico ſolido EVRFDδ priſmata rectangula Q2THG7δD, P6SIM92Q; OGXKNP.

Fig. 85.

His ita constructis; quoniam[a] eſt vt QA, ſiue QC ad DA, ſiue DC, ſic[b] peripheria QBB ad peripheriam DZ: & vt QC ad DC, ſic quoque Q2 ad Dδ; erit peripheria QBB ad peripheriam DZ, vt Q2 ad Dδ. Quoniam igitur rectanguli trapezij Q2δD bina parallela latera Q2, Dδ ſunt proportionalia circumferentijs QBB, DZ annulum planum comprehendentibus; eademque recta QD eſt & baſis trapezij, & latitudo plani annuli erit[c] planus annulus D, Q, BB, Z ad trapezium Q2δD, vt maxima annuli plani peripheria QBB ad maximum trapezij parallelum latus Q2. Rurſum cùm ſit vt ED ad QC, ſic peripheria[d] Eγ ad peripheriam QBB; & vt EC ad QC, ſic quoque EV, ad Q2; erit vt peripheria Eγ ad peripheriam QBB, ſic EV eſt ad Q2: igitur permutando, peripheria Eγ eſt ad EV, vt peripheria QBB eſt ad Q2. Atqui iam oſtendi annulum planum Q, BB, Z, D eſſe ad trapezium Q2δD, vt peripheria QBB eſt ad Q2. Ergo annulus planus Q, BB, Z, D eſt ad trapezium Q2δD, vt peripheria Eγ eſt ad EV. Iam verò ſi priſmatis Q2THG7δD, baſis ſtatuatur eſſe Q2δD, tunc altitudo priſmatis erit QH, eadem nimirum cum altitudine caui Cylindri producti à rectangulo GQ, cuius baſis eſt planus annulus Q, BB, Z, D. Ergo Cylindrus cauus[e] ab GQ productus, eſt ad priſma Q2TH7GδD, ſuper eodem GQ rectangulo conſiſtens, vt baſis ad baſim, vt annulus nimirum planus Q, BB, Z, D ad trapezium Q2δD; hoc eſt (quemadmodum iam demonſtrauimus) vt dati annuli ſolidi peripheria maxima Eγ ad altitudinem EV.

a Figuram inſpice vtramque 87. & 85.
b Pappus l. 5. p. 41.
c 3. l. 1. huius.
d Pappus l. 5. p. 41.
e 6. l. 1. huius.

Eodem prorſus diſcurſu oſtendam ſingulos reliquos cauos Cylindros à rectangulis MP, NO genitos, ita ſe habere ad reliqua ſolidi Cylindrici priſmata ſingula, iiſdem rectangulis MP, NO inſiſtentia, vt Eγ peripheria eſt ad EV. Omnes igitur caui Cylindri exteriori ſegmento annulari inſcripti ſimul ſumpti, ſunt ad omnia priſmata inſcripta Cylindrico ſolido EVRFDδ, vt peripheria Eγ ad EV. Atque hoc ſemper eueniet quotcumque Cylindros cauos parti annulari, & priſmata pari numero Cylindrico ſolido inſcripſeris. Quare cùm inſuper & per Cylindros cauos[a] pars exterior annuli, & per priſmata ſolidum[b] Cylindricum exhauriatur; pars annuli exterior erit ad Cylindricum ſolidum vt[c] Eγ maxima annuli peripheria ad altitudinem EV. Quod erat demonſtrandum.

a 25. l. 3. huius.
b 24. l. 3. huius.
c 1. l. 1. huius.

Per Heterogenea.

In genitrice figurâ ducatur recta HQ parallela axi FD, quæ vnà cum figurâ, polo A, in orbem ducta, deſcribet Cylindri recti ſuperficiem intra annulum. Per eamdem rectam HQ Cylindricum ſolidum EVδDFR ſeca plano ad planum DδRF parallelo. Sectio erit rectangulum Q2TH. Iam verò ſuperficies Cylindrica ab QH deſcripta, æquatur[d] rectangulo ſub HQ, & peripheriâ QBB comprehenſo. Ergo eſt ad rectangulum Q2TH, contentum ſub HQ & Q2, vt peripheria QBB ad Q2; hoc eſt (quemadmodum in demonſtratione primâ oſtenſum eſt) vt peripheria Eγ ad EV. Quod cùm ſemper fiat; erit iuxta Heterogeneorum regulam exterior annuli pars ad Cylindricum ſolidum EVδDFR, vt peripheria Eγ ad EV.

Schematiſmus 12. Fig. 87. 85.
d 4. l. 2. huius.

Eodem diſcurſu (quod *ſequenti propoſit.* fiet Geometricè) oſtendam annuli interiorem partem eſſe ad Cylindricum ſolidum reliquum DδRF5C, vt maxima annuli peripheria E ad altitudinem EV.

Corolla-

Corollarium.

Ex his conſequens erit totum annulum eſſe ad ſemicylindrum totum ECRV; hoc eſt ad Cylindrum ERω, vt Eγ peripheria eſt ad EV; hoc eſt vt peripheria media DZ eſt ad Dδ, ſeu Cω: atque ita habetur alia propoſitionum 5 & 6 *huius libri* per Heterogenea demonſtratio.

Per Heterogenea aliter.

Schematiſmus 7. Fig. 87. 85. In genitrice figurâ ducatur quæuis HG parallela ad EC, perque hanc ſeca annulum plano ad ſectionem [a] maximam per polum factam parallelo. Sectio erit planus annulus æqualis plano annulo Q,BB,ZD. Deinde per rectam HG ſeca Cylindricum ſolidum plano parallelo ad planum EVC, ſectio erit trapezium THG7, æquale trapezio Q2δD. Quare cùm iam oſtenſum ſit in demonſtratione primâ, & Geometricâ annulum planum Q, BB, Z, D eſſe ad trapezium Q2δD, vt peripheria Eγ eſt ad EV; etiam planus annulus deſcriptus à rectâ HG priori æqualis, erit ad trapezium TAG7, vt peripheria Eγ eſt ad EV. Quod quia ſemper euenit, erit annuli ſolidi pars exterior ad Cylindricum EVδDFR; imò & pars interior annuli, ad reliquum Cylindricum FDδR5C, & totus annulus ad totum ſemicylindrum ECRV, vt peripheria Eγ eſt ad EV.

a *Defin.* 12. 13. *l.* 3. *huius.*

PROPOSITIO XXVII.

Schematiſmus 12 *Fig.* 87. 85.

Iiſdem poſitis.

Interior clauſi annuli pars, ea nimirum, quæ ab alterâ figuræ genitricis ſemiſſe DFC producitur, ad reliquum Cylindricum ſolidum DδR5CF, planis DδRF, DδC, CDF & ſuperficie Cylindricâ R5CF comprehenſum, eam quoque habet proportionem, quam maxima annuli circumferētia Eγ ad altitudinē EV.

QVia per hypotheſim FD eſt perpendicularis ad EC, ac proinde (quod Cylindrus ponatur rectus) etiam ad planum EVωC; erit [a] planum RFDδ quod per ipſam ducitur rectum plano EVωC. Sed etiam per [b] hypotheſim planum VRC eſt plano EVωC rectum. Ergo δR, quæ communis ſectio eſt planorum RFDδ, VRC, recta [c] plano EVωC erit. Ergo cùm & FD ſit eidem plano recta, erunt Rδ, FD parallelæ.[d] Quare ſi per punctum δ ducatur βω parallela ad EC, perque rectas βω, δR ducatur planum; erit ſectio βRω parallela baſi EFC, & plano EVωC recta; ac proinde Cylindrus rectus EFCω in duos rectos Cylindros plano βRω diuiditur. Quare ſolida βδRTV, ωδR5C, ſunt portiones à Cylindris rectis βRCE, βRωV abſciſſæ per axem baſeos δR, de quibus actum duobus libris præcedentibus.

a 18. *elem.* 11. b *Vide Præced.* c 19. *elem.* 11. d *Ex* 8. *eiuſdem* 11.

Nunc autem quia per hyp. EC biſecta eſt in D; eſtque per hyp. Dδ parallela VE; etiam VC biſecatur in δ, æquanturque Vβ, ωC. Quare cùm portionum βδRTV, ωδR5C, altitudines Vβ, ωC, itemque baſes βRδ, ωRδ æquales ſint, etiam ipſæ æquales [e] erunt. Addito igitur communi ſolido EβR5Cδ, erit ſolidum EVRC æquale Cylindro EFCωRβ. Atqui datus clauſus annulus genitus à figurâ EFC eſt ad [f] Cylindrum EFCωRβ, vt peripheria media DZ ad Dδ, ſeu Eβ. Ergo datus annulus eſt quoque ad ſolidum EVRC vt peripheria media DZ ad Dδ; hoc eſt vt peripheria Eγ eſt ad EV. Sed pars annuli exterior ad ſolidi EVRC partem EVRFDδ, etiam eſt vt peripheria Eγ ad EV. Ergo & reliqua annuli pars interior erit ad reliquam ſolidi EVRC partem DδR5C, vt peripheria Eγ ad EV. Quod erat demonſtrandum.

e 18. *l.* 5. *huius,* f 6 *l.* 3. *huius.*

PROPOSITIO XXVIII.

Schematiſmus 12 *Fig.* 87. 85.

Iiſdem poſitis; In figurâ genitrice ducantur rectæ HQ, φ4, axi FD parallelæ. Per eaſdem rectas in ſolido Cylindro ducantur plana QHT2,4,8,5,φ, recta ad figuram, ſiue baſim CFE.

Dico ſingula annularia ſolida à genitricis figuræ ſegmentis EHQ, QHFD,

QHFD,DFφ4,4φC deſcripta,ad ſingula eodem ordine ſegmenta Cylindrica EHTV2Q, QHFRT2δD, DδR584φF, φ485C, eam habent rationem quam maxima annuli peripheria Eγ ad Cylindri altitudinem EV.

PRo tribus primis partibus eadem erit demonſtratio, quæ *propoſ.26*. Pars quarta ſic oſtenditur. Interior annuli pars, genita à DFC,eſt ad Cylindricum ſolidum FDδR5C, vt [a] peripheria Eγ eſt ad EV: & ſegmentum annuli genitum ab D Fφ4,eſt ad Cylindricum ſegmentum DδR58φF4, vt peripheria Eγ ad EV; quod iam diximus liquere ex diſcurſu *prop.* 26. Ergo ſegmentum annulare reliquum quod fit ab 4φC,eſt ad reliquum Cylindricum φ485C, vt peripheria Eγ eſt ad EV. a *Præced.*

PROPOSITIO XXIX.

Eſto patens annulus à quacumque genitus figurâ planâ EFC,axem habente reuolutionis diametro perpendicularem; axis ſit DF; latitudo CE, ad axem ordinatim poſita; centrum A; peripheria media DZ; minima Cξ; maxima Eγ. *Schematiſmus 12 Fig. 88. & 86. Alternis inſpicienda.*

Datus item ſit Cylindrus rectus E8,cuius baſis ſit figura EFC,quæ annulum genuit; altitudo autem EV; ſitque vt maxima peripheria Eγ ad altitudinem EV, ita minima Cξ ad Cθ. Tum per V & θ fiat ſectio VRθ plano EVωC per axem Dδ ducto,recta. Tandem per DF axem figuræ genitricis, & Dδ axem Cylindri fiat ſectio DδRF.

Dico: pars annuli patentis [a] exterior, ad ſolidum Cylindricum EVRFDδ, eam habet rationem, quam peripheria annuli maxima Eγ ad altitudinem EV. a *Defin.15. l.3. huius.*

EXteriori parti dati annuli inſcribantur caui Cylindri, & ſolido Cylindrico EVRFDδ inſcribantur priſmata, eo prorſus modo quo id factum *propoſitione 26*. Deinde [b] EC,Vθ protrahantur, donec concurrant in A. Erit EA ad CA, vt EV, ad Cθ; hoc eſt per hypotheſim, vt peripheria [c] maxima Eγ ad minimam Cξ; hoc eſt vt (in annulo) EA eſt [d] ad CA. Quoniam igitur in Cylindro EA, eſt ad CA, vt in annulo EA, ad CA; erit diuidendo EC ad CA, vt EC ad CA. Quare cùm EC in Cylindro, & EC in annulo ſint per hypotheſim æquales, imo eædem; etiam CA, CA, ac proinde & EA, EA æquales; imo eædem vtrobique rectæ ſunt. Vnde etiam conſequens erit rectas QA, PA, OA eaſdem in Cylindro atque annulo rectas eſſe. b *Fig. 86.* c *Fig. 88.* d *Pappus l.5. p.41.*

His præmiſſis, quoniam eſt vt radius QA ad DA radium, ſic peripheria QBB ad peripheriam DZ; & rurſum vt QA ad DA, ſic Q2 ad Dδ; erit peripheria QBB ad peripheriam DZ, vt Q2 ad Dδ. Igitur quoniam & QD vtrobique communis eſt; erit [e] planus annulus Q,BB, ZD ad trapezium rectangulum Q2δD, vt circumferentia maior QBB ad maximum trapezij perpendiculum Q2; hoc eſt vt maxima annuli peripheria Eγ ad altitudinem EV (cùm enim ſit vt EA ad QA, ſic Eγ ad QBB: & vt EA ad QA, ſic EV ad Q2: erit Eγ ad QBB, vt EV ad Q2; & permutando Eγ ad EV vt QBB ad Q2). Cùm igitur Cylindri caui à rectangulo GQ producti, & priſmatis Q2THG7δD communis ſit altitudo QH; erit Cylindrus cauus ad priſma vt [a] baſis ad baſim, hoc eſt vt planus annulus Q, BB, Z, D ad trapezium Q2δD; hoc eſt (quemadmodum iam oſtendi) vt annuli peripheria maxima Eγ ad EV. *Fig. 87. 86.* *Inſpice vtramque.* e *3. l. 1. huius.* a *6. l. 1. huius.*

Pari modo oſtendam ſingulos reliquos Cylindros cauos, à rectangulis MP, NO productos, eſſe ad ſingula priſmata, quæ inſiſtunt rectangulis iiſdem MP, NO in Cylindrico ſolido, vt peripheria Eγ ad EV. Omnes igitur caui Cylindri ſimul ſumpti, ſunt ad omnia priſmata ſimul ſumpta, vt peripheria Eγ ad EV. Atque hoc ſemper euenit, quotcumque tam Cylindros cauos parti annulari, quàm ſolido Cylindrico priſmata, æquali numero inſcripſerimus

b 25. l. 3. huius. c 24. l. 3. huius. d 1. l. 1. huius.

ſerimus. Quare, cùm inſuper & Cylindri caui [b] partem annularem, & priſmata [c] Cylindricum ſolidum exhauriant; erit pars annularis exterior ad Cylindricum ſolidum, vt [d] peripheria Eγ ad EV. Quod erat demonſtrandum.

Per Heterogenea.

Similis erit demonſtratio ei, quæ data eſt *propoſ.* 26. *huius libri.*

PROPOSITIO XXX.

Schematiſmus 12 *Fig.* 88. 86.

Iiſdem poſitis:
Interior annuli patentis pars ad reliquum Cylindricum ſolidum DδR5θCF, eam quoque habet proportionem, quam annuli maxima peripheria Eγ ad altitudinem EV.

PEr rectam δR & βδα parallelam EC ducatur planum βRα: quod erit rectum plano EVαC, & parallelum baſi EFC (vt oſtendi *propoſ.* 27.) ac proinde Cylindrum rectum E8 partietur in duos Cylindros rectos ER, β8; & ſolida, quæ ſectione illâ determinantur, βVTRδ, αRδθ, erunt portiones à Cylindris rectis per baſeos βRα axem δR abſciſſa: de quibus duobus libris prioribus actum eſt.

a 12. l. 2. huius. b 6. l. 3. huius. c Præced.

Quoniam verò EC ex hyp. in D, ac proinde & Vθ in δ biſecatur, etiam θα, Vβ æquales ſunt. Ergo portiones βVTRδ, αθ5Rδ [a] æquantur. Quare, adiecto communi ſolido EFCθ5Rβδ, Cylindrus ERα ſolido EVR5θCFE æqualis eſt. Quoniam igitur annulus datus eſt ad Cylindrum ERα, vt [b] peripheria media DZ ad Dδ; idem quoque annulus erit ad ſolidum EVR5θCFE, ſicut peripheria DZ ad Dδ; hoc eſt (quemadmodum *prop. præcedenti* oſtenſum eſt) vt peripheria Eγ ad EV. Atqui etiam annuli pars exterior à figuræ genitricis ſemiſſe EFD producta, eſt ad ſolidi Cylindrici prioris partem EVRFDδ, vt [c] peripheria Eγ ad EV. Ergo etiam reliqua annuli pars, ab alterâ figuræ genitricis ſemiſſe EFC genita, eſt ad reliquum Cylindricum ſolidum, vt peripheria Eγ ad EV. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXI.

Schematiſmus. 12 *Fig.* 88. 86.

Iiſdem poſitis: in figura genitrice ducantur QH, 4φ parallelæ axi FD. Per eaſdem rectas in ſolido Cylindrico plana ducantur Q2TH, 4λ5φ.
Dico ſingula ſolida annularia, à ſegmentis EHQ, QHFD, DFφ4, 4φC producta, eſſe ad ſingula eodem ordine ſegmenta Cylindrica EVTHQ2, Q2THFRδD, DδRFφ5λ4, 4λ5φCθ, vt maxima annuli peripheria Eγ eſt ad altitudinem EV:

a Præced.

PRo tribus partibus demonſtratio eadem erit, quæ *prop.* 29. Poſtrema ſic oſtenditur. Annulare ſolidum factum à plano DFC eſt ad ſolidum Cylindricum DδR5θCF, vt [a] peripheria Eγ ad EV: & per partem primam ſolidum annulare, quod fit à plano DFφ4, eſt ad Cylindricum DδR5φ4λ, vt peripheria Eγ ad EV. Ergo & reliquum annulare ſolidum, quod fit à plano 4φC, eſt ad reliquum Cylindricum φ4λ5θC, vt peripheria Eγ ad EV. Quod erat demonſtrandum.

PARS TERTIA.

PROPOSITIO XXXII.

Schematiſmus 13 *Fig.* 89. 90. *Alternis inſpiciendæ.* b *Defin.* 15. l. 3. *huius.*

Annuli circularis clauſi pars [b] exterior excedit interiorem, ſphærâ circuli genitoris bis ſumptâ.

Genitor

GEnitor circulus ſit EFCG, centrum, ſiue polus annuli A; medium [c] punctum D (quod ipſum erit circuli genitoris centrum); peripheria [d] media DZ; peripheria [e] maxima EH; latitudo [f] annuli EC: huic perpendicularis ſit FG, tranſiens per D punctum medium, genitorem circulum in duos partiens ſemicirculos.

Oportet oſtendere, quod exterior clauſi annuli pars, ea nimirum quæ producitur à ſemicirculo FEG, excedat interiorem, quæ ſit à ſemicirculo FAG, ſphærâ, quæ à genitore circulo EFCG producitur, ipſique annulo inſcripta eſt, bis ſumptâ.

c Defin. 7. l. 3. huius. d Defin 9. l. 3. huius. e Defin 10. l. 3 huius. f Defin. 6. l. 3. huius.

Super genitore circulo [g] EFCG intelligatur erigi rectus Cylindrus EV, cuius altitudo EN par ſit maximæ annuli peripheriæ EH. Cylindrum hunc ſeca per axem plano ENVC, ductâque rectâ NC, quæ occurrat axi in K. Per hanc fiat ſectio Elliptica NICL, plano ENVC recta. Per FG, & axem Cylindri fiat deinde ſectio GILF, occurrens Ellipſi NICL ſecundùm rectam IKL, erit hæc [h] parallela ad GF. Igitur per IKL fiat ſectio PIOL parallela baſi.

g Alternis vtramque inſpice figuram. h Oſtenſum eſt 27. l. 3. huius.

His cum in modum conſtitutis portio IPNL, [a] portioni LOCI æqualis eſt (altitudines enim PN, OC æquantur, baſes verò LPI, LOI æquales & ſimiles ſunt): ſolida quoque GILFEP, GILFCO æqualia ſunt, ſemiſſes nimirum Cylindri EO: vnde Cylindricum ſolidum GIENLF æquatur ſolido GILFCO & portioni IPNL; hoc eſt ſolido LYCMILFG, & portionibus IPNL, LOCI; hoc eſt (quia portiones illas iam oſtendi eſſe æquales) ſolido LYCMILFG, & portioni IPNL bis ſumptæ. Atqui exterior dati annuli clauſi pars æquatur [b] Cylindrico ſolido GIENLF, cùm EN par ſit ex hypotheſi maximæ annuli peripheriæ EH. Exterior igitur dati annuli pars etiam æquatur ſolido LYCMILFG, & portioni IPNL bis ſumptæ.

a 18. l. 1. huius. b 26. l. 3. huius.

Quia verò NC, EC biſecantur ab axe DK, eſtque DK axis parallelus ad EN, Cylindri latus; erit EN, (hoc eſt per hypotheſim peripheria EH) dupla ipſius DK. Quare, cùm etiam peripheria [c] EH dupla ſit peripheriæ mediæ DZ; erit DK par peripheriæ mediæ DZ; hoc eſt par peripheriæ [d] circuli, cuius diameter eſt EC, ipſius nempe circuli genitoris peripheriæ EFCG. Eſt autem recta PN æqualis rectę OC, ſiue DK. Ergo etiam PN æquatur peripheriæ cuius diameter eſt EC, hoc eſt PO. Ergo portio IPNL æqualis eſt ſphæræ, cuius diameter PO, hoc eſt ſphæræ, quæ à baſi PLOI, ſiue à genitore circulo EFCG producitur, vt demonſtrauimus *lib. 1. prop. 11.* eſt enim portionis altitudo PN æqualis peripheriæ baſeos IPLO, ſiue EFCG.

c Patet ex Papp. l. 5. p. 41. d Vide defin. 9. l. 3. huius.

Inſuper, quia EN par eſt peripheriæ EH; ſolidum LYCMILFG æquatur parti interiori annuli. Quoniam igitur oſtenſum ſupra eſt, exteriorem annuli partem æquari ſolido LYCMILFG, & portioni IPNL bis ſumptæ; eadem illa annuli pars exterior æquabitur parti interiori, & ſphæræ genitoris circuli bis ſumptæ; ac proinde exterior interiorem ſuperat circuli genitoris ſphærâ bis ſumptâ. Quod erat demonſtrandum.

e 27. l. 3. huius.

Scholium.

Poteſt hoc theorema demonſtrari aſſumpto Cylindro altitudinem habente quamcumque, hunc in modum.

Quoniam vt EN eſt ad peripheriam EH, ſic ſolidum [a] GIENLF ad exteriorem partem annuli: & ſolidum [b] ILCGF ad annuli partem interiorem; patet ſolida GIENLF, ILCFG eſſe partibus annuli proportionalia. Vnde diuidendo exceſſus ſolidi GIENLF ſupra ILCFG, eſt ad ILCFG, vt exceſſus partis annuli exterioris ſupra interiorem, ad interiorem: & permutando, exceſſus ſolidi GIENLF ſupra ILCFG eſt ad exceſſum partis exterioris annularis ſupra interiorem, vt ILCFG ad interiorem annuli partem; hoc eſt vt EN ad peripheriam EH. Sed portio IPNL bis, eſt exceſſus ſolidi GIENLF ſupra ILCFG, vt patet ex demonſtratione priori. Ergo portio IPNL bis ſumpta, eſt ad exceſſum partis exterioris annuli ſupra interiorem, vt EN ad peripheriam EH.

a 26. l. 3. huius. b 27. l. 3. huius.

Deinde, quoniam EN, eſt ad DK, vt peripheria [c] EH ad peripheriam DZ, eſtque PN differentia ipſarum EN, DK, peripheria verò EFCG, diametrum habens EC, ipſarum EH, DZ differentia eſt, patet NP eſſe ad EN, vt EFCG ad EH. Quare permutando, NP eſt ad EFCG, ſiue PLOI circumferentiam, vt EN ad EH. Atqui portio IPNL eſt ad ſpheram circuli PLOI, hoc eſt circuli EFCG, vt [d] PN ad peripheriam PLOI, adeóque portio IPNL bis, eſt ad ſpheram

c Ex demonſtr. priori. d 13. l. 1. huius.

Digitized by Google

rallelæ, abſcindentes ſegmenta vtrimque æqualia SET, ωCR. *Alternis inſpicidis.*
Segmentum annulare exterius quod fit à plano SET, excedit annulare ſegmentum interius genitum à plano ωCR, ſphærâ diametri ST, ſiue ωR, bis ſumptâ.

SVper genitore circulo intelligatur erigi Cylindrus EV altitudinem habens EN, parem peripheriæ EH annuli maximæ; atque eadem conſtruantur omnia, quæ *prop* 32. Præterea per rectas Rω, & TS (quæ ex hypotheſi æquidiſtant FG) ducantur plana æquidiſtantia plano GILF, quæ in ſuperficie Cylindricâ producant rectas Rδ, ωβ, TXSα: in circulo LPIO, rectas δβ, θφ (quæ diametro [a] IL æquidiſtabunt); in Ellipſi rectas MY, Xα. *a 16. elem. 11.*
Quoniam ſectiones TθφS, Rδβω ſunt parallelogramma, & TS, Rω ex hypotheſi ſunt æquales, etiam θφ, δβ æquales erunt. Deinde quia planum GILF eſt rectum [b] plano EFCG, ac proinde & parallelo huic plano OIPL; plana quoque θXαφ, MδβY, per conſtructionem ipſi GILF parallela, erunt recta plano PIOL. Quoniam igitur portiones IPNL, LOCI, ſectæ ſunt planis θXαφ, δMYβ, rectis baſi PLOI, occurrentibus baſi ſecundùm lineas θφ, & δβ diametro IL parallelas; & propoſitione 32 demonſtratum iam ſit rectas PN-OC, æquari ſingulas peripheriæ PLOI; liquet ex 45. *lib. 1 huius*, ſegmenta XθPNαφ, & YβδMCO, æquari ſphæris diametrorum θφ, δβ æqualium. Atqui Cylindricum ſegmentum θTEPφS æquale eſt ſegmento δRCOβω, ac proinde ſolidum XTENαS æquatur ſolido YωCMR, & ſegmentis XθPNαφ, YβδMCO. Ergo etiam ſolidum XTENαS æquatur ſolido YωCMR & ſphæris diametrorum θφδβ, hoc eſt & ſphæræ diametri θφ bis ſumptæ. *b Per conſt.* *p 32. l 3. huius.*
Iam verò quia ex hypotheſi altitudo Cylindri EN æquatur [c] maximæ annuli peripheriæ EH, erit ſolidum XTENαS, æquale [d] ſegmento annulari quod fit à plano SET: & ſolidum YωCMR [e] æquale annulari ſegmento, quod fit à plano ωCR. Ergo ſegmentum annulare factum à plano SET æquatur facto à plano ωCR & ſphæræ θφ bis ſumptæ; ac proinde ſegmentum annulare genitum à plano SET, excedit genitum à plano ωCR, ſphærâ diametri θφ, ſiue ST, bis ſumptâ. Quod erat demonſtrandum. *c Vide 32. l. 3. huius.* *d 28 l. 3. huius.* *e Ibidem.*

PROPOSITIO XXXV.

Datus ſit annulus circularis patens, genitus à circulo EFCG, polo A in orbem ducto; in quo vtrimque ducantur lineæ ST, ωR æquales, & axi FG parallelæ, reſecantes ſegmenta vtrimque æqualia SET, ωCR. *Schematiſmus 13 Fig. 91. 92.* *Alternis inſpiciendis.*
Rurſus annulare ſegmentum exterius, quod fit à plano SET, excedit annulare ſegmentum interius genitum à plano ωCR, ſphærâ diametri ST, ſiue ωR, bis ſumptâ.

SVper genitore circulo EFCG, intelligatur Cylindrus erigi EV, altitudinem habens EN parem peripheriæ annuli maximæ EH; cæteraque omnia conſtruantur, quæ *prop. 33. libri huius.* Deinde per rectas Rω & TS, quæ ex hypotheſi ſunt parallelæ GF, ducantur plana Rδβω, & TXαS, plano GILF parallela, quæ Ellipſim NIQL, ſecent ſecundùm rectas MY, Xα; circulum verò PIOL ſecundùm rectas δβ, θφ, quæ diametro IL [a] æquidiſtabunt.
Quoniam planum GILF eſt [b] rectum plano EFCG, etiam plana TXαS, Rδβω per conſtructionem plano GILF parallela, erunt recta plano EFCG, ac proinde & plano PIOL, quod ipſi EFCG [c] æquidiſtat. Quoniam igitur portiones IPNL, & LOQI ſecantur planis θXαφ, & βYMδ rectis baſi PIOL, & occurrentibus baſi eidem ſecundùm rectas lineas θφ, δβ, diametro IL æquidiſtantes; & demonſtratum iam ſit *prop. 33. lib. 3* PN, OQ æquari ſingulas peripheriæ PIOL; patet ex 45 *lib. 1.* ſegmenta XθPNαφ, YβδMQO æquari ſphæris æqualium diametrorum θφ, δβ. Atqui ſolidum Cylindricum ſegmentum θTEPφS æquatur ſegmento Cylindrico δRCOβω; ac proinde ſolidum XTENαS æquatur ſegmento ωCRMYQ & ſegmentis XθPNαφ, YβδMQO. Ergo ſolidum XTNαS æquatur ſegmento ωCRMYQ, & ſphæris diametrorum θφ, δβ æqualium, hoc eſt ipſi ωCRMYQ, & ſphæræ diametri θφ bis ſumptæ. Sed quia ex hyp. EN æquatur maximæ annuli peripheriæ EH, ſolido XTENαS æquatur [a] annulare ſegmentum, genitum à plano SET; & ſolido ωCRMYQ *a 16. elem. 11.* *b Per conſt. 33. l. 3 huius.* *c Ibidem.* *a 31. l. 3. huius.*

Digitized by Google

ſegmento cauo bis ſumpto, quod fit à plano SET; ſiue ωCR circa axem FG in orbem ducto.

Fig. 89. 90. 91. 92.

IN annulo clauſo, ſiue longo, ſiue lato ſic demonſtrabitur.

Super Ellipſi genitrice EFCG intelligatur erigi Cylindrus Ellipticus, cuius altitudo EN par ſit maximæ annuli peripheriæ EH (*fig.* 96. non exprimit eam altitudinem ob anguſtias laminæ) cæteraque omnia conſtruantur quæ *prop.* 32. & 34. Solùm memineris PIOL iam non eſſe circulum, ſed Ellipſim.

Schematiſmus 13 Fig. 95. 96 89. 90.

Quoniam θφ, δβ ſunt ᵃ parallelæ axi IK; & plana θXωφ, MδβY recta ᵇ ſunt baſi POIL & altitudo PN, (ac proinde & OQ) æqualis ᶜ eſt circumferentiæ cuius diameter eſt PO; erit ᵈ ſegmentum XθPNωφ par ſphæroïdico ſegmento genito à plano φPθ, circa LI circumacto; & ſegmentum YβδMCO ᵉ æquabitur ſphæroïdico ſegmento facto à plano βOδ circa IL in orbem ducto. Quare cùm ſphæroïdica ſolida illa ſint æqualia (fiunt enim ab æqualibus, & ſimilibus planis φPθ; βOδ, & æqualiter ab axe IL diſtantibus); etiam ſegmenta XθPNωφ & YβδMCO æqualia erunt. Eſt autem & ſegmentum θTEPφS æquale ſegmento δRCOβω. Ergo ſolidum XTENωS æquatur ſolido ωCRMY, & ſegmento XθPNωφ bis ſumpto; hoc eſt ſolido ωCRMY, & ſegmento ſphæroïdico bis ſumpto, quod fit à plano φPθ circa IL, ſiue à plano SET circa GF in orbem ducto. Sed, quia EN ex conſtr. æquatur maximæ annuli peripheriæ EH, ſolido XTENωS æquatur ᵃ Ellipticum annulare ſegmentum, quod fit à plano SET; & ſolido ωCRMY æquatur ᵇ ſegmentum annulare, factum à plano ωCR. Ergo ſegmentum annulare factum ab SET æquatur annulari ſegmento facto ab ωCR, & ſphæroïdico ſolido bis ſumpto, quod fit à plano SET, circa FG circumacto. Quod erat demonſtrandum.

a 1. de conſtr. 34. l. 3. huius. b Oſtenſum 34. l. 3. huius. c Oſtenſum 31. l. 3 huius. d Coroll. 1. p. 15. l. 1. huius. e Ibidem. a 28 l. 5. huius. b Ibidem.

Pro annulo patente conſtruantur eadem quæ *prop.* 33. & 35. Reliqua demonſtratio omnis eadem erit, quæ pro annulo clauſo, hoc ſolùm immutato, vt cum in præcedenti demonſtratione citantur *prop.* 34. & 28. *huius libri*, citentur earum loco 35. & 31. *eiuſdem libri.*

Schematiſmus 13 Fig. 93. 94 91. 92.

PROPOSITIO XXXIX.

Iiſdem poſitis, quæ in præcedenti, Ellipticum annulare ſegmentum, quod fit à plano SFGT, excedit ſegmentum annulare genitum a plano ωFGR ſphæroïdico ſegmento bis ſumpto, quod producitur ab eodem plano SFGT, vel ωFGR, circa FG in orbem ducto.

Schematiſmus 13 Fig. pro longo 93. 94. 95. 96. Fig. pro lato 89. 90. 91. 92.

SEgmentum annuli factum à genitricis Ellipſeos ſemiſſe FEG excedit ᶜ ſegmentum annuli factum à ſemiſſe alterâ FCG, ſphæroïde bis ſumptâ, quæ fit ab Ellipſi FCGE circa FG circumactâ. Item annuli ſegmentum factum à plano SET ᵈ excedit factum à plano ωCR, ſphæroïdico ſegmento bis ſumpto, quod fit à plano SET, circa FG circumacto. Ergo reliquum ſegmentum annuli genitum à plano SFGT excedit reliquum, quod fit à plano ωFGR, circa FG circumacto ſegmento reliquo ſphæroïdico bis ſumpto, quod fit à plano SFGT circa FG circumacto. Quod erat demonſtrandum.

c 17 l. 3. huius. d Præced.

Ex his facilè concludetur de ſegmentis reliquis.

PROPOSITIO XL.

Omnis annuli ᵃ Parabolici, & Hyperbolici pars, exterior excedit ᵇ interiorem, Parabolæ, vel Hyperbolæ genitricis conoïde bis ſumptâ.

Et omnis annuli geniti à quâuis planâ figurâ, axem FD habente diametro reuolutionis AD perpendicularem, pars exterior excedit interiorem, rotundo ſolido bis ſumpto, quod fit à figurâ genitrice EFC circa figuræ axem FD, reuolutionis diametro AD inſiſtentem, in orbem ductâ.

Schematiſmus 14 Fig. 97. 98. 99. 100. a Defin. 19 l. 3. huius. b Defin. 15. l 3 huius. c Defin. 16. l. 3 huius.

enim voco
à) altitudi-
lano EN-
ductâque
rſum per
KL, ſeu
C. Soli-
D, & al-
OLK,
es OQ,
ſolido

runt
Z
& D-
dif-
EC,
KL,
m-

rit

ſe

ta-
la-
t à
ore
nita

Google

genita à planis φPθ, δβO ſimilibus, & æqualibus, & æqualiter ab axe KL diſtantibus; etiam ſegmenta φθXαNP, & MYδβOQ æqualia erunt. Quoniam igitur ſolidum PφθSTE æquatur ſolido δβOCωR; erit ſolidum αXNETS par ſolido MQYωRC, & φθXαNP bis ſumpto; hoc eſt ſolido MQYωRC, & cauo ſolido bis ſumpto, quod fit à plano Pφθ circa KL circumducto. Sed quia EN, CQ peripheriis annuli, maximæ EH, & minimæ CM æquales ſunt, ſegmentum annuli genitum à plano SET, æquatur [a] ſolido αXNETS, & ſegmentum annulare genitum à plano ωCR æquatur [b] ſolido MQYωRC. Ergo ſegmentum annuli genitum à plano SET, æquatur ſegmento annuli genito à plano ωCR, & totundo ſolido cauo bis ſumpto, quod fit à plano Pφθ circa KL, hoc eſt à plano SET circa DF circumacto. Quod erat demonſtrandum.

a 31. l. 3. huius.
b Ibidem.

Secundæ partis demonſtratio ex iam dictis facilè elicietur.

Demonſtratio pro annulo clauſo ſimilis eſt præcedenti; ſed pro 31 illic citatâ hic citabitur *prop.* 28.

Schematiſmus 14 *Fig.* 97. 98.

PARS QVARTA.

PROPOSITIO XLII.

Annulus circularis clauſus ad ſphæram circuli genitoris eam rationem habet, quam circuli circumferentia ad duas tertias partes ſuæ diametri.

DAtus ſit clauſus annulus à circulo FCKA generatus; latitudo ſit AC; polus A; peripheria media ED. Fiat ſuper genitore circulo FCKB Cylindrus rectus CH, & per diametrum FK, ac punctum G abſcindatur portio FCGK: cùm annulus & Cylindrus eumdem habeant circulum genitorem FCKB, erit annulus ad Cylindrum, vt [c] peripheria annoli media ED ad altitudinem Cylindri CG. Similiter ſphæra à circulo FCKB genita, eſt ad portionem FCGK, vt [d] peripheria FCKB (hoc eſt vt peripheria [e] media ED) ad altitudinem CG. Ergo annulus eſt ad Cylindrum, vt ſphæra ad portionem. Ergo permutando annulus eſt ad ſphæram, vt Cylindrus ad portionem. Atqui Cylindrus eſt ad portionem vt [f] circumferentia circuli ad duas tertias partes diametri, quemadmodum libro primo *prop* 40. demonſtrauimus. Ergo etiam annulus eſt ad ſphæram circuli genitoris, vt circumferentia circuli ad duas diametri tertias. Quod erat demonſtrandum.

Schematiſmus 15 *Fig.* 109. 110.
c 6. l. 3 huius.
d 13. l. 1. huius.
e *Vide def.* 9. l. 3 huius.
f 40. l. 1. huius.

Scholium.

Q*Vod in Cylindro circulari eſt portio per latus & centrum baſis abſciſſa, hoc eſt in annulo circulari clauſo ſphæra genitoris circuli ipſi annulo inſcripta, uti ex hac* prop. 42. *& totâ* huius libri *parte tertia manifeſtum eſt.*

PROPOSITIO XLIII.

Annulus circularis patens ad ſphæram genitoris circuli eam habet proportionem, quam media annuli peripheria (ED) ad duas tertias partes latitudinis annuli (CB.)

Schematiſmus 15 *Fig.* 108.

DAtus ſit patens annulus à circulo FCKB generatus; latitudo annuli ſit BC; polus A; peripheria media ED. Ab eodem circulo FCKB, circa polum B in orbem ducto, producatur clauſus annulus CQ, cuius peripheria media ſit EN. Quia patens, & clauſus annuli ab eodem circulo ſunt geniti, erit patens ad clauſum, vt [a] AE ad BE; hoc eſt vt [b] peripheria ED ad peripheriam EN, ſiue [c] FCKB. Sed annulus clauſus eſt ad ſphæram genitoris circuli FCKB, vt [d] peripheria FCKB ad duas tertias diametri CB. Igitur ex æquo annulus patens eſt ad ſphæram genitoris circuli FCKB, vt peripheria media ED ad duas tertias ipſius CB, quæ eſt latitudo annuli. Quod erat demonſtrandum.

a 16. l. 3. huius.
b Pappus l. 5. p. 41.
c *Vide def.* 9 l 3. huius.
d Præced.

Corollarium.

[c] Inuentâ igitur ratione annuli, ſeu patentis, ſeu clauſi ad ſphæram annulo inſcriptam, exhibebitur

ui

uas
I, à
El-
al-
cir-
hoc
. 1.
tan-
rtio-
raui-
t cir-

m ab-
Ellipſi
& hu-



enitri-
i peri-



latam
s tertias

tque annuli
circumacta



ED ad duas
ſcribatur an-
iti, erit pa-
O, ſiue peri-
nitam ab El-
uas tertias dia-
am ab Ellipſi
ias ipſius CB,

Corolla-

Corollarium.

Dabit igitur quadraturam circuli, qui rationem annuli Elliptici ad ſphæroïdem genitricis Ellipſeos fecerit notam. Quod fieri poſſe perſpicuum eſt, cùm vtrumque corpus ab Ellipſi circulariter motâ producatur, ac proinde homogeneum ſit.

PROPOSITIO XLVI.

Omnis annulus clauſus Parabolicus ad genitricis Parabolæ conoïdem, eam habet rationem, quam 16 ad 3.

DAta ſit Parabola DEB, axem habens CE ordinatim axi applicatam DCB; quæ polo B, *Schematiſmus 16*
ſiue A, in orbem ducta deſcribat annulum, cuius latitudo ſit DB; peripheria verò me- *Fig 119.*
dia CF. Eadem deinde Parabola circa axem EC circumacta deſcribat conoidem. *118.*

Oportet oſtendere annulum eſſe ad conoïdem, vt 16 ad 3. Super genitrice Parabolâ DEB
conſtituatur Cylindrus Parabolicus DBK; perque H, punctum in latere BH, & axem EC
abſcindatur portio CEHB. Quoniam ab eadem Parabolâ geniti ſunt annulus & Cylindrus,
erit ª annulus ad Cylindrum, vt peripheria annuli media CF ad Cylindri altitudinem BH *a 6.l.3 huius.*
Conoïs quoque genita à Parabolâ circa axem EC circumactâ, eſt ad portionem EHBC, vt
eſt ᵇ peripheria radio BC deſcripta, hoc eſt vt peripheria media CF, ad altitudinem BH, *b 17.l.1. huius.*
quemadmodum *prop.* 17. *lib.* 1. oſtenſum eſt. Ergo annulus eſt ad Cylindrum, vt conoïs ad *c 42.l.1.*
portionem. Quare permutando, annulus eſt ad conoïdem, vt Cylindrus ad portionem. At- *huius.*
qui demonſtratum eſt ᶜ Cylindrum eſſe ad portionem CEHB vt 16 ad 3. Ergo etiam annulus eſt ad conoïdem vt 16 ad 3. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Ex hoc theoremate, quin & ex totâ parte tertiâ huius libri patet, quod in Parabolico Cylindro eſt portio per latus, & baſeos axem abſciſſa, hoc in clauſo Parabolico annulo eſſe genitricis Parabolæ conoïdem.

PROPOSITIO XLVII.

Omnis patens annulus Parabolicus ad conoïdem genitricis Parabolæ rationem habet compoſitam ex ratione diametri reuolutionis ad ſemiſſem latitudinis annuli, & ex ratione 16 ad 3.

ESto Parabola DEB, axem habens EC, & ordinatim axi applicatam DB; quæ polo A in *Schema-*
orbem ducta, deſcribat patentem annulum Parabolicum, cuius latitudo ſit BD; diame- *tiſmus 16*
ter reuolutionis AC; peripheria media CF. Eadem deinde Parabola circa axem EC circum- *Fig. 117.*
acta formet conoïdem.

Demonſtrandum eſt annulum ad conoïdem rationem habere compoſitam ex ratione AC ad CB, & ex ratione 16 ad 3.

Parabola DEB, polo B, in orbem ducta producat annulum clauſum Parabolicum DN,
cuius peripheria media ſit CP. Patens annulus DG ad conoidem, compoſitam habet ratio-
nem ex ratione annuli patentis DG ad clauſum DN, & ex ratione clauſi DN ad conoidem.
Sed ratio patentis DG ad clauſum DN, quoniam ab eâdem ambo Parabolâ ſunt procreati,
eſt eadem cum ª ratione AC ad BC: ratio autem annuli clauſi DN ad conoidem, eſt ratio *a 16.l.3.*
16 ad 3, per præcedentem. Ergo ratio patentis annuli DG ad conoïdem, eſt compoſita ex *huius.*
ratione AC ad BC, & ex ratione 16 ad 3. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium I.

Exhibuimus hoc theoremate & præcedenti rationem Parabolici annuli ad conoïdem genitricis Parabolæ. Vtrùm igitur hæc ſolida magis homogenea ſunt quàm circularis annulus & ſphæra? neutiquam profectò. Quemadmodum enim Parabolicus annulus & conoïs ab eâdem Parabolâ circulariter motâ gignuntur, ita planè circularis annulus & ſphæra producuntur ab eodem circulo, etiam circulariter vtrobique moto. Quare ſi illorum proportio iam fuit à nobis data, poterit exhiberi etiam horum; proindeque ſit euidens poſſibilitas quadraturæ.

Corolla-



Digitized by Google

CYLINDRICORVM ET ANNVLARIVM

LIBER QVARTVS.

Ab annulorum ſoliditate gradum facio ad ſuperficiem. Hic (quod ad Lectorem præfatus ſum) mirabilis annulares inter ſuperficies ac corpora hunc cum priori libro conferenti analogia ſeſe offeret. Quod ſi Archimedes tanti fecit Cylindrum inſcripta ſibi ſphæra non ſoliditate tantùm, ſed etiam ſuperficie ſeſquialterum eſſe, vt eius inuenti ſymbolum tumulo opponi ſuo voluerit; erit fortaſſe, quod in annulis admiremur magis, in quibus ſoliditatem inter ac ſuperficiem non vna ſed multiplex, ac prope perpetua proprietatum analogia, ſubinde etiam abſoluta identitas reperietur.

PARS I.

ANnulares ſuperficies comparo tum cum Cylindricâ ſuperficie, tum inter ſe: atque inde multiplices earum proprietates patefació: è multis paucas hîc recenſeo. Omnis annuli (hoc eſt à quacumque planâ figurâ geniti; quod deinceps ſemper intellige) ſuperficies eſt ad ſuperficiem abſque baſibus Cylindri recti, ſuper figurâ genitrice erecti, vt peripheria annuli media, ad Cylindri altitudinē: & circularis annuli ſuperficies æquatur circulo, cuius radius eſt media proportionalis inter genitoris circuli diametrum, & medism annuli peripheriam. Deinde omnium annulorum ab æqualibus & ſimilibus figuris genitorum, tum ſoliditates, tum ſuperficies ſunt inter ſe, vt reuolutionum diametri [a] BA, CA, DA: & omnis patens annulus CG ſibi contigui [b] clauſi annuli BF tam ſoliditate, quàm ſuperficie, triplus eſt. & annulorum quotcumque [c] contiguorum ab æqualibus, & ſimilibus figuris genitorum, tam ſoliditates quàm ſuperficies, eam inter ſe rationem habent, quam numerorum imparium ſeries ab vnitate: omnis clauſi annuli contiguos annulos quotcumque ab æqualibus & ſimilibus ſibi figuris genitos complexi ſuperficies, omnibus contiguorum annulorum ſuperficiebus æqualis eſt: & circularis annuli maxima per polum [d] ſectio eiuſdem maximæ per figuræ genitricis axem ſectioni æqualis eſt: & alia plura, quæ vide in libri decurſu.

a *Schematiſmus* 11 *Fig.* 79.
b *Ibidem.*
c *Ibidem.*
d *Defin.* 12. & 13. *l.* 3. *huius.*

PARS II.

ANnularium ſuperficierum ſegmenta planis ad reuolutionis diametrum rectis abſciſſa conferuntur cum ſegmentis ſuperficiei ſemiſſeos Cylindricæ, planis itidem ad baſim rectis diuiſæ.

PARS III.

e Defin 17. l.3. huius. f Defin 18. l.3 huius. g Schematiſmus 13 Fig. 89. 91.

ANnulorum [e] exterior ſuperficies cum [f] interiori confertur. Igitur præter alia complura hæc demonſtrantur. Circularis annuli exterior ſuperficies interiorem excedit genitore circulo octies ſumpto: & ſi rectæ [g] ST, ωR axi FG parallelæ, æquales vtrimque auferant arcus FS, GT, Fω, GR; exteriora annularis ſuperficiei ſegmenta genita ab arcubus FS, GT, excedunt interiora ab arcubus Fω, GR producta, ſedecim circulis, quorum diameter eſt GT, vnius æqualium arcuum ſubtenſa. Vniuerſim autem annuli à quâcumque planâ figurâ geniti exterior ſuperficies interiorem ſuperat bis ſumptâ curuâ ſuperficie rotundi ſolidi, producti à figurâ genitrice circa axem, qui reuolutionis diametro rectus eſt, circumactâ. Reliqua vide in decurſu libri.

PARS IV.

HÆc poſtremò Theoremata demonſtramus.

Annuli circularis clauſi ſuperficies eſt ad ſphæræ genitoris circuli ſuperficiem, vt circumferentia circuli ad ſuam diametrum; ad ipſum verò genitorem circulum, vt circumferentia ad quartam diametri partem. Superficies circularis annuli patentis eſt ad ſuperficiem ſphæræ circuli genitoris, vt peripheria annuli media ad latitudinem annuli; ad ipſum verò genitorem circulum, vt peripheria media ad quartam latitudinis partem. Omnis circularis annuli ſiue patentis ſiue clauſi ſuperficies ad [a] maximam annuli per polum ſectionem eam rationem habet, quam circuli peripheria ad diametrum. Quod ſi innoteſcat ratio, quam habet circularis annuli exterior ſuperficies ad interiorem, circuli quadratura exhibebitur.

a Defin. 12. & 13. l.3. huius.

PARS PRIMA.

PROPOSITIO I.

Schematiſmus 15 Fig. 106. 107.

Datus ſit annulus à quacumque figurâ planâ BED, axem habente CE reuolutionis diametro AC perpendicularem, productus, polo A. Sint autem genitrici figuræ inſcripta quotcumque æqualia latera, quæ binarius metiatur, exem. gra. DF, FE, EH, HB; conſcripta verò DG, GI, IK, KO, OB, figuram tangentia in punctis D, F, E, H, B. Deinde omnia cum genitrice figurâ, polo A, ducantur in orbem. Hac ratione annulo ſuperficies curuæ inſcribentur, & conſcribentur.

Oporteat exponere quales eæ futuræ ſint.

Fig. 106. DEtur primùm patens annulus. Ad reuolutionis diametrum AC per A ducatur perpendicularis infinita, cum quâ producta latera HB, EH deorſum producta, & DF, FE producta ſurſum concurrent. Cum eâdem concurrant rectæ FH, IK in V, T, quæ parallelæ ſunt ipſi AD. Patet igitur, dum figura cum adſcriptis ſibi lineis circumagitur, rectas HBL, EHM deſcribere ſuperficies conicas integras, quarum vertices L, & M deorſum tendant: ipſas verò HB, EH deſcribere harum ſuperficierum conicarum ſegmenta, conſtituta inter parallelos circulos, quorum radij ſunt parallelæ HV, BA, & parallelæ ET, HV. Liquet ſimiliter rectas DFR, FEN eâdem rotatione formare integras ſuperficies conicas, vertices ſurſum habentes; ipſas verò DF, FE producere harum ſuperficierum conicarum ſegmenta exiſtentia inter parallelos circulos quorum radij ſunt parallelæ DA, FV, & FV, ET.

Fig. 107. In annulo clauſo ea ſola occurrit diuerſitas quod HB deſcribat integram ſuperficiem conicam.

Venio

Venio ad latera conſeripta, in annulo primùm patente. Manifeſtum eſt latera BO, DG, ſi genitrix figura circulus, aut Ellipſis eſt, deſeribere Cylindricas ſuperficies; ſi eſt hyperbola aut parabola, conicarum ſuperficierum ſegmenta efformabunt vt prius. Similiter manifeſtum eſt, IK planum annulum efficere. Media latera, quotcumque ea fuerint, ſuperficierum conicarum ſegmenta, vt ſupra progignent. *Fig.* 106.

In annulo clauſo hoc tantum contingit diuerſum, quod ſi figura genitrix Ellipſis, aut circulus eſt, BO nihil efficiat; ſi parabola, aut hyperbola, deſcribat integram ſuperficiem conicam. *Fig.* 107.

PROPOSITIO II.

Iiſdem poſitis:

Superficies conicæ à quotcumque lateribus BH, HE, EF, FD annulo inſcriptæ, æquantur rectangulo, cuius baſim conficiunt inſcripta latera, altitudo verò peripheriæ annuli mediæ CP æqualis eſt. *Schematiſmus* 15 *Fig.* 106. 107.

DVcantur Hζ, Fδ parallelæ ad figuræ axem EC: & diuidantur bifariam Bζ, Dδ in π ac β, & δC, ζC in ω ac λ. Erunt quoque βπ, & ωλ in C diuiſæ bifariam. Quoniam igitur Bζ biſecta eſt in π, erit Aπ ſemiſſis rectarum Aζ, AB. Quare cùm [a] peripheriæ ſint, vt radij, etiam peripheria radij Aπ ſemiſſis erit peripheriarum, quarum radij Aζ, AB, ſiue VH, AB. Ergo ſegmentum ſuperficiei conicæ quam deſcripſit HB, æquatur [b] rectangulo baſim habenti HB, altitudinem verò parem peripheriæ radij Aπ. *Fig.* 106. a *Pappus l.* 5. *p* 41. b *Corol. p.* 3 *l.* 2. *huius.*

Pari modo quoniam δD biſecta eſt in β, erit Aβ ſemiſſis ipſarum AD, Aδ. Quare etiam peripheria radij Aβ ſemiſſis eſt peripheriarum, quarum radij AD, Aδ; hoc eſt quarum radij AD, VF. Ergo ſegmentum ſuperficiei conicæ, quod genuit recta DF, æquatur [c] rectangulo baſim habenti DF, altitudinem verò parem peripheriæ radij Aβ. c *Corol. p.* 3. *l.* 2. *huius.*

Vtræque igitur ſuperficies ab æqualibus lateribus HB, DF productæ æquantur rectangulo ſub alterutrâ ipſarum HB, DF & ſummâ peripheriarium radijs Aπ, Aβ deſcriptarum; hoc eſt rectangulo ſub ſummâ laterum HB, DF, & peripheriarum dictarum ſemiſſe comprehenſo. Atqui peripheria media CP dictarum peripheriarum ſemiſſis eſt; cùm enim βπ biſecta ſit in C, patet radium AC ſemiſſem eſſe radiorum Aβ, Aπ. Ergo ſuperficies à lateribus HB, DF genitæ, æquantur rectangulo ſub laterum HB, DF ſummâ, & peripheriâ mediâ contento.

Eodem diſcurſu oſtendemus ſuperficies à lateribus FE, EH deſcriptas, æquari rectangulo ſub ſummâ laterum FE, EH & mediâ peripheriâ comprehenſo. Atque hoc in hypotheſi datâ ſemper eueniet. Omnes igitur ſuperficies conicæ annulo inſcriptæ æquantur rectangulo ſub omnium inſcriptorum laterum ſummâ, & peripheriâ mediâ comprehenſo. Quod erat Demonſtrandum.

In annulo clauſo varianda nonnihil demonſtratio erit. Nam HB deſcribit integram coni ſuperficiem, quæ æqualis eſt [a] triangulo, cuius altitudo HB, baſis verò peripheriâ radij VH, ſiue Bζ; hoc eſt rectangulo contento ſub HB, & peripheriâ radij Bπ ſiue Aπ. Reliqua demonſtratio vt prius inſtituetur. *Fig.* 107. a 2. *l.* 2. *huius.*

PROPOSITIO III.

Iiſdem poſitis:

Superficies à quotcumque lateribus DG, GI, IK, KO, OB annulo conſcriptis genitæ, æquantur rectangulo, cuius baſim conficiunt conſcripta lateral, altitudo verò par eſt peripheriæ mediæ CP. *Schematiſmus* 15 *Fig.* 106. 107.

DEtur primò annulus patens. Cylindricæ ſuperficies, quas DG, [b] BO, cùm genitrix figura circulus, vel Ellipſis eſt, producunt, æquantur [c] rectangulis quorum altitudines DG, BO Baſes verò peripheriæ Dα, BS radiorum AD, AB; hoc eſt ambæ ſimul æquantur rectangulo ſub alterutrâ æqualium DG, BO, & ſummâ peripheriarum Dα, BS comprehenſo; hoc eſt rectangulo ſub ſummâ laterum DG, BO, & peripheriarum Dα, BS ſemiſſe contento; hoc eſt rectangulo contento ſub ſummâ laterum DG, BO, & peripheriâ mediâ CP; peripheria enim media ipſarum Dα, BS ſemiſſis eſt, *Fig.* 106. b 1. *l.* 4. *huius.* c 4. *l.* 2. *huius.*

a 1. l. 3 huius.

Deinde annulus planus, quem producit parallelum latus IK, æquatur rectangolo ᵃ, cuius baſis IK, altitudo autem peripheria radij TE, hoc eſt rurſum peripheria media CP.

Denique ſuperficies conicas ab intermedijs lateribus GI, OK, vel alijs quotcumque, productas æquari rectangulo ſub ſummâ laterum GI, OK, & peripheriâ mediâ comprehenſo demonſtrabitur, vt in præcedenti. Omnes igitur ſuperficies annulo conſcriptæ æquantur rectangulo, ſub laterum conſcriptarum ſummâ, & mediâ peripheriâ comprehenſo. Quod erat demonſtrandum.

In clauſo annulo ſic variabitur demonſtratio: oſtenſum eſt Cylindricam ſuperficiem à DG productam, æquari rectangulo ſub DG & peripheriâ Dα contento; hoc eſt rectangulo ſub ſummâ laterum DG, BO æqualium, & ſemiſſe peripheriæ δα, quæ ipſa eſt peripheria media CP. Tum cætera vt prius.

Poſtulatum.

Superficies annulari ſuperficiei conſcriptas (de quibus hactenus) maiores eſſe annulari ſuperficie; inſcriptas verò eâdem minores exiſtere.

PROPOSITIO IV.

Schematiſmus 14 Fig. 106. 107.

Iiſdem poſitis:
Annularis ſuperficies exhauritur tam per conſcriptas ſuperficies, quàm per inſcriptas.

b 2. l. 4. huius. c 3. l. 4. huius. a Poſtulat.

SVperficies inſcriptæ ᵇ æquantur rectangulo, cuius baſis eſt ſumma laterum inſcriptorum, altitudo peripheria media: conſcriptæ verò æquantur ᶜ rectangulo cuius baſis eſt conſcriptorum laterum ſumma, altitudo etiam peripheria media. Ergo ſuperficies conſcriptæ ſunt ad inſcriptas, vt latera conſcripta ad inſcripta. Sed horum laterum differentia tandem fit datâ minor. Ergo etiam differentia conſcriptarum ſuperficierum, & inſcriptarum, fit tandem datâ minor. Atqui ᵃ annularis ſuperficies eſt minor ſuperficiebus conſcriptis, maior autem inſcriptis. Ergo differentiæ conſcriptarum, & inſcriptarum ſuperficierum reſpectu ſuperficiei annularis multò magis tandem euadent minores data. Quod erat demonſtraudum.

Corollarium.

Ex his ſatis colligitur id, quod poſtea vſui erit, ſuperficies quæ parti exteriori annularis ſuperficiei, ſeu à perimetro DFE generatæ, inſcribuntur, eandem ſuperficiem exhaurite.

PROPOSITIO V.

Schematiſmus 15 Fig. 106. 107.

Superficies annuli, quem figura genuit curuilinea plana quæcumque (DEB) axem habens (CE) reuolutionis diametro (AC) perpendicularem, æqualis eſt rectangulo ſub genitore perimetro (DFEHB, & peripheriâ annuli mediâ (CP) comprehenſo.

b Præced.

ANnulo ſuperficies inſcribantur, & conſcribantur, vt *propoſitione* 1 *huius libri* factum. Annuli ſupetficies nequit maior eſſe rectangulo ſub genitore perimetro DFEHB, & peripheriâ media CP comprehenſo. Omnes enim conſcriptæ ſuperficies, quæ ſuperficiem annuli poſſunt ᵇ excedere quantitate quantumuis paruâ, hoc eſt minori ac minori in infinitum, ſemper æquantur rectangulo ſub lateribus genitori perimetro conſcriptis; & peripheriâ mediâ comprehenſo, ideoque maiores ſunt ſemper rectangulo contento ſub perimetro genitore, & peripheriâ mediâ. Neque etiam poterit annuli ſuperficies eſſe minor rectangulo contento ſub perimetro genitore, & mediâ peripheriâ: nam omnes ſuperficies annulo inſcriptæ ſemper æquales ſunt rectangulo facto ſub lateribus genitori perimetro inſcriptis, & mediâ peripheriâ; ac proinde ſemper minores ſunt rectangulo ſub genitore perimetro, & peripheriâ mediâ contento. Ergo annuli ſuperficies rectangulo ſub perimetro genitore, & peripheriâ mediâ comprehenſo, æqualis eſt. Quod erat demonſtrandum.

Ad impoſſibile reducat, qui volet, hunc in modum. Si negas ſuperficiem annularem eſſe patem dicto rectangulo, aut maior erit, aut minor. Ponatur primò minor defectu Z. Superficiei

ficiei annulari conſcribi ſuperficies poſſunt, quæ ipſam excedant [a] exceſſu minori quàm Z. Ergo etiam hæ minores erunt dicto rectangulo, nimirum peripheriâ mediâ & genitore perimetro comprehenſo. Quod eſt abſurdum; demonſtratum [b] quippe eſt ſuperficies illas conſcriptas æquari rectangulo facto ex lateribus genitori perimetro conſcriptis & peripheriâ mediâ contento, quod maius eſt rectangulo facto ſub genitore perimetro & peripheriâ mediâ.

a Præced.
b 3. l. 4. huius.

Ponatur deinde eſſe maior exceſſu X. Superficiei annulari inſcribi poſſunt conicæ ſuperficies, quæ ab ipſa deficiant defectu [c] minori quàm X. Erunt igitur etiam hæ maiores dicto rectangulo nempe ſub perimetro genitore & peripheriâ mediâ comprehenſo: quod eſt abſurdum; cùm inſcriptæ illæ ſuperficies æquentur [d] rectangulo facto ſub lateribus inſcriptis genitori perimetro, & peripheriâ mediâ, quod minus eſt rectangulo facto ſub perimetro genitore & peripheriâ mediâ. Quoniam igitur annuli ſuperficies, nec maior nec minor eſt, rectangulo ſub genitore perimetro, & peripheriâ mediâ comprehenſo, eidem æqualis erit.

c Præced.
d 1. l. 4. huius.

PROPOSITIO VI.

Superficies annuli, quem figura curuilinea plana quæcumque (DEB) genuit, æqualis eſt curuæ ſuperficiei Cylindri recti, cuius baſis eſt genitrix annuli figura (DEB) altitudo verò æqualis peripheriæ mediæ (CP.)

Schematiſmus 15 Fig. 106. 107. 105

SVperficies annuli æquatur [a] rectangulo ſub genitore perimetro, & mediâ CP peripheriâ comprehenſo. Sed hoc æquatur [b] ſuperficiei Cylindri dati. Ergo &c.

a Præced.
b 4. l. 2. huius.

Per Heterogenea.

Ducantur in figura genitrice duæ rectæ ϑF, ζH ad figuræ axem CE, parallelæ & æqualiter ab eo diſtantes. Cùm figurâ in orbem ductâ annulum generat, puncta F & H in annuli ſuperficie producunt peripherias Fϑ, Hφ, æquales peripherijs radiorum Aϑ, Aζ. Sed peripheriæ radiorum Aϑ, Aζ ſimul ſumptæ, duplæ ſunt peripheriæ mediæ CP: ſunt enim peripheriæ, vt radij; radij autem Aϑ, Aζ ſimul ſumpti, dupli ſunt radij AC. Ergo peripheriæ Fϑ, Hφ ſimul ſumptæ æquantur peripheriæ mediæ bis, hoc eſt, duabus rectis [c] lineis FY, HQ in ſuperficie Cylindricâ per puncta F, & H deſcriptis. Quare cùm hoc ſemper in quotcumque peripherijs, & lineis rectis eueniat, ſuperficies annuli, & curua ſuperficies Cylindri æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

c Colligitur ex hyp. vide Fig. 105.

Confer cum propoſ. 5. lib. 3. & nota annularium corporum ac ſuperficierum analogiam. Quod enim hîc de ſuperficie circularis annuli, iſthîc de ſoliditate oſtenſum eſt.

PROPOSITIO VII.

Omnis annuli à quacumque figurâ (DEB) geniti ſuperficies ad curuam ſuperficiem Cylindri, qui pro baſi habet figuram (DEB) annuli genitricem, eam habet rationem, quam peripheria media (CP) ad altitudinem Cylindri (BZ.)

Schematiſmus 15 Fig. 106. 107. 105

SVper eâdem baſi intelligatur Cylindrus DQ, altitudinem habens BQ parem peripheriæ mediæ CP. Huius curua ſuperficies hoc eſt ſuperficies [a] annuli, eſt ad ſuperficiem curuam Cylindri DZ, vt BQ ad BZ, hoc eſt [b] vt peripheria media CP ad BZ. Quod erat propoſitum.

Poterit etiam hoc theorema demonſtrari non aſſumptâ altitudine æquali peripheriæ mediæ, vt patebit diſcurſus propoſitionum 5, & 6 conſideranti.

a Præced.
b Ex hypotheſi conſtructionis.

Confer cum propoſ. 6. lib. 3, & nota annularium ſuperficierum ac corporum analogiam.

PROPOSITIO VIII.

Si cuiuſuis annuli genitrix peripheria ita ſit ad peripheriam baſeos Cylindri, vt reciprocè Cylindri altitudo eſt ad peripheriam an-

Schematiſmus 15 Fig. 106. 107.

nuli mediam ; ſuperficies annuli , & curua Cylindri æquales erunt : & è conuerſo.

c 9. l. 4. huius. d Ex hyp. a Ex hyp. b Corol. p. 4. l. 2. huius.

SVper figurâ genitrice annuli intelligatur Cylindrus Z, altitudinem habens parem peripheriæ mediæ CP. Huius Z, Cylindri ſuperficies curua [c] æqualis erit ſuperficiei annulari : & quia peripheria baſeos Cylindri Z (ipſa nempe peripheria genitrix) eſt ad peripheriam baſeos Cylindri dati, vt reciprocè altitudo Cylindri dati eſt ad peripheriam mediam annuli, hoc eſt [a] ad altitudinem Cylindri Z, erit ſuperficies [b] Cylindri Z (hoc eſt ſuperficies annuli) æqualis ſuperficiei Cylindri dati. Quod erat demonſtrandum.

Confer cum prop. 7. l. 3. & nota analogiam.

PROPOSITIO IX.

Schematiſmus 15 Fig. 106. 107.

Omnis annuli à quacumque figurâ geniti ſuperficies ad ſuperficiem curuam cuiuſuis Cylindri, rationem habet compoſitam ex ratione peripheriæ genitricis ad peripheriam baſeos Cylindri, & ex ratione peripheriæ mediæ ad Cylindri altitudinem.

c 6. l. 4. huius. d Corol. p. 4 l. 2. huius. e Hyp. f Hyp.

SVper figurâ genitrice annuli intelligatur erigi Cylindrus Z, altitudinem habens parem peripheriæ mediæ. Erit Z Cylindri ſuperficies ſuperficiei annuli [c] æqualis. Sed eius ſuperficies ad ſuperficiem dati Cylindri rationem [d] habet compoſitam ex ratione peripheriæ baſeos (hoc eſt [e] peripheriæ genitricis) ad peripheriam baſeos Cylindri dati , & ex ratione altitudinis ſuæ (hoc eſt [f] peripheriæ mediæ) ad altitudinem Cylindri dati. Ergo &c.

Nota analogiam huius cum prop. 8. l. 3.

PROPOSITIO X.

Schematiſmus 11 Fig. 76.

Superficies annulorum à concentricis (BG, OH) circulis genitorum, eam inter ſe rationem habent, quam circulorum diametri (BD, OE.)

Et ſuperficies annulorum à quibuſuis planis figuris genitorum, poſitis circa eundem axem, qui reuolutionis diametro (AC) perpendicularis ſit, eandem inter ſe rationem habent, quam genitricum figurarum perimetri.

a 6. l. 4. huius. b Corol. p. 4 l. 2. huius. c 2. l. 4. huius.

SVper figuris genitricibus ſtatuantur Cylindri, altitudinem habentes parem peripheriæ mediæ CF, quæ annulis datis omnibus communis erit. Horum Cylindrorum curuæ ſuperficies [a] æquantur ſuperficiebus annulorum ; & ſunt [b] inter ſe , vt genitricum figurarum perimetri : hoc eſt in annulis [c] circularibus, vt diametri BD, OE. Ergo liquet propoſitum.

Confer cum prop. 9. lib. 3.

PROPOSITIO XI.

Schematiſmus 11 Fig. 77.

Omnium annulorum ſuperficies, quarum reciprocantur genitores perimetri (BFO, CGE) & reuolutionum diametri (QA, PA) æquales ſunt : & è conuerſo.

d Hypoth. e Corol. p. 4 l. 2. huius. f 6. l. 4. huius.

SVper figuris genitricibus conſtituantur Cylindri X, & Z, quorum altitudines ſint peripheriæ mediæ PN, QK. Quoniam eſt vt BFO perimeter baſeos Cylindri X, ad CGE perimetrum baſeos Cylindri Z, ita reciprocè [d] QA ad PA, hoc eſt peripheria media QK, Cylindri Z altitudo, ad peripheriam mediam PN altitudinem Cylindri X : erunt Cylindrorum X & Z ſuperficies inter ſe [e] æquales. Sed horum Cylindrorum [f] ſuperficies æquantur ſuperficiebus annulorum. Ergo & annulorum ſuperficies æquales erunt.

Similis demonſtratio conuerſæ.

Hanc confer cum prop: 10. l. 3.

PROPOSITIO XII.

Omnium annulorum ſuperficies rationem inter ſe habent compoſitam ex ratione perimetrorum genitorum (FFO, CGE) & ex ratione diametrorum reuolutionis (PA, QA.) *Schematiſmus 11 Fig. 77.*

CYlindricæ ſuperficies quarum baſes ſunt genitores perimetri, altitudines verò peripheriæ mediæ PN, QK, æquantur [a] ſuperficiebus annulorum; & rationem inter ſe habent [b] compoſitam ex ratione perimetrorum baſium BFO, CGE, & altitudinum PN, QK, hoc eſt [c] PA ad QA. Ergo &c,

Nota analogiam cum 13. lib. 3.

a 6 l. 4. huius. b Coroll. p. 4 l. 2. huius c Papp. l. 5. p. 41.

PROPOSITIO XIII.

Annulorum ab æqualibus, & ſimilibus figuris (BNE, DPF) genitorum, & ſoliditas & ſuperficies, eam inter ſe rationem habent, quam reuolutionum diametri (OA, CA): & è conuerſo. *Schematiſmus 11 Fig. 78.*

DE ſoliditate oſtenſum *prop. 16. l. 3.* nunc de ſuperficie. Superficies Cylindrorum, quorum baſes ſunt figuræ BNE, DPF; altitudines verò peripheriæ mediæ OH, CG, cùm per hyp, perimetros baſium BNE, DPF æquales habeant, ſunt inter [d] ſe, vt altitudines OH, CG, hoc eſt [e] vt OA, CA. Sed hæ Cylindricæ ſuperficies [f] æquantur ſuperficiebus annularibus, quas producunt perimetri BNE, DPF polo A. Ergo etiam annulares ſuperficies ſunt inter ſe, vt OA ad CA. Quod erat demonſtrandum.

Hic enimvero inter annulorum ſoliditatem ac ſuperficiem proprietatum non tam analogia, ſed identitas eſt.

d Corol p. 4 l. 2 huius. e Papp. l. 5. p. 41. f 6. l. 4. huius.

PROPOSITIO XIV.

Annulus patens, ſibi contigui clauſi annuli, ab æquali & ſimili figura geniti, tam ſuperficie quàm ſoliditate triplus eſt. *Schematiſmus 11 Fig. 79.*

DE ſoliditate oſtenſum *17. l. 3:* nunc de ſuperficie. Æquales ac ſimiles figuræ genitrices ſint QGR, RFA æqualibus baſibus QR, RA impoſitæ, & ſibi contiguæ; quæ polo A in orbem ductæ, annulos deſcribant. Oportet oſtendere ſuperficiem patentis annuli a figurâ QGR procreati, eſſe triplam ſuperficiei annuli clauſi, producti à figurâ RFA.

Puncta media ſint C & B, ac proinde [a] reuolutionum diametri CA, BA. Quoniam ex hyp. latitudines QR, AR æquales ſunt, & biſariam diuiſæ [b] in C & B, patet CA eſſe triplam BA. Atqui datorum annulorum ab æqualibus & ſimilibus figuris genitorum ſuperficies [b] ſunt inter ſe, vt reuolutionum diametri CA, BA. Ergo annulus patens ſibi contigui clauſi ab æquali & ſimili figurâ geniti, etiam quoad ſuperficiem triplus eſt. Quod erat demonſtrandum.

En Rurſum non modo analogia proprietatum, ſed abſoluta identitas, inter ſoliditates ac ſuperficies annulorum.

a Defin. 7. & 8. l. 3. huius. b Ibidem.

PROPOSITIO XV.

Annuli contigui, quorum primus ſit clauſus, ab æqualibus, & ſimilibus geniti figuris (AFR, RGQ, QHP, PKO &c.) tam quoad ſuperficiem, quàm ſoliditatem, eam inter ſe rationem habent, quam imparium ab vnitate numerorum ſeries, 1, 3, 5, 7, & eo deinceps ordine in infinitum. *Schematiſmus 11 Fig. 79.*

DE ſoliditate oſtenſum *prop. 18. l. 3. huius.* nunc de ſuperficie. Puncta annulorum media ſint B, C, D, E &c. & reuolutionum diametri BA, CA, DA, EA &c. Quoniam annu-

a *Collig. ex hyp.* lorum æquales [a] ſunt latitudines AR, RQ, QP, PO; & omnes bifariam ſecantur [b] in B, C, D, E
b *Defin.* 7. *l.* 3 *huius* punctis medijs; patet reuolutionum diametros BA, CA, DA, EA &c. conſtituere progreſſionem imparium ab vnitate numerorum 1, 3, 5, 7. &c. Sed datorum annulorum ab æqualibus
c 13. *lib.* 4. *huius.* & ſimilibus figuris genitorum ſuperficies [c] ſunt inter ſe, vt reuolutionum diametri. Ergo & annularium ſuperficierum datarum ratio eadem eſt, quæ numerorum ab vnitate imparium. Quod erat propoſitum.

Scholium.

Erunt fortaſſe quibus videbitur, ea quæ tribus præcedentibus theorematis demonſtrauimus, inter Geometriæ admiranda reponi poſſe. Demonſtrauerat Archimedes Cylindrum inſcriptæ ſibi ſphæræ & ſoliditate & ſuperficie ſeſquialterum eſſe. Atque hoc ſuum inuentum tanti fecit, vt ob eam vtriuſque dimenſionis adæquatam analogiam, Plutarcho teſte, ſphæram Cylindro inſcriptam ſepulchro ſuo apponi iuſſerit. Atqui hic omnino etiam adæquata, & plena analogia eſt, vt eædem proprietates & corpori, & toti ſuperficiei corporis, conueniant. Cuius quidem rei vtrum alij alia habeant exempla, ignoro: ego certè aliud hactenus in Geometria vniuerſa vix vllum reperio.

PROPOSITIO XVI.

Schematiſmus 11 *Fig.* 80. Clauſorum annulorum à ſimilibus figuris (CFA, BEA) genitorum ſuperficies, duplicatam habent latitudinum (CA, BA) rationem.

POlus ſit A; & CA, BA bifariam diuiſis in K & O, reuolutionum diametri ſint KA, OA.
a 12. *l.* 4. *huius.* b *Hyp.* Annulorum clauſorum datorum ratio compoſita [a] eſt ex ratione perimetri CFA, ad perimetrum BEA, & ex ratione KA ad OA. Sed quia genitrices figuræ [b] ſimiles ſunt, ratio perimetri CFA ad perimetrum BEA, eſt ratio CA ad BA; & ratio KA ad OA eſt etiam ratio CA ad BA. Ergo ratio datorum annulorum clauſorum compoſita eſt ex ratione CA ad BA bis ſumptâ: hoc eſt, duplicata eſt rationis CA ad BA. Quod erat demonſtrandum.

Confer cum 19. *lib.* 3.

PROPOSITIO XVII.

Schematiſmus 11 *Fig.* 79. Dati ſint quotcumque annuli contigui quorum primus ſit clauſus, geniti à figuris æqualibus & ſimilibus AFR, RGQ, QHP &c. circa polum A in orbem ductis. Datus item ſit annulus clauſus polo etiam A productus à figura AZN prioribus ſimili, contiguos annulos omnes complectens,

Huius annuli ſuperficies omnibus contiguorum annulorum ſuperficiebus æqualis erit: &, ſi intra eundem annulum millies fuerint plures contigui annuli, ab æqualibus, & ſimilibus figuris geniti, huius nihilominus ſuperficies illorum omnium ſuperficiebus æqualis erit.

QVoniam figuræ genitrices ponuntur æquales & ſimiles, latitudines annulorum AR, RQ
c 15. *l.* 4. *huius.* &c. æquales erunt. Ergo datorum annulorum ſuperficies ſunt inter ſe, [c] vt numeri totidem impares 1, 3, 5, 7 &c. quot dati ſunt annuli. Sed horum aggregatum numerorum eſt ad
d *Lemma poſt* 20. *l.* 3. *huius.* vnitatem in ratione duplicatâ eius, quam [d] habet ipſa multitudo numerorum imparium (ſiue annulorum contiguorum) ad vnitatem. Ergo etiam contiguarum annularium ſuperficierum aggregatum ad primam F annularem ſuperficiem, rationem habet duplicatam eius, quam ha-
a 16. *l.* 4. *huius.* bet multitudo annulorum ad vnitatem; hoc eſt, eius quam habet NA ad RA. Sed etiam [a] ſuperficies annuli clauſi à figurâ AZN producti, ad primam F annularem ſuperficiem duplicatam

tam habet rationem eius, quam habet NA ad RA. Ergo ſuperficies annuli clauſi à figurâ AZN producti, annulorum contiguorum intra ipſum deſcriptorum ſuperficiebus æqualis eſt. Quod erat demonſtrandum.

Vera eſt propoſitio licet nec contiguorum annulorum primus, nec ille qui contiguos complectitur, ſit clauſus. Sint enim contigui annuli ab æqualibus, & ſimilibus PKO, OLN figuris geniti, polo A, eoſque complectens annulus, polo item A productus à figurâ prioribus ſimili NSP. Puncta media contiguorum ſint M, & E. Superficies annuli geniti ab OKP æquatur rectangulo contento ſub OKP perimetro & peripheriâ mediâ puncti E per 5. *l.* 4. huius ſimiliter ſuperficies annuli geniti ab OLN æquatur rectangulo ſub peripheriâ mediâ puncti M & perimetro NLO contento. Sed hæc duo rectangula æquantur rectangulo quod fit ſub ſummâ perimetrorum NLO, OKP, & ſemiſſe peripheriarum per M, & E tranſeuntium. Ergo ſuperficies annulares genitæ ab NLO, OKP æquantur rectangulo quod fit ex perimetrorum NLO, OKP ſummâ, & ſemiſſe peripheriarum per M & E. Atqui perimetri NLO, OKP conficiunt perimetrum NSP (cùm enim ſimiles omnes ſint, erit NLO ad NSP, vt NO ad NP, & OKP ad NSP vt OP ad NP, adeóque vt NO cum OP ad NP, ſic NLO cum OKP ad NSP) & peripheriarum per M & E ſemiſſis eſt peripheria per O. Ergo ſuperficies annulares genitæ ab NLO, OKP polo A æquantur rectangulo ſub NSP, & peripheriâ per O tranſeunte comprehenſo; hoc eſt per 5. *lib.* 4. ſuperficiei annulari genitæ ab NSP polo A. Quod erat propoſitum. Similis erit demonſtratio ſi annuli eſſent impares. *Schematiſmus 11 Fig. 79.*

Conferatur cum prop. 20. lib. 3.

PROPOSITIO XVIII.

Dati ſint quotcumque annuli contigui, quorum primus ſit clauſus, geniti à figuris ſimilibus AXP, PSN circa polum in orbem actis, & latitudines annulorum AP, PN commenſurabiles ſint. Datus item ſit clauſus annulus à figurâ prioribus ſimili AZN, polo item A, procreatus, contiguos annulos comprehendens. *Schematiſmus 11 Fig. 79.*

Huius annuli ſuperficies contiguorum annulorum ſuperficiebus æqualis erit: & ſi millies fuerint plures contigui annuli latitudine commenſurabiles, à ſimilibus figuris geniti, nihilominus annuli Z ſuperficies, illorum omnium ſuperficiebus æqualis erit.

Datorum annulorũ latitudines AP, PN in partes AR, RQ, QP, PO, ON communi menſuræ æquales reſoluantur; ſuperque ijs cõſtituantur figuræ datis ſimiles AFR, RGQ, QHP, PKO, OLN, quę polo A circumactæ producant annulos. Superficies annuli à figurâ AXP geniti polo A æquatur [b] ſuperficiebus annulorum à figuris AFR, RGQ, QHP eodem A polo genitorum. Similiter [c] ſuperficies annuli producti à figurâ PSN, polo A, æquatur ſuperficiebus annulorum genitorum à figuris PKO, OLN. Igitur ſimul ſumptæ annulorum X & S ſuperficies, ſuperficiebus annulorum F, G, H, K, L ſimul ſumptis, hoc eſt ſuperficiei [a] annulari Z, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum. b *Præced.* c *Ibidem.* a *Ibidem.*

Vera erit propoſitio, licet neque primus contiguorum, neque is qui complectitur contiguos, ſit clauſus. Patet ex ſecundâ parte præcedentis.

PROPOSITIO XIX.

Si annuli patens (BCF) & clauſus (BCPE) eandem habeant genitricem figuram BHE; patentis annuli ſuperficies, ſuperficiem clauſi excedit Cylindrica ſuperficie, cuius baſis eſt figura genitrix, altitudo minimâ patentis annuli peripheria EN. *Schematiſmus 11 Fig. 81.*

Patentis annuli polus ſit A; peripheria media OF; annuli clauſi polus E; peripheria media ED. Quoniam peripheria OF æquatur [b] peripherijs OD, EN; etiam ſuperficies b *Lem. poſt 21. l. 3. huius.*

c Corol p. 4 l. 2 huius. d 6. l. 4 huius. e Ibidem.

[c] Cylindri ſuper BHE in altitudine peripheriæ mediæ OF ſuperficiebus Cylindrorum, quorum altitudines peripheriæ OD, & EN, baſis verò BHE, æqualis erit. Sed ſuperficies Cylindri ſuper baſi BHE, in altitudine OF, æquatur [d] ſuperficiei annuli polo A, à figurâ BHE producti; & ſuperficies Cylindri cuius altitudo OD, baſis verò BHE æquatur [e] ſuperficiei annuli, cuius peripheria media OD, figura autem genitrix BHE. Ergo ſuperficies annuli geniti à BHE polo A, æquatur ſuperficiei annuli clauſi, quem genuit figura BHE polo E vnà cum Cylindricâ ſuperficie, cuius baſis BHE, altitudo EN. Quod erat propoſitum.

Notetur analogia cum 21. lib. 3. huius.

PROPOSITIO XX.

Schematiſmus 12 Fig. 82.

Annulorum (BFEMK, CGDHN) ab æqualibus & ſimilibus figuris BFE, CGD genitorum, & CE ſemiſſem latitudinis communem habentium, ſuperficies differunt ſuperficie clauſi annuli, ab genitricum figurarum alterutrâ producti.

a Praced.

SVperficies annuli geniti à figurâ BFE polo A excedit [a] ſuperficiem clauſi annuli geniti ab eadẽ BFE, ſeu CGD polo E, curuâ ſuperficie Cylindri, cuius baſis BFE, altitudo peripheria EK. Ergo ſuperficies annuli à BFE polo A geniti, excedit ſuperficiẽ Cylindri ſuper CGD in altitudine EK, clauſi ſuperficie annuli geniti a BFE, polo E. Sed ſuperficies Cylindri ſuper CGD in altitudine EK æquatur [b] ſuperficiei annuli geniti à CGD polo A. Ergo ſuperficies annuli geniti à BFB polo A, excedit ſuperficiem annuli geniti à CGD polo A, ſuperficie annuli clauſi geniti à BFE polo E. Quod erat demonſtrandum.

b 6. l. 4. huius.

Notetur analogia cum 22. lib. 3.

PROPOSITIO XXI.

Schematiſmus 12 Fig. 83. 84.

Dati ſint perimetri æquales BQD, NPO, ſiue contigui ſiue diſſiti, ſiue inuicem ſecantes (duos primos caſus figuræ exprimunt) qui polo A circumacti, annulares deſcribant ſuperficies; quarum peripheriæ mediæ ſint CF, EG.

Harum ſuperficierum differentia eſt ſuperficies annuli BDQA, à figurâ BQD polo E producti; cuius nimirum reuolutionis diameter eſt CE peripheriarum mediarum interuallum.

a Lem. poſt 21. l. 3. huius. b Corol p. 4 l. 2. huius. c 6. l. 4. huius. d Ibidem. e Ibidem.

CEntro E ſpatio EC deſcribatur peripheria CH; erit hæc peripheria media annuli polo E, à figurâ BQD deſcripta. Quoniam peripheria CF peripherijs [a] CH, EG æqualis eſt; ſuntque item æquales perimetri BQD, NPO; erit ſuperficies Cylindrica, cuius baſis eſt perimeter BQD, altitudo peripheria media CF, æqualis ſuperficiebus [b] Cylindricis, quarum baſes perimetri BQD, NPO, altitudines peripheriæ mediæ CH, EG. Sed Cylindrica ſuperficies, cuius baſis BQD. altitudo CF peripheria media, æquatur [c] ſuperficiei annulari à BQD, polo A productę. & ſuperficies Cylindrica, cuius baſis BQD, altitudo peripheria media CH, æquatur ſuperficiei [d] annulari, genitæ à BQD polo E: tandem Cylindrica ſuperficies, cuius baſis NPO, altitudo peripheria media EG, æquatur annulari [e] ſuperficiei genitæ ab NPO polo A. Ergo ſuperficies annularis genita à BQD polo A, annularibus genitis à BQD polo E, & ab NPO polo A æqualis eſt; ideoque quæ fit à BQD polo E, reliquarum differentia eſt. Quod erat demonſtrandum.

Notetur analogia cum 23. lib. 3.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Omnis annuli circularis ſuperficies æqualis eſt circulo, cuius radius media proportionalis eſt inter (EC) genitoris circuli diametrum, & peripheriam annuli mediam (DZ).

Schematiſmus 13 Fig. 89. 91.

SVperficies annuli circularis cuiuſcumque æquatur rectę ſuperficiei [f] Cylindricæ, cuius altitudo par eſt peripheriæ mediæ ipſius annuli DZ; baſis autem eſt genitoris circuli perimeter EFCG. Sed Cylindrica ea ſuperficies æquatur [g] circulo, cuius radius eſt media proportionalis inter baſeos diametrum EC, & altitudinem, hoc eſt peripheriam mediam DZ. Ergo etiam ſuperficies circularis annuli æquatur circulo, cuius radius eſt media proportionalis inter EC genitoris circuli diametrum, & peripheriam mediam DZ. Quod fuit demonſtrandum.

f 6. l. 4. huius. g Arch. l. 1. de ſph. & cyl. p. 13.

PROPOSITIO XXIII.

Annuli circularis clauſi ſectio [a] per circuli genitoris axem FG, genitoris circuli quadrupla eſt.

Schematiſmus 13 Fig. 89. a Defin 14. l. 3. huius.

SEctio annuli clauſi per axem genitoris circuli facta eſt Cylindrica ſuperficies, cuius baſis par eſt peripheriæ mediæ DZ, eiuſque radius eſt æqualis reuolutionis diametro AD; altitudo autem illius eſt axis FG. Atqui ea ſuperficies Cylindrica æquatur [b] rectangulo, quod ſuperficiei Cylindricæ baſi (hoc eſt peripheriâ mediâ DZ; hoc eſt perimetro genitore, æquales enim ſunt, vtpote communem habentes radium DC) & altitudine FG continetur. Sectio igitur clauſi annuli per axem FG æquatur rectangulo ſub peripheriâ EFCG, & FG axe ſeu diametro comprehenſo, ac proinde quadrupla eſt rectanguli contenti ſub radio DF, & circumferentiæ ſemiſſe EFC, hoc eſt [c] ipſius circuli genitoris EFCG. Quod erat demonſtrandum.

b 4. l. 4. huius. c Patet ex Arch. p. 1. dimenſ. cir.

PROPOSITIO XXIV.

Omnis annuli circularis maxima [d] per polum ſectio æqualis eſt eiuſdem ſectioni [e] maximæ per axem genitoris circuli.

Schematiſmus 13 Fig. 89. 91.

GEnitor circulus eſto EFCG; eius axis FG; polus A; diameter reuolutionis AD; latitudo annuli CE. Superficies curua Cylindri, cuius baſis eſt circulus radij AD, altitudo autem genitoris circuli axis FG, eſt annuli maxima ſectio per axem FG. Sed ea Cylindrica ſuperficies æquatur [a] rectangulo, contento ſub peripheriâ radij AD, ac altitudine FG, ſiue EC. Ergo annuli per FG Cylindrica ſectio æquatur rectangulo ſub peripheriâ radij AD, ſiue mediâ DZ, & ſub diametro EC comprehenſo. Sed in patente annulo planus annulus ECHM peripheriis radiorum AC, AE comprehenſus, in clauſo autem circulus CAEH deſcriptus radio CE, æquatur [b] etiam rectangulo contento ſub EC, & peripheria mediâ DZ. Ergo in patente annulo planus annulus ECHM maxima patentis annuli ſectio per polum, in clauſo verò circulus CAEH maxima annuli clauſi per polum ſectio, æquatur ſectioni maximæ Cylindricæ per FG axem genitoris circuli. Quod erat demonſtrandum.

d Defin. 12. & 13. l. 3. huius. e Defin. 14. l. 3. huius. a 4. l. 2. huius. b p. 1. & Coroll. 1. l. 3 huius.

PARS SECVNDA.

PROPOSITIO XXV.

Datus ſit Cylindrus DQ, cuius baſis eſto circulus DEB. Ducantur diametri DB, EC ad angulos rectos, & quatuor æqualia latera ſemicirculo inſcribantur. Ducantur deinde tangentes quinque in punctis D, F, E, H, B. Super his lateribus ſemicir-

Schematiſmus 15 Fig. 105.

culo

deſcriptâ à latere FD eſſe ad planum trapezium FNID vt peripheria FAA radij βF, ſiue ET, ad maximum trapezij latus parallelum NF; hoc eſt rurſum [k] vt peripheria CQ, ad MC. Ergo omnes ſuperficies conicæ ſuperficiei QCC annulari inſcriptæ, ſunt ad omnia plana inſcripta Cylindricæ, vt peripheria CQ ad MC. Atque hoc ſemper eueniet, licet in infinitum inſcriptiones multiplicentur. Quare cùm inſuper tam annularis [a] ſuperficies QCC, quàm Cylindrica [b] per inſcripriones dictas exhauriantur, erit annularis ad Cylindricam, vt [c] peripheria CQ ad MC. Quod erat demonſtrandum.

In hac, & 5 ſequentibus obſerua vtriuſque quantitatis analogiam: quæ enim hîc de partium annularium curuâ ſuperficie; ea ipſa lib. 3. prop. 26 & 5 ſequentibus, de partium annularium ſoliditate demonſtrantur.

Margin: k *Oſtenſum eſt 27. l. 3. huius & alibi ſæpius.* a *Corol. p. 4 l. 4 huius.* b *Lem. infer.* c 1. l. 1. *huius.*

Lemma.

Superficiem Cylindricam CFDINM per inſcripta plana exhauriri, ſic oſtenditur. Per rectam HI, quæ eſt oſtenſa [d] parallela eſſe ad BD, & axi occurrit in H, facta eſt ſectio parallela baſi OILH. Vnde LHINM eſt portio recti Cylindri per punctum M in latere, & diametrum baſeos HI (vel ſi Cylindrus eſt parabolicus, aut hyperbolicus, per HI axem figuræ LIO) abſciſſa. Huius autem Cylindrica ſuperficies LKINM [e] per inſcripta trapezia LMNK &c. exhauritur. Sed & Cylindricam ſuperficiem CFDIKL per plana inſcripra CLKF &c. exhauriri ſupra [f] demonſtrauimus. Igitur tota ſuperficies Cylindrica CFDINM per tota trapezia inſcripta CMNF &c. exhaurietur. Quod erat propoſitum.

Margin: d 37. l. 3. *huius.* e *Coroll.* 1. *p.* 7. *l.* 2. *huius.* f 25. *l.* 4. *huius.*

Per heterogenea.

Sumatur in exteriori genitoris perimetri ſemiſſe CFD quoduis punctum F, perque illud in annulari quidem ſuperficie tranſeat peripheria FAA, cuius radius βF; in ſuperficie autem Cylindricâ FN recta erigatur linea. Iam oſtenſum eſt in demonſtratione præcedenti peripheriam radij ET, ſiue FAA, peripheriam eſſe ad CQ peripheriam, vt FN eſt ad CM. Igitur permutando peripheria FAA, eſt ad FN, vt peripheria CQ annuli maxima, ad CM altitudinem Cylindri. Et hoc ſemper accidet. Igitur omnes peripheriæ ſuperficiei à perimetri ſemiſſe CFD generatæ, ſunt ad omnes rectas lineas ſuperficiei Cylindricæ CFDINM, vt peripheria CQ eſt ad CM. Ergo ipſa annularis ſuperficiei pars exterior QCC à perimetri ſemiſſe genita, eſt ad Cylindricam ſuperficiem CFDINM, vt peripheria CQ ad CM. Quod erat propoſitum.

Margin: *Fig. eadem.*

Eodem diſcurſu probabitur omnes peripherias reliquæ ſuperficiei annularis, genitæ à perimetri genitoris ſemiſſe alterâ DE, eſſe ad omnes lineas rectas ſuperficiei Cylindricæ EπIDφE, vt peripheria CQ ad CM: ac proinde (quòd ſequenti *prop.* Geometricè demonſtrabimus) ipſam reliquam annularem ſuperficiem eſſe ad reliquam ſuperficiem Cylindricam EπIDφE, vt peripheria CQ ad CM.

Corollarium.

Ex his conſequens erit totam annuli clauſi ſuperficiem, eſſe ad totam Cylindricam ſuperficiem CDEπIM, hoc eſt ad ſuperficiem Cylindricam CDEOIL, vt peripheria CQ eſt ad CM; hoc eſt vt peripheria media BP ad BH altitudinem Cylindri Cζ. Atque ita habetur alia propoſitionum 6 & 7 *huius libri* per heterogenea demonſtratio.

PROPOSITIO XXVII.

Ijſdem poſitis:

Annularis clauſæ ſuperficiei pars interior quam genuit perimetri ſemiſſis altera ED; eſt ad Cylindricam ſuperficiem EπIDφE, vt CQ maxima clauſi annuli peripheria eſt ad Cylindri altitudinem CM.

Margin: *Schematiſmus* 14 *Fig.* 104. 103. *Alternis inſpicienda.*

SVperficies Cylindrica EπIMC ſemiſſis eſt ſuperficiei Cylindricæ CDEδϱM. Sed eiuſdem dimidia quoque eſt ſuperficies CDEOIL: cùm enim [a] CE dupla ſit BE, etiam MC dupla eſt HB, ſiue LC. Ergo ſuperficies EπIMC, & CDEOIL æquales ſunt. Sed tota annuli ſuperficies eſt ad ſuperficiem Cylindricam CDEOIL, vt peripheria [b] media BP, eſt ad BH; hoc eſt vt [c] peripheria CQ ad CM. Ergo etiam ſuperficies annuli eſt ad ſuperficiem

Margin: a *Ex datis.* b 7. *l.* 4. *huius.* c *Oſtenſum eſt prop.* 27. *l.* 3. *huius, & alibi*

EπIMC,

d 26. l. 4. huius. Eπ IMC, vt CQ eſt ad CM. Atqui etiam [d] exterior annularis ſuperficiei pars eſt ad ſuperficiei illius Cylindricæ partem CFDINM, vt CQ peripheria eſt ad CM. Ergo & reliqua annularis ſuperficiei pars, nempe interior, erit ad reliquam Cylindri ſuperficiem EπIDφE, vt CQ peripheria eſt ad CM. Quod fuit demonſtrandum.

Confer cum 27 lib. 3. Et nota ſuperficiei ac corporis analogiam.

PROPOSITIO XXVIII.

Schematiſmus 14 Fig. 104. 103. alternis inſpiciendæ. Iiſdem poſitis: ſuperficies annuli clauſi tam exterior QCC, quàm interior CCE, ſumptis in perimetro genitore punctis quibuſcumque F, φ, diuidatur per peripherias FA A, BB. Tum ex punctis iiſdem F & φ ductis in Cylindricâ ſuperficie rectis FN, φπ, illa ſimiliter diuidatur.

Dico annularis ſuperficiei partes ſingulas QAA, AACC, CCBB, BBEφ ſunt ad ſingulas eodem ordine Cylindricas ſuperficies CFNM, FDIN, Dφπl, Eπφ, vt peripheria annuli maxima CQ eſt ad CM Cylindri altitudinem.

PRo tribus primis partibus demonſtratio eadem erit, quæ *prop. 26. l. 4. huius.* Reliqua ſic oſtenditur. Interior ſuperficiei annularis pars E, BB, CC eſt ad Cylindri ſuperficiem EπIDΦE, vt [a] peripheria CQ eſt ad CM. Item annularis ſuperficies CCBB eſt ad Cylindricam Dφπl, vt [b] peripheria CQ eſt ad CM. Ergo reliqua ſuperficies annularis EφBB eſt ad reliquam Cylindricam Eπφ, vt peripheria CQ eſt ad CM.

a Præced.
b Per 3. partem huius propoſ.

Confer cum 28. lib. 3, & nota ſuperficiei ac corporis analogiam.

PROPOSITIO XXIX.

Schematiſmus 14 Fig. 101. 102. alternis inſpiciendæ. Datus ſit annulus patens, genitus à quacumque planâ figurâ EDC, habente axem DB reuolutionis diametro AB perpendicularem; latitudo annuli ſit EC, ordinatim poſita ad axem DB; peripheria annuli media BP; maxima CQ; minima ER.

Erigatur item ſuper figurâ genitrice EDC Cylindrus rectus Cϑ & fiat vt maxima annuli peripheria CQ, ad minimam ER (hoc eſt [c] vt AC, ad AE) ſic CM altitudo dati Cylindri ad ES; ducaturque recta MS, quæ erit in plano CMϑE per Cylindri axem ducto, & occurret axi in H. Per MS fiat ſectio MIS, plano CMϑE recta. Denique per BD axem figuræ ſiue baſeos, & per Cylindri axem fiat ſectio BHID, efficiens in plano MIS rectam, HI quæ parallela erit ad BD [d].

c Pap. l. 5. p. 41.
d Oſtenſum 17. l. 3. huius.

Dico partem exteriorem QCC ſuperficiei annularis patentis, à perimetri ſemiſſe CFD productæ, ad ſuperficiem Cylindricam CFDINM eam habere rationem, quam maxima annuli peripheria CQ ad altitudinem CM.

PErimetri geniroris ſemiſſi CFD inſcribantur duo latera CF, FD; quæ cum ipſo circa polum A in orbem acta, annulari ſuperficiei [a] inſcribent conicas ſuperficies. Super iiſdem lateribus inſcribantur ſuperficiei Cylindricæ CFDINM plana trapezia CMNF, FNID. Fiat deinde per HI ſectio LIO parallela baſi EDC: ducanturque FT, Kω, NZ parallelæ ad BD ſeu HI. Tum ex Z demittatur parallela ad MC; incidet [b] hæc in ω, ac proinde vlterius protracta cadet in T; eritque Zω par [c] NK, ideoque, & ZT par NF. Denique producatur

a Vide p. 1. l. 4. huius.
b Corol. p. 7 l. 1. huius.
c Ibidem.

tur MS donec occurrat ipſi CE in A. Quoniam CA eſt ad EA in Cylindro, vt CM ad ES; hoc eſt ex hypotheſi, vt CA ad EA in annulo; etiam diuidendo erit CE ad EA iu Cylindro, vt CE ad EA in annulo. Cùm igitur ex hyp. CE in Cylindro, & annulo eadem ſit recta, erit & EA. Quare etiam CA, TA, BA, eædem vtrobique ſunt lineæ.

His ita conſtitutis, manifeſtum eſt ſuperficiei conicæ ſegmentum ab FD genitum contineri inter parallelas peripherias FAA, & DCC, quarum radij βF, λD. Sed peripheria FAA eſt ad peripheriam DCC, vt peripheria radij AT eſt ad peripheriam BP, radij nempe AB; hoc eſt vt [d] TA ad BA, hoc eſt vt TZ ad BH; hoc eſt vt NF ad ID. Ergo parallelæ peripheriæ, inter quas conica ſuperficies lateris FD continetur, trapezij FNID parallelis lateribus FN, ID proportionales ſunt. Quare cùm etiam FD conicæ ſuperficiei latus, ſit altitudo trapezij; erit [e] ſuperficies conica ad trapezium, vt peripheria FAA conicæ ſuperficiei maxima, eſt ad NF maximum trapezij FNID parallelum latus; hoc eſt vt peripheria radij AT ad NF, ſiue ZT, hoc eſt vt [f] peripheria CQ ad CM.

d Pappus l.5.p.41.
e 5 l.2. huius
f Oſtenſum eſt 29 l.3. huius & alibi.

Pari diſcurſu oſtendam ſuperficiem à latere CF generatam, eſſe ad planum CMNF, vt peripheria CQ eſt ad CM. Ergo omnes ſuperficies annulari ſuperficiei QCC inſcriptæ, ſunt ad omnia plana inſcripta ſuperficiei Cylindricæ, vt peripheria CQ, ad CM. Atque hoc ſemper continget, licet inſcriptiones in infinitum multiplicentur. Quare cùm inſuper inſcriptionibus illis, & Cylindrica [g] ſuperficies CFDINM, & pars ſuperficiei annularis exterior [a] QCC exhauriantur; hæc erit ad illam, vt [b] peripheria CQ ad CM. Quod erat demonſtrandum.

Confer cum 29. lib. 3. & nota ſuperficiei ac corporis analogiam.

g Lemma poſt 26. l. 4. huius.
a Coroll. p. 4. l. 4. huius.
b 1 l. 1. huius.

Per Heterogenea.

Iam oſtenſum eſt peripheriam FAA eſſe ad rectam FN, vt peripheria CQ eſt ad CM: atque ita quælibet in annularis ſuperficiei parte exteriori QCC, peripheria erit ad rectam in ſuperficie Cylindricà CFDINM ei reſpondentem, vt CQ peripheria eſt ad CM. Ergo omnes peripheriæ ſuperficiei annularis QCC (hoc eſt ipſa QCC annularis ſuperficies) ſunt ad omnes rectas ſuperficiei Cylindricæ CFDINM, hoc eſt ad ipſam ſuperficiem Cylindricam; vt peripheria CQ eſt ad CM.

Fig. 101. 102.

Eodem diſcurſu etiam interior ſuperficiei annularis pars CCR (quod ſequenti *prop.* oſtendam Geometricè) eſt ad reliquam Cylindricam IπSEΦD, vt peripheria CQ ad CM.

Corollarium.

Vnde tota ſuperficies annuli patentis erit ad totam Cylindricam CDESIM, CDEOIL, vt CQ peripheria ad CM: ſicque aliter per Heterogenea demonſtrantur propoſitiones *6. & 7. lib. 4. huius.*

PROPOSITIO XXX.

Iiſdem poſitis:

Dico ſuperficiei annularis patentis partem interiorem CCR ad Cylindricam IπSEΦD eam habere rationem, quam maxima patentis annuli peripheria CQ ad altitudinem CM.

QVoniam portiones Cyliodricæ LHMI, OIHS æquales habent altitudines OS, LM (cùm enim CB, BE [a], æquales ſint, etiam LH, HO, ideoque & LM, OS æquales erunt) baſes quoque LIH, HIO æquales habent ac ſimiles; erunt [b] portionum Cylindricæ ſuperficies inter ſe æquales. Ex quo patet ſuperficiem Cylindricam CDEOIL, ſuperficiei Cylindricæ CDESIM æqualem eſſe. Atqui tota ſuperficies annuli eſt ad ſuperficiem Cylindricam CDEOIL, vt peripheria [c] media BP ad altitudinem CL, ſeu BH. Ergo etiam ſuperficies annuli, eſt ad ſuperficiem Cylindricam CDESIM, vt peripheria BP, ad BH; hoc eſt [d] vt peripheria CQ ad CM. Quare cùm etiam annularis ſuperficiei pars QCC ſit ad Cylindricæ partem CFDINM, vt [e] peripheria CQ ad CM; erit quoque annularis reliqua CCR ad reliquam Cylindricam IπSEΦD, vt peripheria CQ ad CM. Quod erat demonſtrandum.

Confer cum 30 lib. 3. & nota ſuperficiei ac corporis analogiam.

Schematiſmus 14 Fig. 101. 102. alternus inſpicienda.
a Hypoth.
b 16. l. 2. huius.
c 7. l. 4 huius.
d vti Oſtenſum eſt 29. l. 3. huius; & alibi.
e Præced.

PROPOSITIO XXXI.

Schematiſmus 14 Fig. 101. 102. alternis inſpicienda.

Ijſdem poſitis: ſuperficies patentis annuli, ſumptis in genitore perimetro punctis F, & φ, perque ea ductis peripherijs FAA, φBB, diuidatur. Similiter per rectas FN, φπ ab iiſdem punctis ductas diuidatur Cylindrica ſuperficies CDESIM.

Dico: annularis ſuperficiei ſegmenta ſingula QAA, AACC, CCBB, BBR ſunt ad ſingula eodem ordine Cylindricæ ſuperficiei ſegmenta CMNF, NFDI, DIπφ, φπSE, vt maxima annuli peripheria CQ eſt ad CM.

a Praeced. b Per 3 partem huius propoſ.

Demonſtratio pro tribus primis partibus eadem erit. quæ *propoſitionis 29. lib. 4. huius*. Poſtrema pars ſic oſtenditur. Annularis ſuperficies CCR eſt ad Cylindricam DφESπI, [a] vt peripheria CQ ad CM: & ſuperficies annularis CCBB eſt ad Cylindricam DIπφ, vt [b] peripheria CQ ad CM. Ergo & reliqua annularis BBR eſt ad Cylindricam reliquam, vt peripheria CQ, eſt ad CM. Quod erat propoſitum.

Confer cum 31. lib. 3. & nota ſuperficiei ac corporis analogiam.

PARS TERTIA.

PROPOSITIO XXXII.

Schematiſmus 13 Fig. 89. 90. alternis inſpicienda.

Superficies annuli circularis clauſi exterior, quam efficit genitoris perimetri exterior ſemiſſis GEF, interiorem productam ab genitoris perimetri interiore ſemiſſe GCF excedit ipſo genitore circulo octies ſumpto.

Genitor circulus eſto CFEG; latitudo annuli EA; polus A; axis FDG; peripheria media DZ; maxima EH.

Super genitore circulo erigatur Cylindrus rectus, altitudinem habens EN, parem maximæ annuli peripheriæ EH. Hunc ſeca per ſuum axem plano ENVC; in quo due rectam NC; per quam fiat ſectio Elliptica NLCI, recta plano ENVC. Deinde per circuli genitoris axem GF, & per axem Cylindri fiat ſectio GILF Erit IL in plano Elliptico producta [c] parallela ad GF. Igitur per IK denuò ſectio fiat PIOL parallela baſi EGCF.

c Oſtenſum 27 l. 3 huius.

Quoniam Cylindricæ portiones IPNL, LOCI, baſes habent æquales ac ſimiles, & altitudines PN, OC æquales (cùm enim ED, DC, hoc eſt PK, KO æquentur, etiam PN, OC ob triangulorum ſimilitudinem æquales erunt) earum [d] Cylindricæ ſuperficies æquales erunt. Quare cùm ſuperficies Cylindrica GEFLPI (vtpote par ſuperficiei GCFLOI) ſuperficiem GIMCYLF excedat ſuperficie portionis LOCI; ſuperficies GIENLF ſuperficiem GIMCYLF exceder ſuperficie LOCI, hoc eſt IPNL, bis ſumptâ.

d 16. l. 2. huius.

Sed, quia ex hypotheſi EN par eſt maximæ annuli peripheriæ EH, ſuperficies Cylindrica GIENLF par eſt ſuperficiei annularis [a] parti exteriori HAA; & Cylindrica GIMCYLF æquatur ſuperficiei [b] annularis parti interiori AAC: Cylindricæ demum ſuperficiei IPNL æqualis eſt ſuperficies ſphærica à genitore circulo procreata (quod ſic oſtendo: cùm tam EN, DK, quàm peripheriæ EH, DZ ipſis EC, DC proportionales ſint, erunt & inter ſe; ac proinde quia EN ponitur par peripheriæ EH, etiam DK, hoc eſt CO, hoc eſt PN, æqualis erit peripheriæ DZ mediæ; hoc eſt peripheriæ genitrici EFCG, cuius radius eſt DC, ſiue peripheriæ PLOI, cuius radius KO. Vnde cùm PN altitudo portionis par ſit circumferentiæ PLOI, ſuperficies Cylindrica [c] portionis IPNL æquatur ſuperficiei ſphæricæ, à circulo PLOI; hoc eſt EFCG, procreatæ.)

a 26. l. 4. huius. b 27. l. 4. huius. c 7. l. 1. huius.

Ergo ſuperficiei annularis pars exterior HAA excedit partem interiorem AAC ſuperficie ſphæricâ, à genitore perimetro EFCG factæ, bis ſumptâ; hoc eſt [d] genitore circulo EFCG octies ſumpto. Quod erat demonſtrandum.

d Archim. l. 1. ſph. p. 30

In hac & 10 ſequentibus obſerua planè mirabilem annularium corporum, & ſuperficierum analogiam. Quæ enim hic de ſuperficierum annularium differentiis, ea ipſa lib. 3. prop. 32. *& ſequentibus de differentiis partium annularium ſolidarum demonſtrantur.*

PROPOSITIO XXXIII.

Superficies patentis annuli exterior à genitoris perimetri ſemiſſe GEF producta, interiorem genitam à perimetri ſemiſſe alterâ FCG excedit ipſo genitore circulo octies ſumpto.

Schematiſmus 13 Fig. 91. 92. alterius inſpicienda.

Circulus genitor eſto CFEG; latitudo annuli EC; diameter reuolutionis AD; polus A; circuli genitoris axis FG; peripheria media DZ; maxima EH; minima CM.

Super genitore circulo erigatur Cylindrus rectus, cuius altitudo EN par ſit peripheriæ annuli maximę EH. Hunc ſeca per ſuum axem plano ENVC. Ex CV latere ſumpta intelligatur CQ par minimæ annuli peripheriæ CM, & ducatur recta NQ: per quam fiat ſectio Elliptica NLQI, plano ENVC recta. Deinde per genitoris circuli axem GF, & per Cylindri axem fiat ſectio GILF, faciens in Ellipties plano rectam IKL. Erit hæc [a] parallela ad GF. Per hanc igitur fiat ſectio PIOL parallela baſi EGCF. Producatur demum NQ, donec in A concurrat cum EC.

Rectæ EA, DA, CA in annulo & Cylindro ſunt [b] eædem lineæ. Quare cùm peripheria CM ponatur par rectæ CQ, etiam peripheria DZ rectæ DK [c] æqualis erit. Cùm igitur & EN ponatur par peripheriæ EH, erit PN peripheriarum EH & DZ differentia. Eſt autem etiam peripheria diametri EC, ipſa nimirum genitoris circuli peripheria EFCG, [d] differentia peripheriarum EH, DZ. Ergo PN altitudo portionis IPNL æqualis eſt peripheriæ EFCG, cuius nimirum diameter eſt EC, ſiue PO. Ergo portionis Cylindrica ſupeſficies IPNL æquatur [e] ſuperficiei ſphæræ à circulo PLOI, hoc eſt à genitore circulo EFCG productæ. Cylindrica verò ſuperficies GIENLF, eò quòd [f] altitudo EN par ſit maximæ annuli peripheriæ EH, æquatur ſuperficiei [g] annularis parti exteriori HAA: ſuperficies autem Cylindrica [h] GIMQCYLF æquatur annularis ſuperficiei parti interiori AAM.

Deinde quoniam portiones Cylindricæ IPNL, LOQI, æquales habent altitudines PN, OQ, baſes item LIP, LOI æquales ac ſimiles, earum Cylindricæ ſuperficies [i] æquales erunt. Quare cùm Cylindrica ſuperficies GEFLPI (vtpote æqualis ipſi FCGIOL) ſuperficiem GIMQCYLF excedat ſuperficie Cylindricâ LOQI, ſuperficies Cylindrica GIENLF excedet Cylindricam GIMQCYLF, bis ſumptâ Cylindricâ ſuperficie LOQI, hoc eſt IPNL.

Atqui Cylindrica ſuperficies GIENLF eſt ſuperficiei annularis pars exterior HAA; & Cylindrica GIMQCYLF, eſt annularis interior AAM: & ſuperficies Cylindrica IPNL eſt ſuperficies ſphæræ circuli genitoris; quæ omnia iam demonſtraui ſupra. Ergo ſuperficies annularis exterior excedit interiorem ſuperficie ſphæræ genitoris circuli his ſumptâ; hoc eſt [a] ipſo genitore circulo octies ſumpto. Quod erat demonſtrandum.

Confer cum 33 lib. 3. *quod hìc de ſuperficie annulari, iſthìc oſtenſum reperies de corpore.*

a *Oſtenſum* 27. *l.* 3 *huius.*
b *Oſtenſum* 29 *l.* 3. & 4. *huius.*
c 4. *l.* 2. *huius.*
d *Lemma poſt* 21 *l.* 4. *huius.*
e 7. *l.* 2. *huius.*
f *Ex Hyp.*
g 29. *l.* 4. *huius.*
h 30. *l.* 4. *huius.*
i 16 *l.* 2. *huius.*
a *Arch. l.* 1. *ſph.*

PROPOSITIO XXXIV.

Datus ſit annulus circularis clauſus generatus à circulo EFCG: in quo ducantur vtrimque STωR, parallelæ axi FG, & æquales inter ſe, quæ à genitore perimetro abſcindant æquales arcus FS, Fω, GT, GR; & ducatur recta GT, ſeu FS.

Dico: annularis ſuperficiei exteriora ſegmenta genita ab arcubus FS, GT, excedunt interiora ab arcubus Fω, GR producta, circulo, cuius diamerer GT, ſiue FS, decies ſexties ſumpto.

Schematiſmus 13 Fig. 89. 90. alternis inſpicienda.

SVper genitore circulo EFCG erigatur Cylindrus rectus, cuius altitudo EN par ſit maximæ annuli peripheriæ EH; & conſtruantur cætera, vt *prop.* 32. Præterea per rectas ST, ωR, quæ ex hypotheſi æquidiſtant FG, ducantur plana TXωS, Rδβω parallela plano GILF. Quæ in Cylindricâ ſuperficie producant rectas TθX, Sφω, Rδ, ωβ: in circulo PLOI rectas θφ, δβ; quæ parallelæ [b] erunt ad IL; in plano autem Elliptico efficiant rectas Xω, MY.

b 16. *elem.* 11.

Ducantur tandem rectæ Iθ,IP,Iϑ,IO.

a Oſtenſum 32. l. 4. huius. b 11. l. 2. huius. c Ibidem.

Quoniam PN altitudo portionis Cylindricæ IPNL æquatur [a] circumferentiæ PLOI, erit ſuperficies Cylindrica IXθ æqualis [b] circulo radij Iθ. Similiter [c] Cylindrica ſuperficies IMϑ circulo radij Iϑ æqualis erit. Sed radij Iθ, Iϑ æquales ſunt (ſubtendunt enim arcus æquales arcubus TG, RG ex hypotheſi æqualibus) ac proinde æquantur & circuli iis radiis deſcripti. Ergo ſuperficies Cylindricæ IXT, IMD æquales ſunt.

d 28. l. 4. huius. e Ibidem. f 11. l. 2. huius.

Cùm igitur ſuperficies TθIG (vtpote par ipſi GIϑR) excedat ſuperficiem IGRM ſuperficie IMϑ; ſuperficies TXIG excedet ſuperficiem GIMR, ſuperficie IMϑ, hoc eſt IXθ, bis ſumptâ. Sed, quia EN altitudo æquatur ex hypotheſi peripheriæ annuli maximæ EH; ſuperficies TXIG eſt par ſuperficiei [d] annulari genitæ ab arcu GT: & ſuperficies GIMR eſt par [e] annulari genitæ ab arcu GR: & ſuperficies IXθ eſt [f] quadrupla circuli cuius diameter eſt Iθ, ſiue GT, ac proinde ſumpta bis eſt eius circuli octupla. Ergo ſuperficies annularis genita ab arcu GT excedit genitam ab arcu GR, circulo diametri GT octies ſumpto. Ergo annulares ſuperficies genitæ ab arcubus GT, FS, exceedunt genitas ab arcubus GR, Fω, circulo diametri GT decies ſexies ſumpto. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXV.

Schematiſmus 13 Fig. 91. 92. alternis inſpicienda. quod etiam in pleriſque ſequentibus obſerua.

Datus ſit annulus patens genitus polo A ab circulo EFCG. Hunc diuidant rectæ ST, ωR, axi FG parallelæ & inter ſe æquales; quæ æquales vtrimque abſcindant arcus FS, Fω, & GT, GR: ducaturque recta GT, ſiue FS.

Dico: exterioris ſuperficiei annularis ſegmenta genita ab arcubus FS, GT, excedunt interiora, quæ fiunt ab arcubus Fω, GR, ſedecim circulis diametri GT, ſeu FS.

SVper genitore circulo Cylindrus rectus erigatur altitudinem habens EN parem peripheriæ annuli maximæ EH. Cætera conſtruantur vt *prop.* 33. & 34.

a 32. l. 4. huius. b 11. l. 2. huius. c Ibidem. d 31. l. 4. huius. e Ibidem. f 11. l. 2. huius.

Quoniam [a] oſtenſum eſt PN altitudinem portionis IPNL æquari peripheriæ PLOI, erit rurſum ſupeſficies Cylindrica IXθ æqualis circulo [b] radij Iθ; hoc eſt circulo radij Iϑ; hoc eſt quia etiam OQ par eſt peripheriæ PLOI, ſuperficiei Cylindricæ [c] IMD. Quare cùm ſuperficies Cylindrica TθIG ſuperficiem GIMR excedat ſuperficie IMD (hoc eſt IXθ) patet ſuperficiem TXIG excedere ſuperficiem GIMR, ſuperficie IXθ bis ſumptâ. Sed quia EN par eſt peripheriæ annuli maximæ EH, ſuperficies TXIG par eſt ſuperficiei [d] annulari genitæ ab arcu GT; & ſuperficies [e] GIMR æquatur annulari genitæ ab arcu GR: & ſuperficies IXθ eſt quadrupla [f] circuli, cuius diameter GT; ac proinde bis ſumpta circuli octupla eſt. Ergo ſuperficies annularis genita ab arcu GT, excedit genitam ab arcu GR, circulo diametri GT octies ſumpto. Ergo ſuperficies genitæ ab arcubus GT & FS excedunt genitas ab arcubus GR & Fω, circulo diametri GT ſumpto decies ſepties. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVI.

Schematiſmus 13 Fig. 89. 91.

Datus ſit circularis annulus, ſiue patens, ſiue clauſus, in cuius circulo genitore ducantur rectæ ST, ωR, axi FG parallelæ & inter ſe æquales, quæ æquales abſcindant arcus SET, ωCR, & ducantur rectæ GT, GE, ſiue ES, FE.

Dico: exterius annularis ſuperficiei ſegmentum ab arcu SET procreatum, excedit interius genitum ab arcu ωCR, differentiâ circulorum diametris GE, GT, ſiue FE, FS deſcriptorum ſedecies ſumptâ.

a 32. & 33. l. 4. huius.

SVperficies annularis genita à ſemicirculo FEG, excedit genitam à ſemicirculo FCG, [a] genitore circulo EFCG octies ſumpto; hoc eſt circulo diametri GE ſumpto ſedecies; eſt

enim

enim circulus EFCG, diametri nempe EC, duplus circuli cuius diameter GE. Superficies autem annulares genitæ ab arcubus FS, GT excedunt [b] ſuperficies genitas ab arcubus Fω, GR, circulo diametri GT ſedecies ſumpto. Ergo annularis reliqua genita ab arcu SET excedit reliquam ab arcu ωCR productam, differentiâ circulorum diametris GE, GT deſcriptorum decies ſexties ſumptâ. Quod erat demonſtrandum.

b 34. & 35. l. 4. huius.

Tres præcedentes confer cum 34, 35, 36, *lib.* 3.

Corollarium.

Pari ratione demonſtrabitur annulares ſuperficies genitas ab arcubus SS, TT, excedere genitas ab arcubus ωω, RR, differentiâ circulorum diametris GT, GT, ſiue FS, FS deſcriptoſum ſedecies ſumptâ.

PROPOSITIO XXXVII.

Omnis longi Elliptici annuli, ſiue patentis, ſiue clauſi exterior ſuperficies excedit interiorem ſuperficie ſphæroïdeos longæ ab Ellipſi genitrice productæ bis ſumptâ.

Et omnis annuli lati Elliptici exterior ſuperficies excedit interiorem ſuperficie ſphæroïdeos latæ ab Ellipſi genitrice productæ, bis ſumptâ.

Schematiſmus 13 *Figuræ pro annulo Elliptico longo* 95. 96 93. 94. *Pro lato.* 89 90 91. 92, *quæ prius exhibebant annulos & Cylindros circulares.*

Genitrix annuli Ellipſis eſto EFCG; latitudo annuli EC alteruter axium Ellipticorum; axis alter FG; polus A; diameter reuolutionis AD; peripheria media DZ; maxima EH.

Dico: ſuperficiem ab exteriori genitricis Ellipſeos ſemiſſe FEG productam excedere interiorem genitam à ſemiſſe alterâ FCG, ſuperficie bis ſumptâ eius ſphæroïdis, quæ fit ab Ellipſi genitrice, circa axem FG, reuolutionis diametro AD inſiſtentem, circumactâ.

Super genitrice Ellipſe EFCG conſtituatur rectus Cylindrus Ellipticus, altitudinem habens parem peripheriæ annuli maximæ EH (non exprimunt figuræ 94 & 96 eam longitudinem ob loci anguſtias) cætera omnis conſtructio, ac demonſtratio ex *prop.* 32 & 33 *libri huius* huc transferetur: ex 32 quidem pro annulo Elliptico clauſo; ex 33 verò pro patente: eo ſolùm immutato, vt pro *prop.* 7. *l.* 2. *huius* citetur & adhibeatur 13. *eiuſdem libri.*

Confer cum 37. *lib.* 3. *quod hìc de annulari ſuperficie, iſthìc demonſtratum reperies de corpore.*

PROPOSITIO XXXVIII.

Datus ſit Ellipticus annulus ſiue patens ſiue clauſus, genitus ab Ellipſi EFCG; ac præter ea, quæ poſita ſunt in præcedenti, in Ellipſi genitrice ducantur rectæ axi FG parallelæ, & inter ſe æquales, quæ proinde arcus abſcindant æquales, & ſimiles GT, GR & FS, Fω.

Dico ſuperficiei annularis Ellipticæ ſegmenta ab arcubus GT, FS producta, excedunt genita ab arcubus GR, Fω ſuperficie ſphæroïdicâ, quæ fit ab Elliptico arcu GT, ſiue FS, circa axem FG circumacto, quater ſumptâ.

Schematiſmus 13 *Fig.* 93. 94. 95. 96. *pro annulo longo ell. prolato.* 89. 90. 91. 92.

Super Ellipſe genitrice erigatur Cylindrus altitudinem habens parem maximæ annuli peripheriæ EH, & cætera pro annulo clauſo conſtruantur vt *prop.* 32, & 34: pro parente vt *prop.* 33. & 35.

Oſtendemus in annulo quidem clauſo vt *prop.* 32. in patente autem vt *prop.* 33. *l.* 4. PN altitudinem portionis Elliptico Cylindricæ IPNL, æquari circumferentiæ circuli, cuius diameter PO ſiue EC. Quare ſuperficies Cylindrica portionis IPNL æquatur [a] ſuperficiei ſphæroïdis genitæ ab Ellipſi PLOI circa axem LI; hoc eſt ab Ellipſi EFCG circa axem FG circumactâ: ſuperficies quoque IXθ, [b] ſuperficiei ſphæroidicæ genitæ ab arcu Iθ circa LI

a 13. l. 2. huius.
b Coroll. 1. p. 13. l. 2. huius.

circumacto æqualis erit. Et quoniam OQ æquatur PN: hoc eſt (vt iam diximus) peripheriæ diametri PO, etiam ſuperficies IMδ, ſphæroïdicæ genitæ ab arcu δI, circumacto circa LI, æqualis erit. Quare cùm ſuperficies ſphæroïdicæ ab arcubus Iθ, Iδ, æqualibus & ſimilibus generatæ, æquales ſint, etiam Cylindricæ ſuperficies θXI, IMδ æquales erunt.

Cùm igitur ſuperficies TθIG (vtpote par ipſi GIδR) excedat ſuperficiem GIMR, ſuperficie IMD; patet ſuperficiem TXIG ipſam GIMR excedere bis ſumptâ ſuperficie IMδ, hoc eſt θXI bis ſumptâ. Sed quoniam altitudo EN par eſt maximæ annuli peripheriæ EH; ſuperficies TXIG par eſt [c] annulari Ellipticæ ab arcu GT productæ, & ſuperficies GIMR par eſt annulari [d] genitæ ab arcu GR: & ſuperficiem IXθ iam oſtendi ſupra eſſe parem ſphæroïdicæ ſuperficiei genitæ ab arcu Iθ, circa LI; hoc eſt ab arcu GT circa FG in orbem ducto. Ergo ſuperficies annularis genita ab arcu GT excedit genitam ab arcu GR, ſphæroïdicâ ſuperficie genitâ ab arcu GT rotato circa FG, bis ſumptâ. Ergo ambæ annulares ſuperficies ab arcubus GT, & FS genitæ, excedunt ambas genitas ab arcubus GR, Fω, ſuperficie ſphæroïdicâ arcus GT, ſiue FS, quater ſumptâ. Quod erat demonſtrandum.

c 28 & 31 l. 4. huius. d Ibidem.

Confer cum 38. lib. 3, & nota analogiam.

PROPOSITIO XXXIX.

Schematiſmus 13 Fig. 93. 95. 89. 91

Iiſdem poſitis, ſiue in patente annulo Elliptico ſiue clauſo ſegmentum ſuperficiei annularis Ellipticæ genitæ ab arcu SET excedit genitam ab arcu ωCR ſphæroïdicâ ſuperficie, quæ fit ab arcu SET, ſeu ωCR, circa axem GF in orbem ducto, bis ſumptâ.

Et Annulares ſuperficies, genitæ ab Ellipticis arcubus SS, TT, excedunt genitas ab arcubus ωω, RR ſphæroïdicâ ſuperficie, quæ fit ab arcu TT, ſeu SS, circa axem FG in orbem ducto, quater ſumptâ.

a Præced. b 37. l. 4. huius.

ANnulares ſuperficies genitę ab arcubus FSGT, excedunt [a] genitas ab arcubus GR, Fω ſuperficie ſphæroïdicâ ab arcu FS deſcriptâ, quater ſumptâ, ſiue ſuperficiebus ſphæroïdicis deſcriptis ab vtroque arcu FS, GT bis ſumptis: & ſuperficies annularis tota à perimetri ſemiſſe FEG producta, excedit genitam à totâ ſemiſſe alterâ FCG, [b] ſphæroïdicâ ſuperficie, quæ fit à ſemiſſe FEG bis ſumptâ. Ergo annularis reliqua, quæ fit ab arcu SET, excedit reliquam ab arcu ωCR genitam, ſphæroïdicâ ſuperficie reliquâ, quæ fit ab arcu SET rotato circa axem FG, bis ſumptâ. Quod erat demonſtrandum.

Altera pars ſimili diſcurſu demonſtrabitur.

Confer cum 39. lib. 3.

PROPOSITIO XL.

Schematiſmus 14 Fig. 97. 98. 99. 100.

Omnis annuli parabolici & hyperbolici ſiue patentis ſiue clauſi ſuperficies exterior, quæ nimirum fit à genitoris perimetri exteriori ſemiſſe FSE, excedit interiorem, genitam à ſemiſſe alterâ FωC, ſuperficie conoïdis, quæ fit à genitrice parabolâ, aut hyperbolâ EFC circa axem FG in orbem ductâ, bis ſumptâ.

Et omnis annuli, geniti à quacumque figurâ planâ, habente axem FD reuolutionis diametro AD perpendicularem, exterior ſuperficies excedit interiorem, ſuperficie rotundi ſolidi, quod fit à genitrice figurâ circa axem reuolutionis diametro inſiſtentem reuolutâ, bis ſumptâ.

PRo annulo clauſo demonſtratio ſimilis erit demonſtrationi propoſitionis 32 *huius libri*: ſed loco propoſitionis 7, *l. 2. huius* citanda erit propoſitio 14. *eiuſdem libri*.

Pro

Pro annulo patente demonſtratio non abſimilis erit demonſtrationi propoſitionis 33. Sed loco prop. 7. *l.* 2. *huius*, iterum citanda erit 14 *eiuſdem libri*.

Confer cum 40. *lib.* 3. *Quod hic oſtenſum de ſuperficie, iſthic demonſtratum habes de corpore.*

PROPOSITIO XLI.

Datus ſit annulus, genitus à quacumque figurâ planâ EFC, axem FD habente reuolutionis diametro AD perpendicularem. Sit autem genitrix figura ſecta per rectas ST, ωR parallelas axi FD, & inter ſe æquales, quæ æquales vtrimque ac ſimiles arcus abſcindant. *Schematiſmus* 14 *Fig.* 97. 98, 99. 100.

Dico ſuperficies annulares ſingulæ genitæ ab arcubus FS, SS, SE, excedunt ſingulas genitas ab arcubus Fω, ωω, ωC, ſingulis eodem ordine ſuperficiebus rotundis, quæ fiunt ab arcubus iiſdem FS, SS, SE circa axem FD in orbem ductis, bis ſumptis.

DEmonſtrabitur vt propoſitio 38 & 39 Sed loco *Corollarij* 1, *propoſ.* 13, *l.* 2. citabitur *Coroll. p.* 15 *l.* 2. *& pro* 38, ac 37 citab tur hanc præcedens.

Confer cum 41. *lib.* 3, *& nota analogiam.*

PARS QVARTA.

PROPOSITIO XLII.

Annuli circularis clauſi ſuperficies ad ſuperficiem ſphæræ, à genitore circulo productæ, eam habet rationem, quam circumferentia circuli ad diametrum. *Schematiſmus* 15 *Fig.* 109. 110. *alternis inſpiciendæ.*

CIrculus annuli genitor eſto BKCF; polus A; latitudo annuli AC; genitoris circuli axis KF; peripheria media ED. Super genitore circulo Cylindrus erigatur rectus CH, in cuius ſuperficie ex puncto C erigatur recta CG: perque diametrum FK, & punctum G abſcindatur portio FCGK. Cùm annulus & Cylindrus eundem habeant circulum genitorem; erit annuli ſuperficies ad ſuperficiem Cylindricam HC, vt [a] peripheria media ED eſt ad Cylindri altitudinem GC. Similiter ſphæræ à circulo BKCF generatæ ſuperficies eſt ad portionis FCGK Cylindricam ſuperficiem vt [b] peripheria FCKB eſt ad CG, hoc eſt vt peripheria media ED eſt ad CG, ſunt enim peripheriæ FCKB, & ED æquales, vtpote eundem habentes radium AE. Ergo ſuperficies annuli eſt ad ſuperficiem Cylindricam CH, vt ſuperficies ſphæræ, à circulo BKCF genitæ, ad ſuperficiem portionis. Permutatim igitur ſuperficies annuli eſt ad ſuperficiem ſphæræ, vt ſuperficies Cylindrica CH eſt ad ſuperficiem portionis Cylindricam. Atqui Cylindrica ſuperficies CH [a] eſt ad ſuperficiem Cylindricam portionis, vt circuli circumferentia ad diametrum. Ergo etiam ſuperficies annuli eſt ad ſuperficiem ſphæræ genitoris circuli, vt circuli circumferentia ad diametrum. Quod erat demonſtrandum.

a 7. *l.* 4. *huius.*

b 8 *l.* 2. *huius.*

a 25. *l.* 2. *huius.*

Conferatur cum 42. *libr.* 3. *& notetur analogia ſuperficiei ac corporis.*

Scholium.

Ex hac & 42. lib. 3. *patet, quod in Cylindro circulari eſt portio per latus, & baſis centrum abſciſſa, hoc in clauſo circulari annulo, & quoad ſoliditatem, & quoad ſuperficiem, eſſe ſphæram genitoris circuli ipſi annulo inſcriptam. Quod ipſum, & totâ quoque tertiâ parte* huius 4. libri, *& ex parte ſimiliter tertia* libri 3. *manifeſtum eſt.*

PROPOSITIO XLIII.

Schematiſmus 15 Fig. 108.

Annuli circularis patentis ſuperficies ad ſuperficiem ſphæræ à genitore circulo productæ, eam habet rationem, quam peripheria annuli media (ED) ad annuli latitudinem (BC.)

a 13. l. 4. huius. b Pap. l. 5. p. 41. c Præced.

ANnuli polus eſto A; circulus genitor BKCF; latitudo BC; reuolutionis diameter AE; peripheria media ED. Ab eodem circulo BKCF in orbem ducto circa B polum, clauſus generetur annulus; cuius media peripheria ſit EN. Quia patens annulus datus & clauſus eundem habent circulum genitorem, erit patentis [a] ſuperficies ad clauſi ſuperficiem vt AE ad BE; hoc eſt [b] vt peripheria ED ad peripheriam EN, ſiue FCKB; æquales enim ſunt, cùm eundem habeant radium BE. Sed ſuperficies clauſi annuli eſt ad ſuperficiem ſphæræ genitæ à circulo FCKB vt [c] circumferentia circuli FCKB ad ſuam diametrum CB. Igitur ex æquo patentis annuli ſuperficies eſt ad ſuperficiem ſphæræ à circulo genitore FCKB productæ, vt peripheria media eſt ad BC latitudinem annuli. Quod erat demonſtrandum.

Conferatur cum 43. lib. 3. & notetur ſuperficiei, ac corporis analogia.

Corollarium.

Qui dederit in rectis lineis rationem annularis ſuperficiei ad ſphæricam, dabit quadraturam. Et poteſt in rectis lineis procul dubio ea proportio exhiberi, cùm ſuperficies annularis & ſphærica ſint homogeneæ quantitates, ab eâdem quippe circumferentiâ circulariter vtrobique motâ ambæ producuntur.

PROPOSITIO XLIV.

Schematiſmus 16 Fig. 115. 114. vel 111. 113

Datus ſit annulus clauſus, quacumque genitus planâ figurâ BKCF, axem habente KEF reuolutionis diametro AE perpendicularem. Super figurâ genitrice rectus erigatur Cylindrus CH, & per FK, & punctum G abſcindatur portio FCGK.

Dico: ſuperficies annuli eſt ad curuam ſuperficiem rotundi ſolidi, quod fit à genitrice figurâ circa KF in orbem ductâ, vt ſuperficies curua ſolidi CH eſt ad curuam abſciſſæ portionis FCGK ſuperficiem.

a 7. l. 4. huius. b 14. vel 15. l. 2. huius.

SVperficies annuli eſt ad curuam ſuperficiem Cylindri CH, vt [a] peripheria media ED eſt ad altitudinem CG. Superficies quoque rotundi ſolidi, quod fit à figurâ FCKB circa FK in orbem ductâ, eſt ad ſuperficiem portionis FCGK, vt [b] peripheria radij EC, ſiue EA eſt ad CG; hoc eſt vt peripheria media ED eſt ad CG. Annuli igitur ſuperficies eſt ad ſuperficiem Cylindri CH, vt ſuperficies rotundi ſolidi eſt ad ſuperficiem portionis FCGB. Igitur permutando annuli, ſuperficies eſt ad ſuperficiem rotundi ſolidi, quod nempe fit à genitrice figurâ circa KF in orbem ductâ, vt curua Cylindri CH ſuperficies eſt ad ſuperficiem curuam portionis FCGK. Quod erat demonſtrandum.

Obſerua analogiam cum Corollario p. 47. lib. 3.

Scholium.

Ex hac & ex Coroll. p. 47. lib. 3. *patet quod in Cylindro cuiuſuis figuræ recto ductu genito, eſt portio per latus, & baſis axem abſciſſa, hoc in annulo clauſo ab eadem figurâ producto, eſſe genitricis figuræ rotundum ſolidum ipſi annulo inſcriptum. Quod ipſum ex tota parte* 3. huius libri, *& ex parte tertia* lib. 3. *perſpicuum eſt.*

PRO-

PROPOSITIO XLV.

Datus ſit planus annulus CBD contentus peripherijs CL, BQ, centro A deſcriptis; & ducatur recta CBAN. Circa CB centro E deſcribatur circulus CKBF.

Schematiſmus 17 Fig. 121.

Dico planus annulus CBD eſt ad inſcriptum ſibi circulum CKBF, vt quadrupla ipſius NC eſt ad CB.

Annulus planus CBD eſt ad circulum CKBF, vt [a] rectangulum NCB eſt ad quadratum radij EC, hoc eſt vt rectanguli NCB quadruplum ad quadratum CB; hoc eſt [b] vt quadrupla rectæ NC eſt ad rectam CB. Quod erat demonſtrandum.

a 43. l. 4. huius. b 1 Elem. 6

PROPOSITIO XLVI.

Omnis circularis annuli ſuperficies ad ſuam maximam [c] ſectionem per polum eam rationem habet, quam circumferentia circuli ad diametrum.

Schematiſmus 17 Fig. 120. 121. c Defin. 12. & 13. l. 3. huius.

Detur primùm annulus clauſus, genitus à circulo AKCF; polus ſit A; ſectio per polum maxima, circulus ACL. Annuli huius ſuperficies eſt ad ſuperficiem ſphæræ genitoris circuli [d] vt peripheria circuli ad diametrum. Sed maxima clauſi annuli ſectio ACL, ſuperficiei ſphæræ genitoris circuli æqualis eſt; nam, & maxima ſectio ACL, & ſuperficies [e] ſphærica quadruplæ ſunt genitoris circuli. Ergo ſuperficies clauſi annuli eſt ad ſectionem maximam ACL, vt peripheria circuli ad diametrum.

Fig. 120. d 42. l. 4. huius. e Archim. l. 1. ſph. p. 30

Detur deinde patens annulus, genitus à circulo CKBF, polo A. Huius maxima per polum ſectio erit planus annulus CBD, annuli maximâ CL, & minimâ BQ peripheriâ comprehenſus; reuolutionis diameter ſit AE; quæ producatur in N, P, C; peripheria media ſit ED. Superficies dati patentis annuli eſt ad ſuperficiem ſphæræ genitoris circuli CKBF, vt [f] peripheria media ED eſt ad BC. Superficies autem ſphæræ genitoris circuli CKBF eſt ad planum annulum CBD, vt CB ad CN (cùm enim circulus CKBF ſit ad annulum planum vt [g] CB ad quadruplum ipſius CN, erit ſuperficies ſphæræ à circulo CKBF genitæ, quæ circuli ipſius quadrupla eſt, ad planum annulum, vt CB ad CN.) Ergo ex æquo ſuperficies patentis annuli eſt ad planum annulum CBD maximam ſectionem ſuam, vt peripheria media ED eſt ad CN; hoc eſt ad ſuam diametrum EP. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 121. f 43. l. 4. huius. g Præced.

Corollarium.

Tam homogeneæ quantitates ſunt annuli ſuperficies & maxima annuli ſectio, quàm ſphærica ſuperficies, & ſphæræ ſectio maxima. Quando igitur ſuperficiei ſphæricæ ad ſectionem maximam ſphæræ proportio ab Archimede reperta eſt: fieri vtique poterit, vt proportio ſuperficiei annularis ad maximam annuli ſectionem exhibeatur in lineis rectis, quod ſufficit ad quadraturam. Non requiri ſiquidem, vt ea proportio rationalis ſit, manifeſtius eſt quàm vt monere lectorem Geometram liceat.

PROPOSITIO XLVII.

Annuli circularis clauſi ſuperficies ad genitorem circulum eam rationem habet, quam circumferentia circuli ad quartam diametri partem: ſuperficies autem circularis annuli patentis ad genitorem circulum eam habet rationem, quam peripheria annuli media ad quartam partem latitudinis annuli (CB.)

Schematiſmus 17 Fig. 120. 121.

Clauſi annuli ſuperficies eſt ad ſuperficiem ſphæræ genitoris circuli AKCF [a] vt circumferentia circuli ad diametrum. Quare cùm ſuperficies huius ſphæræ circuli genitoris quadrupla [b] ſit, patet clauſi annuli ſuperficiem eſſe ad circulum genitorem, vt eſt circumferentia ad quartam diametri partem. Quod erat primum.

Fig. 120. a 42. l. 4. huius. b Archim. l. 1. ſph. & Cyl. p. 30.

Deinde

Fig. 121. *a 43. l. 4. huius.* Deinde patentis annuli ſuperficies eſt ad ſphæræ à genitore circulo productæ ſuperficiem, vt peripheria [a] media ED eſt ad annuli latitudinem CB. Ergo ad genitorem circulum, quartam nempe partem ſuperficiei ſphæricæ eſt, vt peripheria media ad quartam partem latitudinis CD. Quod erat alterum.

Corollarium.

Non magis homogeneæ quantitates ſunt ſphæræ ſuperficies & circulus annuli genitor, quàm annuli ſuperficies, & genitor annuli circulus. At illorum proportio datur in rectis lineis. Poterit ergo dari etiam horum.

PROPOSITIO XLVIII.

Schematiſmus 17 Fig. 120, 122. Si innoteſcat proportio quam circularis annuli exterior ſuperficies habet ad interiorem, dabitur circuli quadratura.

GEnitor annuli circulus eſto BKCF; axis KF; polus A. Exterior annuli ſuperficies genita à perimetri ſemiſſe KCF, ad interiorem genitam à ſemiſſe alterâ KBF, ſit vt AB ad BC. Ex AB abſcindatur FB par ipſi BC (cùm enim ſuperficies annuli exterior maior ſit quàm interior, patet ex hypotheſi AB maiorem eſſe quàm BC) & reliqua AF ſecetur biſariam in D.

Dico: circuli circumferentia eſt ad diametrum, vt CA ad DA.

Cùm enim ſuperficies annuli exterior ſit ad interiorem, vt AB ad BC, erit componendo *c Ex 32. l. 4. huius.* tota annuli ſuperficies ad interiorem, vt AC ad BC. Sed tota ſuperficies annuli æquatur [c] ſuperficiei ſphæræ genitoris circuli BKCF bis, & interiori ſuperficiei annulari bis. Ergo ſphærica ſuperficies BKCF bis cum interiori annulari bis, eſt ad interiorem annularem, vt AC ad BC. Ergo ſphærica BKCF bis, cum interiori bis, eſt ad interiorem bis vt AC ad CF, duplam BC. Ergo diuidendo, & inuertendo, interior bis eſt ad ſphæricam bis, vt CF eſt ad FA. Ergo interior bis, eſt ad ſphæricam ſemel, vt CF ad FD dimidiam FA. Ergo componendo interior bis cum ſphæricâ ſemel, eſt ad ſphæricam ſemel, vt CD ad DF. Rurſum igitur componendo interior bis cum ſphæricâ bis, eſt ad ſphæricam ſemel: vt CD cum DF ad DF, hoc *a Ibidem.* eſt, tota [a] ſuperficies annuli eſt ad ſuperficiem ſphæricam dictam, nimirum à genitore perimetro productam, vt CD cum DF ad DF. Atqui clauſi circularis annuli ſuperficies eſt ad ſphæ- *b 42. l. 4. huius.* ricam ſuperficiem factâ à genitore perimetro vt [b] circumferentia circuli ad diametrum. Ergo circumferentia circuli eſt ad diametrum, vt CD cum DF ad DF, hoc eſt vt CA ad DA. Datur igitur in rectis lineis proportio circumferentiæ ad diametrum. Quod erat propoſitum.

Confer cum vltima lib. 3. & magnam in annulis obſerua ſuperficiei, ac corporis analogiam.

Corollarium.

Ecce rurſus proportionem circumferentiæ ad diametrum reduximus ad proportionem quantitatum, quæ citra controuerſiam homogeneæ ſunt. Nullum igitur de poſſibilitate quadraturæ dubium relinquitur.

FINIS LIBRI QVARTI.

CYLIN-

CYLINDRICORVM ET ANNVLARIVM LIBER QVINTVS.

ARGVMENTVM ET DIVISIO LIBRI.

PARS I.

DEmonſtratur quamuis planam ſuperficiem, quocumque ſitu circa axem quouis, aut nullo ab ea diſtantem interuallo, in orbem ductam producere rotundum ſolidum æquale ſolido recto, quod fit ab eâdem ſuperficie ductâ in altitudinem parem circumferentiæ à centro grauitatis deſcriptæ.

PARS II.

Demonſtratur quamuis perimetrum, quocumque ſitu circa axem ab ea quomodocumque diſtantem, in orbem ductam, gignere rotundam ſuperficiem æqualem ſuperficiei rectæ, quæ fit ab eâdem perimetro, ducta in altitudinem æqualem circumferentiæ à grauitatis centro deſcripta.

PARS III.

Corporum a *rotundorum à Parabola genitorum affectiones quædam illuſtriores deducuntur.* a Vide def. 1.

PARS IV.

Viæ multiplices ac nouæ ad circuli quadraturam.

PARS V.

Solido annulari ab Hyperbola genito ſphæra exhibetur æqualis. Hinc nouæ ad Hyperbolæ quadraturam viæ aperiuntur; & reperitur ſphæra

æqualis

Digitized by Google



4. *Figura plana curuilinea axem habens*, ea dicitur, in quâ omnes lineæ rectæ vni certæ æquidiſtantes ad angulos rectos biſariam ſecantur. Rectæ autem, quæ ab axe biſecantur, ad axem ordinatim applicatæ dicuntur.

5. *Figura axem habens & continuè decreſcens*, ea dicitur, in quâ ordinatim ad axem (BE) applicatæ continuè versùs vnam partem creſcunt, versùs alteram verò decreſcunt, donec vel in punctum abeant, vel deueniatur ad aliquam minimam. Fig. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 18. 19.

Tales ſunt triangulum iſoſceles, ſemiſſes polygonorum regularium, ſemicirculus, ſemiellipſis, vel ſegmenta eorum, Parabola, Hyperbola, & aliæ innumerabiles.

6 *Figura axem habens & non continuè creſcens*, ſeu *decreſcens*, ea dicitur, in quâ ordinatim ad axem (BE) applicatæ, cùm versùs vnam partem aliquouſque creuerint, deinde rurſum decreſcunt; aut contra: ſiue quæ non continuè versùs vnam partem vel coarctantur, vel dilatantur. Fig. 13.

7, *Figura circa axem non plena*, dicatur ea, quæ remanet, poſtquam à figurâ totâ axem habente ablata fuerit figura, habens eundem axem cum totâ.

In ſchemate 15 & 16 figura circa axem non plena eſt GCRDKH, quæ remanet ſi à totâ GCDH abſtuleris GRKH. Et in ſchemate 20 figura circa axem BE non plena, eſt aggregatum Ellipſium, quæ remanent, cùm à toto HEFCDH ſubduxeris mixtilinea GKH, CKD.

8. *Lineas rectas perimetro axem habenti, ordinatim inſcriptas & circumſcriptas*, voco, cùm quæ ab axe æqualiter diſtant, ſunt æquales.

Vt in fig. 22, ſi æquales ſint DF, CI, & FG, IH, & GE, HE, dicentur perimetro DEC ordinatim inſcriptæ. In figurâ autem 23, ſi æquales ſimiliter ſint DF, CI, & FG, IH, & GE, HE, perimetro ordinatim erunt circumſcriptæ.

9. *Rectilineum figuræ ordinatim inſcriptum* dico, quod lineis rectis figuræ perimetro ordinatim inſcriptis continetur.

PARS PRIMA.

Demonſtratur quamuis planam ſuperficiem, quocumque ſitu circa axem quouis, aut nullo ab ea diſtantem interuallo, in orbem ductam, producere rotundum ſolidum æquale ſolido recto, quod fit ab eâdem ſuperficie ductâ in altitudinem parem [a] viæ centri grauitatis. a Def. 1.

Lemma I.

Figuræ planæ (DECB) axem habenti (BE) & continuè decreſcenti, poſſunt tot rectangula ordinatim ad axem poſita, & æquales habentia latitudines, inſcribi & circumſcribi, vt tam inſcripta, quàm circumſcripta à figurâ differant quantitate quauis datâ minori. Fig. 6. 7. 8. 9. 10. 11.

Demonſtrarunt Archimedes aliique; & per ſe ſatis clarum eſt.

Lemma II.

Iiſdem poſitis, ſummæ rectangulorum tam inſcriptæ quàm conſcriptæ centrum grauitatis eſt in (BE) axe figuræ. Fig. 6. 7. 8. 9. 10. 11.

Demonſtratio. Quoniam ex hyp. rectangula ſunt ad axem BE ordinatim poſita, biſecantur omnia ab axe. Singulorum igitur centra [a] grauitatis in axe ſunt; ac proinde & commune [b] omnium grauitatis centrum in axe eſt. a Arch. 9. l. 1. æquip. b Arch. 8. l. 1 æquip.

Lemma III.

Omnis figuræ planæ, axem habentis, centrum grauitatis in axe eſt.

Demonſtratio. Detur primùm figura continuè decreſcens. Quotcumque illi rectangula ad axem ordinatim poſita inſcripſeris, centrum grauitatis commune [c] omnium erit in axe. Quoniam igitur rectangula figuram [d] exhauriunt, etiam centrum grauitatis figuræ in axe erit: quod quidem eodem modo demonſtrabitur, quo id ipſum Archimedes demonſtrauit de triangulo *prop. 13. lib. 1. de æquip.* Fig. 6. 7. 8. 9. 10. 11. c Per lem. 2 d Per lem. 1

Detur deinde figura axem habens, non continuè decreſcens GBLMRETSG. Reſoluatur in tot figuras decreſcentes continuè, in quot poteſt, vti hic in quatuor, ductis ad axem Fig. 13.

BE perpendicularibus LG,MS,RT. Iam oſtenſum eſt ſingularum centra eſſe in axe. Ergo
k Arch. 8. l. 1. æquip. & commune [k] omnium in axe erit.

Lemma IV.

Fig. 15. 16. Figuræ circa axem non plenæ (GCRKDH) centrum grauitatis in axe eſt.

Demonſtratio. Ex *definitione* 7. figura tota GCDH axem habet, puta BE. Ergo eius grauitatis [a] centrum eſt in axe BE. Ruſus ex eadem *definitione*, figura ablata GRKH eumdem habet axem BE, ac proinde eius quoque [b] grauitatis centrum eſt in axe BE. Cùm ergo centra totius & ablatæ ſint in axe BE; etiam reliquæ, [c] ipſius nempe figuræ GCRKDH, centrum grauitatis in axe erit.

a Præced. b Præced. c Archim.

Lemma V.

Figuræ decreſcenti continuè inſcribi vel circumſcribi poſſunt tot rectangula ad axem ordinatim poſita, vt commune eorum grauitatis centrum diſtet à centro grauitatis figuræ, interuallo minori quocumque dato.

Demonſtratio. Demonſtrarunt hoc in circulo, Ellipſi, Parabolâ, Hyperbolâ, Archimedes, Ioannes della Faille, Paulus Guldinus, Chriſtianus Hugenius, aliique: & res de ſe ſatis manifeſta eſt, vt operæ pretium non ſit idem in reliquis figuris demonſtrare. Nam cùm tot re-
i per lem. 1. ctangula figuræ inſcribi vel circumſcribi poſſint, [i] vt figuræ & aggregati rectangulorum differentia tandem euaneſcat, hoc eſt, quâcumque datâ fiat minor; ac proinde rectangulorum illa ſeries in ipſam denique figuram deſinat; neceſſe etiam eſt, centra grauitatis ad inuicem accedere ſemper propiùs, ac tandem versùs vnum punctum interuallo quouis dato minori appropinquare.

PROPOSITIO I.

Fig. 1. 2. 3. Data ſint duo ſolida recta EG, AD, inæqualium altitudinum EF, AC, genita à quibuſcumque planis figuris VE, AB. Sit autem alia quæpiam altitudo media LK eiuſmodi, vt HF defectus eius ab altitudine EF ſit ad KI exceſſum eius ſupra altitudinem AC, vt reciprocè planum AB ad planum VE. Dico ſolidum quod fit ex vtroque plano AB, VE, in altitudinem LK ducto, æquari vtrique ſolido AD, & EG.

Demonſtratio. Fiant ET & LI æquales AC, ſitque planum LNXM æquale planis VE, AB; & ſegmentum MNX, plano VE, ſegmentum verò MNL ipſi AB ponatur æqua-
a Cor. 11. 12. le: ducanturque vtraque in altitudines LI, LK. Liquet ſolidum MNXRSQ, æquari [a] ſolido VT, & ſolidum MLNSIQ æquari ſolido AD; habent enim baſes & altitudines [b] æqua-
b Per cōſtr. c per conſtr. lia. Ob eamdem cauſam ſolida TZ, & QRSOYP æqualia erunt; cùm baſis QSR baſi αT, & altitudo YR, ſeu IK altitudini TH [c] æqualis exiſtat. Deinde quia ex hyp. HF eſt ad IK vt reciprocè planum AB, hoc eſt planum MLN, ſeu QIS, ad planum EV, ſeu ZH, ſolida quo-
d Ex 15. 12 que QISOKP, & HG [d] æqualia erunt. Totum igitur ſolidum LY vtrique EG & AD æquale eſt. Sed ſolidum LY eſt id quod fit ex planis VE, & AB, ductis in altitudinem LK, cùm planum LNXM planis VE, & AB ſit æquale. Ergo ſolidum quod fit ex vtroque plano AB, EV, ducto in altitudinem LK, æquatur vtrique ſolido AD & EG. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

Fig. 1. 2. 3. Sit planum LNXM planis VE, & AB æquale, & ſolidum LY genitum ex plano LNXM ducto in altitudinem LK, æquale ſolidis, quæ fiunt ex plano VE ducto in altitudinem EF, & ex plano AB ducto in altitudinem AC. Dico HF, IK trium altitudinum,

num, EF, LK, AC differentias, eſſe planis VE, & AB, proportionales reciprocè.

HOc eſt HF eſſe ad IK, vt AB ad VE.

Demonſtratio. Cùm planum LNXM planis VE, AB ponatur æquale, intelligatur ita diuiſum rectâ MN, vt MXN ipſi EV, & MLN ipſi AB æqualia ſint. Deinde quia HF, IK ſunt differentiæ rectarum EF, LK, ſeu XY, & AC, patet tam EH, & XY, ſeu LK; quàm XR, ſeu LI & AC æquales eſſe. Fiat inſuper ET æqualis XR, ſeu LI. Perſpicuum [a] eſt igitur ſolidum MNI ſolido AD, & ſolidum NNR ſolido VT, & ſolidum QSY ſolido TZ æquari. Cùm igitur totum quoque LY ex hypotheſi vtriſque EG, AD ſolidis ſit æquale, etiam reliquum ſolidum QSK reliquo ſolido HG æquale erit. Igitur altitudo HF eſt ad altitudinem IK, [b] vt reciprocè baſis QIS, ſeu MLN, hoc eſt AB, ad baſim HZ, ſeu VE. Quod erat demonſtrandum.

a ex Corol. 11.12.
b ex 15.12.

PROPOSITIO III.

Datum ſit planum VH, axem habens BE, reuolutionis axi NQ perpendicularem. Sit autem planum VH compoſitum ex quotcumque planis, ſiue partibus HL, GM, RS, TV, quarum centra grauitatis C, D, F, K, omnia ſint in axe BE: centrum autem grauitatis plani totius VH ſit Z, quod proinde [c] etiam erit in axe BE. *Fig. 4. 5. 13.*

c Arch. 5. l. 1. æquip.

Deinde rotunda ſolida, quæ à dictis planis HL, GM, RS, TV circa axem NQ rotatis, producuntur, ſingula ſint æqualia ſolidis rectis, quæ fiunt ab iiſdem planis, ductis in altitudines pares peripheriis, quas ſingulorum grauitatis centra C, D, F, K, circa NQ deſcribunt, quarum nempe radij ſunt AC, AD, AF, AK.

Dico, etiam rotundum ſolidum à toto plano VH, circa eumdem axem NQ productum, æquale futurum ſolido recto, quod fit ab eodem plano toto VH ducto in altitudinem parem peripheriæ deſcriptæ à totius plani centro grauitatis Z, cuius nempe radius eſt AZ.

DEmonſtratio. Quia plani HL centrum grau. eſt C, & plani GM centrum grau. eſt D, vtriuſque commune centrum O erit in eadem [d] rectâ cum C & D, nimirum in axe EBA. Peripheriæ autem à centris C, O, D circa axem NQ deſcriptæ, ſunt radiis ſuis AC, AO, AD proportionales. Quare etiam trium harum peripheriarum differentiæ (nimirum differentia primæ à ſecundâ, & differentia ſecundæ à tertiâ) trium radiorum AC, AO, AD differentiis proportionales erunt. Iam, quia C & D, ſunt centra grau. planorum HL, GM; centrum verò commune vtriuſq; eſt O, CO eſt ad DO [e] vt reciprocè planum GM ad planum HL; hoc eſt trium radiorum differentiæ binæ, ipſæ videlicet CO, DO, ſunt planis HL, GM reciprocè proportionales. Ergo etiam differentiæ binæ trium viarum, ſiue peripheriarum à centris grauitatis C, O, D, circa NQ deſcriptarum, ac proinde & rectarum ipſis æqualium, iiſdem planis HL, GM reciprocè proportionales ſunt. Ergo ſi conſtituantur tria ſolida recta, primum ſuper plano HL, in altitudine quæ ſit æqualis viæ centri C, hoc eſt peripheriæ à centro C deſcriptæ circa NQ, cuius radius AC: ſecundum ſuper plano compoſito HM cuius altitudo ſit via centri O: tertium ſuper plano GM altitudinem habens parem viæ centri D; erit [f] rectum ſolidum baſim habens HM ex vtroque plano HL, & GM compoſitam, altitudinem verò parem viæ centri O, æquale duobus ſolidis rectis, quorum baſes ſunt plana ſingillatim HL & GM, altitudines verò pares viis centrorum C, & D etiam ſingillatim. Atqui ex hypotheſi rotundum ſolidum genitum à plano HL rotato circa NQ, æquatur ſolido recto, cuius baſis eſt planum HL, altitudo verò par viæ centri C; & rotundum ſolidum geni-

d Arch. 8. 1. æquip.
e 5. 1. æquip.
f per 1. huius.

G-
li-
L,
S
o-
iæ
n-
im
es
li-
li-
a-
ir
o
ir
d
&
m
i-
i-
m
ari
135 o-
ar
li-
la.

o-
u-
K
ria

&
ſo-
a-
de-

ſit
em

piam
ando
dum
ſtum

Digitized by Google

ctum genitum ex plano HKERG ducto in viam centri ſui P, æquale ſolido rotundo quod fit ab eodem plano circa NQ; item ex hyp. rectum ſolidum ex plano toto HCDG ducto in viam ſui centri Z, æquatur rotundo ſolido quod fit circa NQ ab eodem plano HCDG. Quare cùm rotundum ſolidum totius plani HCDG, æquale ſit duobus rotundis ſolidis ſuarum partium DKCR, & HKERGB, etiam ſolidum rectum factum à plano toto HCDG in viam centri ſui Z, æquabitur duobus rectis ſolidis, quæ fiunt à plano DKCR ducto in altitudinem M, & à plano HKERGB, ducto in viam centri ſui P. Trium igitur altitudinum binæ differentiæ (nimirum differentia altitudinis M à viâ centri Z, & differentia viæ centri Z à viâ centri P) ſunt [a] planis DKCR, & HKERGB reciprocè proportionales. Iam verò cùm viæ centrorum O,Z,P, ſint ſuis radijs AO,AZ,AP proportionales, etiam viarum harum binæ differentiæ erunt radiorum dictorùm binis differentijs, quæ ſunt OZ, ZP, proportionales. Atqui radiorum differentiæ OZ, ZP, ſunt [b] reciprocè proportionales planis DKCR, HKERGB. Ergo etiam trium viarom à centris O,Z,P deſcriptarum differentiæ planis DKCR, HKERGB reciprocè proportionales ſunt. Atqui oſtendi ſupra etiam differentias binas altitudinis M, viæ centri Z, viæ centri P, eſſe planis ijſdem DKCR, HKERGB reciprocè proportionales. Ergo priores differentiæ binæ his poſtremis proportionales ſunt; hoc eſt differentia viæ centri O à viâ centri Z, eſt ad differentiam viæ centri Z à viâ centri P, vt differentia altitudinis M à viâ centri Z, eſt ad eandem differentiam viæ centri Z, à viâ centri P. Ergo differentia altitudinis M à viâ centri Z, æqualis eſt differentiæ viæ centri O ab eadem viâ centri Z. Ergo etiam altitudo M & via centri O æquales ſunt. Atqui poſueras ſolidum rectum ex plano DKCR ducto in altitudinem M, æquari rotundo ſolido eiuſdem plani DKCR. Ergo etiam ſolidum rectum ex plano DKCR ducto in viam centri ſui O, æquale eſt rotundo ſolido eiuſdem plani DKCR. Quod erat demonſtrandum.

[a] per 2. huius.

[b] Archim. 8.1. æquip.

Habes igitur, Lector, ex ipſa conclusionis negatione, concluſionem ipſam poſitiuè ac directè demonſtratam. Demonſtrationum eiuſmodi plura reperies exempla in elementis noſtris Geometriæ planæ ac ſolidæ, prop. 35. l. 5. prop. 4. l. 11, & lib. 3 *elementorum noſtrorum Arithmeticorum,* propoſ. 36. *Conſule etiam, ſi lubet, appendicem noſtram poſt elementa Geometriæ ad clariſſimum virum Danielem Lipſtorpium, quâ demonſtraui ex falſo poſſe directè deduci verum. Quod quidem neque incredibile neque alienum à veritate videri debet. Nam ex falſo ſuppoſito tanquam vero directè deduci contradictorium eius, (quod proinde neceſſariè verum eſt) nihil eſt aliud, quàm falſum à ſeipſo euerti ac deſtrui; quod naturæ falſi maximè conſentaneum eſt.*

Porro. Ex quatuor hiſce primis propoſitionibus vniuerſale theorema, quod in Synopſi huius libri, in parte prima propoſitum fuit, demonſtraturi deinceps ſumus per propoſitiones quinque ſequentes; inter quas præcipua eſt, quæ proximè ſequitur,

PROPOSITIO V.

Detur figura plana quæcumque DECB, continuè [a] decreſcens, axem habens EB reuolutionis axi NQ perpendicularem; ſitque eius grauitatis centrum Z.

Fig. 6. 7. 8. 9. 10. 11.

[a] Defin. 5.

Dico: rotundum ſolidum, quod fit ab hac figurâ circa axem NQ in orbem ducta, æquale eſſe ſolido recto, quod eadem producit ducta in altitudinem parem peripheriæ à centro ſuo grauitatis Z, radio AZ deſcriptæ.

Demonſtratio Figuræ DECB inſcribe & circumſcribe qootcumque rectangula ordinatim ad axem BE conſtituta, quorum commune grauitatis centrum ſit O. Quoniam rectangulum RL ordinatim poſitum eſt ad axem BE, eius latera ab axe ſecantur biſariam. Quare H punctum medium axis particulæ inter latera interceptæ, eſt grauitatis centrum [b] rectanguli RL. Deinde rotundum ſolidum quod fit à rectangulo RL circa axem NQ rotato, æquatur [c] ſolido recto, quod ab eodem producitur ducto in altitudinem parem peripheriæ à puncto medio H, hoc eſt (vt iam oſtendi) à rectanguli RL grauitatis centro, circa NQ deſcriptæ. Eodem modo oſtendam ſingula rotunda ſolida, quæ fiunt à reliquis rectangulis circa axem NQ in orbem ductis, æquari ſingulis ſolidis rectis, quæ fiunt ab ijſdem rectangulis ductis in ſuorum centrorum vias ſeu peripherias. Ergo rotundum ſolidum, quod fit ab omnibus rectangulis ſimul ſumptis circa NQ rotatis, æquale [m] eſt ſolido recto quod fit ab ijſdem omnibus rectangulis ductis in viam, ſeu peripheriam à communi omnium grauitatis centro O

[b] patet ex 10. 1. æquip. Archim.

[c] Demonſtraui p. 2. l. 3. Cylind. & Annul.

[m] per 3. huius.

circa NQ deſcriptam. Cùm igitur hoc ſemper contingat; & rectangulorum tam inſcriptorum quàm conſcriptorum ſeries, ſi plura ſemper & plura inſcribantur & conſcribantur, in
a Per lem. 1 ipſam a deniqꝫ DECB figuram deſinant, hoc eſt differre à figurâ poſſint quantitate quacunque datâ minori; centrumque commune rectangulorum tandem abeat in centrum figuræ Z, vt patet ex Lemm. 5; neceſſe eſt rotundum ſolidum, quod figura DECB circa axem NQ rotata producit, æquari etiam ſolido recto, quod eadem figura gignit ducta in viam ſui centri grauitatis Z. Quod erat demonſtrandum.

Hæc ſufficiunt, vt eos conuincant, qui naturam perſpexerint earum ratiocinationum, quæ per exhauſtionem procedunt. Quod enim figuræ cuipiam inſcriptis & conſcriptis figuram ipſam exhaurientibus ſemper conuenit, id ipſi etiam figuræ conuenire, facilè eſt peritis Geometris per reductionem ad impoſſibile demonſtrare: quam reductionem nihilominus, neque quis fortè eam deſideret, in proximum ſcholium conieci.

Scholium.

Suppoſitâ demonſtratione priori vſque ad conſequentiam poſtremam, quæ ita
Fig. 6. 11. *incipit,* (cum igitur hoc ſemper contingat) *ita proſequere.*

Si rotundum ſolidum quod fit à figura DECB circa NQ in orbem ducta, non eſt æquale ſolido recto, quod eadem producit ducta in viam ſui grauitatis centri Z, erit vel minus eo, vel maius.

Pars I. Ponatur primò eſſe minus defectu Y, quem ſeca in partes S, T. Inſcri-
c Per lem. 1 *bi poſſunt figuræ DECB tot rectangula axi BE ordinatim applicata, vt ſegmenta reſidua c fiant quocumque dato plano minora, ac proinde vt ducta in altitudinem parem viæ centri Z efficiant ſolidum rectum minus quàm S. Rurſum inſcribi poſſunt figuræ DECB tot rectangula, vt eorum commune grauitatis centrum O*
d per lem. 5 *diſtet d à centro figuræ Z interuallo minori quocumque dato, ac proinde vt differentia viarum. quas centra vtraque O & Z circa NQ deſcribunt, fiat datâ quâuis minor, ac proinde vlteriùs vt ſolidum rectum quod fit ab aggregato rectangulorum in dictam differentiam, ſit minus quàm T. Manifeſtum igitur eſt, figuræ DECB tot inſcribi poſſe rectangula, vt ſolidum rectum quod fit à ſegmentis reſiduis in viam centri Z, vnà cum recto ſolido, quod fit ab aggregato rectangulorum in differentiam viarum deſcriptarum à centris O & Z, minus ſit quàm Y. Iam verò ſolidum rectum genitum à ſummâ rectangulorum in viam centri ſui O, à ſolido recto genito à figura DECB in viam centri ſui Z deficit (vt oſtendam infra in lemmate) per duo recta ſolida, quorum vnum fit ex ſegmentis reſiduis in viam centri Z, alterum verò ex ſumma rectangulorum in differentiam viarum à centris O & Z deſcriptarum: hoc eſt (vt iam oſtendi) defectu minori quàm ſit Y. Atqui ponebatur rotundum ſolidum à figura DECB circa NQ productum, à ſolido recto genito à figura DECB in viam centri ſui Z, deficere quantitate Y. Ergo rectum ſolidum quod fit à ſumma rectangulorum in viam centri O, à ſolido recto facto ex figura DECB in viam centri ſui Z, deficit minori defectu, quàm ab eodem deficiat rotundum ſolidum figuræ DECB; ac proinde ſolidum rectum ex ſumma rectangulorum in viam centri O maius eſt rotundo ſolido figuræ DECB. Atqui in demonſtratione prima oſtenſum eſt rotundum ſolidum, quod à ſumma rectangulorum circa NQ producitur, æquari ſolido recto quod fit ab eadem ſumma in viam centri ſui O. Ergo etiam rotundum ſolidum quod fit à ſumma rectangulorum circa axem NQ, maius eſt rotundo ſolido quod fit à figura DECB circa axem eundem NQ, pars toto. Quod eſt eſt abſurdum.*

Fig. 8. *Cùm O centrum grau. ſummæ rectangulorum cadit vltra Z centrum figuræ DBCE, vt in Fig. 8. ita ratiocinare. Si tunc adhuc conceditur ſolidum rectum, quod fit à rectangulorum ſummâ in viam centri O, eſſe minus ſolido recto genito à figura DBCE in viam centri ſui Z, reductio ad impoſſibile procedet, vt prius. Si verò ſolidum rectum ex rectangulis in viam centri ipſorum O, aſſeritur iam eſſe æquale vel maius ſolido recto ex figura DBCE in viam centri ſui Z, etiam rotundum ſolidum genitum ex rectangulis, quod in demonſtratione prima dicto ſolido*

recto

recto ſummæ rectangulorum oſtenſum eſt æquale, erit æquale vel maius ſolido recto ex figura DBCE in viam centri Z. Atqui rotundum ſolidum genitum ex figura DBCE ponebatur minus eſſe ſolido recto genito ex figura DBCE in viam centri ſui Z. Ergo à fortiori rotundum ſolidum genitum à rectangulorum ſummæ æquale vel maius erit ſolido rotundo figuræ DBEC, pars ſuo toto. Quod eſt abſurdum.

Pars II. Ponatur deinde rotũdum ſolidum figuræ DECB eſſe maius ſolido recto producto ab eadem in viam centri ſui Z, exceſſu ω; quem ſeca in partes α & β. Patet rurſum, vt ſupra, figuræ DECB tot circumſcribi poſſe rectangula, vt ſegmenta m *reſidua quæ remanent, ablatâ ex conſcriptis rectangulis figurâ DECB, fiant dato plano minora, ac proinde vt rectum ſolidum quod fit ex illis ſegmentis reſiduis in viam centri O, ſit minus quàm α. Patet ſimiliter figuræ DECB tot circumſcribi poſſe* o *rectangula vt ipſorum commune grauitatis centrum O diſtet à Z centro figuræ DECB interuallo minori quocunque dato, adeóque vt viæ ſeu peripheriæ centrorum O, Z, differant longitudine quauis datâ minori; ac proinde vlterius vt ſolidum rectum quod fit ex figura DECB in dictam viarum differentiam ſit minus quàm β. Liquet igitur figuræ DECB tot rectangula poſſe circumſcribi, vt ſolida duo recta, quæ fiunt ex ſegmentis reſiduis in viam centri O & ex figura DECB in differentiam viarum à centris O, Z deſcriptarum, ſimul ſumpta euadant minora, quàm ω. Iam verò ſolidum rectum factum ex ſumma rectangulorum in viam centri ſui O, excedit ſolidum rectum quod fit ex figura DECB in viam centri ſui Z duobus ſolidis rectis, quorum vnum fit à ſegmentis reſiduis in viam centri O, alterum verò ex figurâ DECB in differentiam viarum à centris O & Z deſcriptarum, vt oſtendam infra in 6 Lemmate; hoc eſt exceſſu minore quàm ſit ω; hoc eſt exceſſu minore quàm quo ponebatur ſolidum rotundum figuræ DECB ſuperare idem rectum ſolidum factum ex figura DECB in viam centri ſui Z. Ergo rotundum ſolidum figuræ DECB maius eſt ſolido recto quod fit à ſumma rectangulorum in viam centri ſui O. Atqui oſtenſum eſt in demonſtratione prima rotundum ſolidum genitum à ſumma rectangulorum, æquari ſolido recto quod ab iiſdem rectangulis fit in viam centri ſui O. Ergo etiam rotundum ſolidum figuræ DECB maius erit rotundo ſolido ſummæ rectangulorum, pars toto; quod eſt abſurdum.*

Fig. 7.

m Per lem. 14

o Per lem. 5

Quando O centrum rectangulorum circumſcriptorum cadit inter Z centrum figuræ & axem reuolutionis NQ, ita ratiocinare. Si tunc adhuc conceditur rectum ſolidum, quod fit ex rectangulorum ſumma in viam centri ſui O, maius eſſe ſolido recto ex figura DBCE in viam centri ſui Z, reductio ad impoſſibile procedet, vt prius. Si verò ſolidum rectum ex ſummâ rectangulorum in viam centri O aſſeritur iam eſſe non maius ſolido recto ex figura DBCE in viam ſui centri Z, etiam ſolidum rotundum ſummæ rectangulorum, quod in demonſtratione prima dicto ſolido recto ſummæ rectangulorum oſtenſum eſt æquale, erit non maius ſolido recto ex figura DECB in viam centri ſui Z, ac proinde à fortiori non maius rotundo ſolido figuræ DECB (cùm id in hac 2. parte poſitum fuerit maius ſolido recto figuræ DECB in viam centri ſui Z): Id verò abſurdum eſt, ſic enim totum ſuâ parte non maius eſſet. Fig. 9. 10.

Quare cùm parte 1. oſtenſum ſit rotũdum ſolidum figuræ DECB circa NQ rotatæ non eſſe minus ſolido recto figuræ eiuſdem ductæ in viam centri Z, & parte 2. non eſſe maius, eidem æquale erit. Quod erat demonſtrandum.

Lemma VI.

Si recta AC ducatur in altitudinem AE, & AB recta minor quàm AC ducatur in altitudinem AD minorem quàm AE, factum ex maiori AC excedet factum à minori AB, rectangulo BG, quod fit ex rectarum differentiâ CB in altitudinem maiorem, & rectangulo DF, quod fit ex minori rectâ AB in DE altitudinum differentiam. Fig. 12.

Digitized by Google

dum ſolidum ᶜ æquatur ſolido, quod ab eodem plano fit in viam ſui centri grauitatis O. Quod erat demonſtrandum. *c per 4. huius.*

PROPOSITIO VIII.

Data ſit figura MPSHKM, axem habens EPB reuolutionis axi NQ perpendicularem, compoſita ex plano LGHK circa axem pleno, & ex MLPGS non pleno. *Fig. 17.*

Dico: rotundum ſolidum, quod fit ex figura MPSHKM circa NQ reuolutâ, æquari ſolido recto, quod fit ab eâdem ductâ in viam ſui centri grauitatis Z.

DEmonſtratio. Rotundum ſolidum plani GLKH ᵃ æquatur ſolido recto, quod fit ex plano eodem ducto in viam ſui centri C: & per præcedentem rotundum ſolidum plani MLPGS æquatur recto, quod fit ex eodem ducto in viam centri ſui D. Ergo rotundum ᵇ ſolidum plani totius æquatur recto, quod fit ex eodem ducto in viam ſui centri grauitatis Z. *a per 5. vel 6. huius. b per 3. huius.*

PROPOSITIO IX.

Data ſit figura quæcumque plana BEC, vel CKGα axem non habens, aut certè ſi axem habeat FR, non habens illum axi reuolutionis NQ perpendicularem. *Fig. 18. 19. 20.*

Dico rotundum ſolidum ab eâ circa NQ reuolutâ genitum, æquari ſolido recto, quod ab eâdem in viam ſui grauitatis centri ductâ procreatur.

DEmonſtratio. Eſto primùm figura curuilinea vndique clauſa quæcumque CKGα, ſiue axe omnino carens, ſiue eum habens ad NQ non perpendicularem. Tangat eam recta EKA ad NQ perpendicularis, addaturque figura ad partem alteram æqualis & ſimilis ſimiliterque poſita HKDω. Liquet igitur figuræ ex vtriſque compoſitæ axem fore EKB, eiuſque commune grauitatis centrum fore in axe EKB, puta in Z: partium autem GKC HKD centra ſint L & M, quæ iungat recta LM. Quoniam ex hypot. figuræ GKC, HKD ſunt æquales & ſimiles & ſimiliter poſitæ ad axem EB, erunt quoque grauitatum centra L, & M ſimiliter poſita reſpectu axis EB; ac proinde neceſſe eſt, vt recta LM, centra iungens ſit ad EB perpendicularis, eiuſque ſegmenta LZ, MZ inter ſe ſint æqualia; aliàs figuris ſibi mutuò congruentibus centra L, M non congruerent; quod repugnat *poſtulato* 5. *Arch. lib. de æquip.* Quoniam igitur partium centra L & M, & commune totius Z ſunt in rectâ LZM ad axem EB perpendiculari, qui ex hypot. perpendicularis eſt axi reuolutionis NQ, erit LM parallela ad NQ; ideóque centrorum ab NQ diſtantiæ LT, ZB, MV ſunt æquales; ac proinde etiam peripheriæ, quas in reuolutione deſcribunt ſingula, inter ſe æquales erunt. Deinde quia figuræ GKC, HKD. ex hyp. ſunt æquales & ſimiles, & ſimiliter poſitæ circa axem communem EB, ac proinde (cùm EB ex hyp. rectus ſit axi reuolutionis NQ) etiam ſimiliter poſitæ reſpectu NQ; patet rotundum ſolidum ab vtrâque genitum, duplum eſſe rotundi ſolidi geniti à ſolâ GKC. Atqui ſolidum rotundum figuræ vtriuſque ᶜ æquatur recto ſolido, quod fit ab vtrâque figurâ in viam centri communis Z. Ergo rectum ſolidum figuræ vtriuſque ductæ in viam centri Z duplum eſt quoque rotundi ſolidi figuræ GKC. Ergo rectum ſolidum ex figurâ ſolâ totius dimidiâ GKC, in viam centri Z, hoc eſt, vt ſuperiùs oſtendi, in viam centri L, æquatur rotundo ſolido eiuſdem figuræ GKC. Quod erat demonſtrandum. *c per 7. huius.*

Sit deinde planum axe carens ECB ſemihyperbolæ exempli gratiâ, aut ſemiparabolæ, aut ſegmenti circuli, vel Ellipſis, ſubtenſam habens EB, reuolutionis axi NQ perpendicularem. De hac eodem omnino modo theorema demonſtrabitur; ac proinde conoïdes hyperbolicæ & Parabolicæ æquantur rectis ſolidis, quæ fiunt à genitrice ſemiparabolâ aut ſemihyperbolâ in viam centri grauitatis ſemiparabolæ aut ſemihyperbolæ. *Fig. 19. 18.*

Atque ex his duobus caſibus facilè in reliquis, ſi qui ſint alij, veritas theorematis fiet manifeſta.

Scholium

Scholium.

Propoſitionibus 5, 6, 7, 8, 9, *mihi videor omne genus rotundorum ſolidorum complexus eſſe. Plenè igitur demonſtrauimus, quod primâ* huius libri *parte fuerat propoſitum, videlicet.*

Quamuis figuram planam, quocumque ſitu, circa axem quouis ab eâ interuallo diſtantem, in orbem ductam, producere rotundum ſolidum, æquale ſolido recto, quod fit ab eâdem ſuperficie ductâ in altitudinem parem viæ centri grauitatis.

Corollaria.

Igitur quæcumq; de ſolidis rectis, hoc eſt Cylindricis ſeu Cylindriformibus à Geometris demonſtrata ſunt, etiam rotundis ſolidis quibuſcumque conueniunt, figurâ genitrice, (hoc eſt eâ, quæ fuit ducta in orbem) acceptâ pro baſi, & peripheriâ quam deſcripſit centrum grauitatis, acceptâ pro altitudine. Quare

1. *Cùm peripheriæ, ſeu viæ centrorum grauitatis æquales ſunt, rotunda ſolida eam inter ſe rationem habent quam figuræ genitrices.*

2. *Cùm æquales ſunt figuræ genitrices, rotunda ſolida ſunt inter ſe, vt viæ centrorum grauitatis.*

3. *Rotundorum ſolidorum ratio compoſita eſt ex ratione figurarum genitricum, & ratione viarum à grauitatum centris deſcriptarum.*

4. *Si rotunda ſolida fuerint æqualia, genitrices figuræ ſunt viis centrorum grauitatis reciprocè proportionales: & contra*

Et cætera his ſimilia.

PARS SECVNDA.

Demonſtratur quamuis perimetrum, quocumque ſitu circa axem ab ea quomodocumque diſtantem, in orbem ductam, gignere rotundam ſuperficiem æqualem ſuperficiei rectæ, quæ fit ab eâdem perimetro, ducta in altitudinem viæ centri grauitatis æqualem.

Lemmæ VII.

Quæ de planis & ſolidis demonſtrauit Archimedes in *lib. de æquip.* etiam lineis non abſimili demonſtrationum formâ conueniunt.

Lemma VIII.

Fig. 22. 23. Perimetro curuilineæ axem habenti EB, & continuè decreſcenti inſcribi & circumſcribi poſſunt tot rectæ lineæ, vt tam inſcriptæ, quàm circumſcriptæ à perimetro differant quantitate quâuis datâ minori.

Eſt manifeſtum & ſatis ab aliis demonſtratum.

Lemma IX.

Fig. 22. 23. Iiſdem poſitis ſummæ rectarum ordinatim,[a] ſeu inſcriptarum, ſeu conſcriptarum, centrum quantitatis eſt in axe BE.

Demonſtratio. Æquales ex hypotheſi rectas DF, CI biſecet recta Sα. Quoniam centra grauitatis rectarum DF, CI, ſunt S & α, eaque connectit Sα, erit commune vtriuſque [b] centrum in rectâ Sα. Igitur ſi fiat vt DF ad CI, ita αP ad PS, hoc eſt ſi recta Sα biſecetur in P, erit commune rectarum DF, CI, centrum in P, hoc eſt in perimetri axe BE, qui biſecat ipſam Sα. Eodem modo oſtendam centrum rectarum FG, IH, eſſe in axe BE, idemque oſtendetur de centro rectarum GE, HE. Ergo [c] etiam rectarum omnium centrum grauitatis commune in axe erit.

a *Vide deſin.* 8.
b *Vide lem.* 7 *& Arch.* 8. 1. *æquip.*
c *Vide lem.* 7. *& Arch.* 8. 1. *æquip.*

Lemma X.

Omnis perimetri axem habentis centrum grauitatis eſt in axe. Demonſtratur vt Lemma 3, ſed ex præcedenti.

Lemma

Lemma XI.

Perimetro figuræ curuilineæ axem habentis, & continuè decreſcentis tot rectæ inſcribi poſſunt, vt earum commune grauitatis centrum à perimetri centro grauitatis Z, diſtet interuallo quocumque dato minori. Similiter eidem perimetro circumſcribi poſſunt tot rectæ, vt earum commune grauitatis centrum à centro perimetri etiam diſtet interuallo minori quocumque dato. *Fig. 22. 23.*

Non abſimilis ratio huius eſt, quæ lemmatis quinti, quod conſule.

PROPOSITIO X.

Datæ ſint duæ ſuperficies rectæ EG, AD, quarum altitudines ſint EF, AC, baſes verò perimetri VE, AB: ſit autem & alia quædam altitudo inter priores media LK. Porrò trium altitudinum EF, LK, AC differentiæ ſint HF, IK, hoc eſt HF ſit exceſſus primæ EF ſupra ſecundam LK, & IK exceſſus ſecundæ LK, ſupra tertiam AC, *Fig. 1. 2. 3.*

Dico: Si ſit HF ad IK, vt reciprocè perimeter AB ad perimetrum VE, rectam ſuperficiem, quæ fit ex ſummâ perimetri vtriuſque VE, AB, ductâ in altitudinem LK, æqualem eſſe duabus ſuperficiebus rectis EG, AD.

DEmonſtratio. Fiat ET æqualis LI, ſeu AC, & perimeter quædam LNXM ſit æqualis duabus perimetris VE, AB, ſic vt linea MLN ſit par perimetro AB, & linea MXN ſit par perimetro VC. His ita ordinatis, theorema demonſtrabitur, vt *prop. 1. huius*; ſed loco elementorum, quæ illic citantur, hic adhibenda ſunt *Corollaria prop. 4. lib.* noſtri 2. Cylindricorum & Annularium.

PROPOSITIO XI.

Eſto perimeter LNXM, æqualis duabus perimetris VE, AB, & recta ſuperficies LY genita à perimetro LNXM, ductâ in altitudinem LK, par ſit ſuperficiebus rectis, quæ fiunt ex perimetro VE, ductâ in EF, & ex perimetro AB ductâ in AC. *Fig. 1. 2. 3.*

Dico: trium altitudinum EF, LK, AC, differentias HF, IK, eſſe perimetris AB, VE, reciprocè proportionales; hoc eſt, HF eſſe ad IK, vt perimeter AB ad perimetrum VE.

DEmonſtratio. Quoniam ponitur perimeter LNXM par perimetris duabus AB, VE, ſit linea MLN, par AB perimetro, & linea NXM, par perimetro VE. Hoc poſito propoſitio demonſtrabitur, vt 2. *huius*; ſed per *Coroll. p. 4. l. noſtri* 2. Cylindricorum & annulariū.

PROPOSITIO XII.

Data ſit perimeter axem habens BE, reuolutionis axi NQ perpendicularem, ex quotcumque rectis lineis compoſita. Aggregati duarum linearum æqualium PX, KI, centrum grauitatis eſto C; duarum verò æqualium XG, IM, centrum ſit D; æqualium binarum ME, GE, centrum ſit F: tandem commune omnium, *Fig. 21.*

nium, ſiue totius perimetri centrum ſit Z. Ex lemmate 9. patet centra C,D,F,Z, fore in axe BE.

Si rotundæ ſuperficies genitæ à lineis PX, KI, circa axem NQ conuerſis, æquales ſint ſuperficiei rectæ, quæ fit ab ijſdem lineis ductis in altitudinem, æqualem peripheriæ ab ipſarum grauitatis centro C deſcriptæ; & rotundæ ſuperficies genitæ à lineis XG, IM, circa NQ circumactis, ſint æquales rectæ ſuperficiei genitæ ab ijſdem XG, MI, ductis in altitudinem parem peripheriæ centri ipſarum D; & rotundæ ſuperficies rectarum GE, ME, ſint pares rectæ ſuperficiei genitæ ab ijſdem GE, ME, ductis in viam centri ipſarum F; Dico etiam ſuperficiem rotundam, quæ fit à totâ perimetro circa axem NQ in orbem actâ, æqualem eſſe ſuperficiei rectæ, quæ fit ab eadem totâ perimetro ductâ in altitudinem æqualem peripheriæ à totius perimetri grauitatis centro Z deſcriptæ.

a Vide lem. 7. & 8. 1. æquip. Arch.

D*Emonſtratio.* Quoniam grauitatis centrum rectarum PX, KI, eſt C, rectarum verò XG, IM, eſt D, centrum commune O ſummæ rectarum PX, XG, KI, IM, ita [a] ſecabit rectam CD, vt CO ſit ad DO, quemadmodum reciprocè duæ XG, IM, ad duas PX, KI. Deinde quia viæ centrorum C, O, D, ſunt radijs ſuis AC, AO, AD proportionales, etiam viarum binæ differentiæ radiorum binis differentijs CO, OD, proportionales erunt. Quare cùm iam oſtenderim CO, OD, aggregato rectarum PX, KI, & aggregato rectarum XG, IM eſſe proportionales reciprocè, etiam binæ differentiæ trium viarum à centris C, O, D deſcriptarum aggregatis rectarum PX, KI & XG, IM reciprocè proportionales erunt. Ergo ſuperficies rectæ, quæ fiunt à rectis PX, XG, KI, IM ductis in altitudinem parem viæ centri earum communis O ſimul ſumptæ [b], æquantur ſuperficiebus rectis, quæ fiunt à rectis PX, KI, in altitudinem parem viæ centri ipſarum C, vnà cum duabus rectis ſuperficiebus, quas gignunt XG, IM, ductæ in altitudinem parem viæ centri ipſarum D. Atqui per hypotheſim ſuperficies rectæ genitæ à rectis PX, KI in viam centri earum C, æquantur ſuperficiebus rotundis earumdem PX, KI, & ſuperficies rectæ, quas gignunt XG, IM in viam centri ſui D, æquantur ſimiliter per hyp. ſuperficiebus rotundis earumdem XG, IM. Ergo etiam ſuperficies rectæ ſimul ſumptæ, quæ fiunt ab ipſis PX, XG, KI, IM in viam centri earum communis O, æquantur rotundis ſuperficiebus, quas gignunt eædem PX, XG, KI, IM ſimul ſumptæ, circa axem NQ.

b per 10. huius.

c Vide lem. 7. & 8. 1. æquip. Arch.

Rurſum quoniam rectarum PX, XG, KI, IM centrum grauitatis eſt O, rectarum verò GE, ME, eſt F; centrum commune omnium Z ita [c] ſecabit rectam OF, vt OZ ſit ad ZF, ſicut reciprocè duæ ſimul GE, ME ad omnes ſimul PX, XG, KI, IM. Sed differentiæ binæ peripheriarum à centris O, Z, F deſcriptarum, ſunt rectis OZ, ZF, differentijs videlicet radiorum AO, AZ, AF, proportionales. Ergo etiam differentiæ binæ peripheriarum à centris F, Z, O deſcriptarum, ſunt duabus GE, ME, & aggregato ipſarum PX, XG, KI, IM reciprocè proportionales. Ergo ſuperficies recta, quæ fit ab omnibus ſimul rectis, hoc eſt à totâ perimetro PXGEMIK in viam centri omnium communis Z, æquatur [p] ſuperficiebus rectis, quæ fiunt à duabus ſimul GE, ME, in viam centri earum F, vnà cum ſuperficiebus rectis quæ fiunt ab ipſis PX, XG, KI, IM in viam centri ipſarum O. Atqui iam demonſtratum eſt rectas ſuperficies genitas ab ipſis PX, XG, KI, IM, in viam centri O, æquari earundem rectarum ſuperficiebus rotundis, & per hypotheſim ſuperficies rectæ, quæ fiunt à rectis GE, ME in viam centri ſui F, æquantur ſuperficiebus rotundis earundem GE, ME. Ergo etiam ſuperficies recta, quæ fit à totâ perimetro in viam centri communis Z, æquatur ſuperficiebus rotundis, quæ fiunt à PX, XG, KI, IM, vnà cum rotundis ſuperficiebus ipſarum GE, ME, hoc eſt, ſuperficiei rotundæ, quæ fit à totâ perimetro PXGEMIK, circa axem NQ. Quod erat demonſtrandum.

p per 10. huius.

P RO-

PROPOSITIO XIII.

Data ſit perimeter quæcumque BCFD, axem habens FB, reuolutionis axi NQ perpendicularem, centrum verò grauitatis E, eius partes quæcumque ſint CBD, CFD, quarum centra grauitatis X, Z. *Fig. 24.*

Si rotundæ ſuperficies, quas producunt perimeter tota BCFD, & pars alterutra, vt CFD, æquentur ſingulæ ſuperficiebus rectis, quas eædem perimetri gignunt ductæ in altitudines æquales peripheriis, quas deſcribunt eorum grauitatis centra E & Z. Dico etiam rotundam ſuperficiem genitam à reliquâ perimetri parte CBD, æqualem fore ſuperficiei rectæ, quæ fit ab eâdem perimetri parte CBD, ductâ in altitudinem parem peripheriæ ab ipſius grauitatis centro X, deſcriptæ.

D*Emonſtratio* eadem erit, quæ *propoſitionis 4 huius*: ſiquando iſtic occurrit ſolidum, hic accipiatur ſuperficies: & pro *prop.* 2. iſthic citatâ hic citetur *prop.* 11.

PROPOSITIO XIV.

Rotunda ſuperficies genita à perimetro quâcumque figuræ curuilineæ verſùs (NQ) axem reuolutionis cauæ, quæ axem habeat BE, reuolutionis axi (NQ) perpendicularem, & continuè creſcat verſùs reuolutionis axem (NQ), æqualis eſt ſuperficiei rectæ, quæ fit ab eadem perimetro ductâ in altitudinem parem circumferentiæ à perimetri grauitatis centro (Z) circa axem reuolutionis (NQ) deſcriptæ. *Fig. 22. 23.*

D*Emonſtratio.* Perimetro DEC (vide *fig.* 22) inſcribe ordinatim rectas quotcumque DF, CI, FG, IH, GE, HE, ſic vt binæ & binæ ſint æquales iuxta *definitionem* 8. Similiter perimetro ordinatim conſcribantur rectæ (vide *fig.* 23) & binæ primæ DF, CI, ſint axi BE parallelæ. Si iam intelligantur reuolui omnia circa axem NQ, rectæ perimetro DFEIC in *fig.* 22. inſcriptæ, producent conicas ſuperficies, & duæ quidem primæ DF, CI, ſi NQ tangat perimetrum, conicas integras efficient, reliquæ truncatas. In conſcriptis verò, ſi axis NQ tangat perimetrum DMωC, duæ primę DF, CI deſcribent duos circulos; ſi non tangat (vt in *fig.* 23.) gignent duos planos annulos circulares.

Diuidantur iam bifariam DF, CI, per rectam Sω, occurrentem axi BE, in P. Patet [a] P eſſe centrum grauitatis binarum DF, CI. Superficies conica rectæ DF, æqualis [b] eſt triangulo rectangulo ſub FD, & peripheriâ radij LF in rectam euolutâ comprehenſo, hoc eſt rectangulo ſub FD, & peripheriâ radij BP. Ergo ambæ conicæ ſuperficies rectarum DF, CI, æquantur rectangulo ſub rectis DF, CI, & peripheria radij BP; quæ peripherię LF radij dimidia eſt, hoc eſt rectangulo, quod ex FD, CI ductis in altitudinem parem peripheriæ ipſarum centri grauitatis P. Biſecentur deinde GF, HI, per rectam Mω; & GE, HE, per YS rectam. Patet R eſſe centrum grauit. binarum FG, IH, & K binarum GE, HE. Iam conica ſuperficies rectæ GF, æquatur [c] rectangulo ſub GF, & ſemiſſe peripheriarum radijs LF, VG, deſcriptarum, hoc eſt rectangulo ſub GF, & peripheriâ radij TM, ſeu BR, comprehenſo. Ergo Conicæ ſuperficies rectarum GF, HI, æquantur rectangulo ſub GF, HI, & peripheriâ radij BR, hoc eſt rectangulo, quod fit ex binis GB, HI, ductis in altitudinem parem viæ ipſarum centri grauitatis R. Similiter oſtendam conicas ſuperficies rectarum GE, HE, æquales eſſe rectangulo, quod fit ex ijſdem GE, HE, ductis in altitudinem parem viæ centri ipſarum K: eodemque modo idipſum demonſtrabitur de ſuperficiebus (vide *fig.* 23) rectarum perime-

Fig. 22.
a Vide lem. 7 vel 9.
b Demonſtrauit p. 2 l. 2. Cyl. & Annul.
c Demonſtrauit l. 2. Cyl. & Annul. in coroll. p. 3.

tro conſcriptarum, preterquam in duabus DF, CI; ſuperficies porro ab ijs deſcriptæ per *p. 1. l. 3. Cylind. & Annul.* & per *Coroll. ibidem*, æquantur rectangulo, quod fit ex ijſdem DF, CI, ductis in altitudinem parem peripheriæ radij DS, ſiue BP, hoc eſt peripheriæ ab ipſarum grauitatis centro P deſcriptæ.

Cùm igitur ſinguli rectarum tam inſcriptarum quàm conſcriptarum binarij rotundas producant ſuperficies, æquales ſuperficiebus rectis, quas ijdem rectarum binarij efficiunt ſinguli ſi ducantur in altitudines pares peripherijs, quas ſingulorum grauitatis centra P, R, K deſcribunt, etiam [d] compoſita rotunda ſuperficies, quam omnes ſimul rectæ illæ producunt, æqualis erit ſuperficiei rectę, quam eædem ſimul omnes gignunt, ſi ducantur in altitudinem parem peripheriæ à communi ipſarum omnium grauitatis centro O deſcriptæ. Quare cùm hoc in infinitum ita ſemper eueniat, & rectarum tam inſcriptarum quàm circumſcriptarum ſummæ in ipſam deſinant [e] perimetrum, hoc eſt ab ipſâ differre poſſint, quantitate minori quacumque datâ, centrumque commune O rectarum tandem [f] abeat in centrum perimetri Z; neceſſe eſt, ipſa etiam rotunda ſuperficies, genita à perimetro ipſâ, æqualis ſit ſuperficiei rectæ, quę fit ab eâdem perimetro ductâ in altitudinem parem vię, ab ipſius centro grauitatis Z deſcriptæ. Quod erat demonſtrandum.

d *per* 12. *lemm.*

e *per lem.* 8

f *per lem.* 11.

Hæc peritis ſufficiunt. Vlteriorem probationem ſi quis deſiderat, dabitur illa per deductionem ad impoſſibile, quæ quidem inſtituetur eodem prorſus modo, vt prop. 5.

PROPOSITIO XV.

Fig. 24. Rotunda ſuperficies genita à quâcumque (CBD) perimetro figuræ curuilineæ versùs (NQ) axem reuolutionis conuexæ, quæ axem habeat (BE) axi reuolutionis (NQ) perpendicularem, & continuè decreſcat versùs axem reuolutionis, æqualis eſt ſuperficiei rectæ, quæ fit ab eadem perimetro ductâ in altitudinem parem circumferentiæ, ab ipſius grauitatis centro (X) circa reuolutionis axem (NQ) deſcriptæ.

DEmonſtratio. Perimetro CBD apponatur æqualis & ſimilis CFD, habens axem FE priori axi BE indirectum, & baſim CD communem toti axi BF perpendicularem. Patet igitur punctum medium E eſſe grauitatis centrum totius perimetri BCFD. Demonſtrauimus *p. 5. lib. 4. Cylind. & Annul.* rotundam ſuperficiem, quæ fit à perimetro BCFD, circa axem NQ circumactâ, æqualem eſſe ſuperficiei rectæ, quæ fit ab eâdem perimetro ductâ in altitudinem parem peripheriæ mediæ, deſcriptæ nimirum à perimetri puncto medio, & grauitatis centro E. Demonſtrauimus item *prop. præced.* rotundam ſuperficiem genitam à perimetro CFD, circa NQ reuolutâ, æqualem eſſe ſuperficiei rectæ, quæ fit ab eâdem perimetro CFD, ductâ in altitudinem parem peripheriæ ab ipſius grauitatis centro Z deſcriptæ. Ergo etiam rotunda [o] ſuperficies genita à perimetro CBD, circa NQ rotatâ, æqualis eſt ſuperficiei rectæ, quæ fit ab eâdem CBD perimetro ductâ in altitudinem parem peripheriæ ab ipſius grauitatis centro X, deſcriptæ. Quod erat demonſtrandum.

o *per* 13.

Inſpici etiam hîc poterit figura 25, *litteris nonnihil ad textum accommodatis.*

PROPOSITIO XVI.

Fig. 27. Rotunda ſuperficies genita à perimetro quacumque (BGC) figuræ decreſcentis continuè, & axem non habentis, aut certè non perpendicularem axi reuolutionis (NQ), æquatur ſuperficiei rectæ quæ fit ab eâdem perimetro (BGC) ductâ in altitudinem parem circumferentiæ, à perimetri grauitatis centro (S) deſcriptæ.

DEmonſtratio. Per B, ducatur ABE, perpendicularis ad reuolutionis axem NQ. Apponatur alia BIO perimeter æqualis & ſimilis datæ BGC, ſic vt tota perimeter CGBIO axem iam habeat BE, & quidem perpendicularem ad NQ. Quoniam igitur perimetri BGC, BIO,

ſunt æquales & ſimiles, & ſimiliter poſitæ ad axem BE, patet earũ grauitatis centra S, X, eſſe in rectâ SX ad BE axem perpendiculari, ac proinde parallelâ ad NQ, centrũ verò totius perimetri eſſe punctum Z, vbi SX axem BE ſecat. Quare tres peripheriæ à tribus centris S, Z, X circa NQ deſcriptæ, ſunt æquales. Iam verò demonſtratum [a] eſt rotundam ſuperficiem genitam à perimetro totâ CGBIO, æqualem eſſe ſuperficiei rectæ, quæ fit ab eâdem perimetro ductâ in altitudinem parem peripheriæ ab ipſius centro Z deſcriptæ. Ergo rotunda ſuperficies genita ab ipſius dimidiâ, hoc eſt à perimetro datâ BGC, æquatur ſuperficiei rectæ, quæ prioris dimidia ſit, ei nempe, quæ fit ab eâdem BGC perimetro ductâ in altitudinem priori parem, æqualem nempe peripheriæ, ab Z, ſiue ab S, centro ipſius BGC deſcriptæ. Quod erat propoſitum.

a *In præced. & in 14.*

PROPOSITIO XVII.

Rotunda ſuperficies perimetri curuæ cuiuſcumque (CTBXD) figuræ curuilineæ continuè decreſcentis axem habentis (BE) axi reuolutionis (NQ) perpendicularem, & versùs axem ſuum (BE) conuexæ, æqualis eſt ſuperficiei rectæ, quæ fit ab eadem perimetro ductâ in altitudinem parem peripheriæ ab ipſius grauitatis centro (Z) deſcriptæ. *Fig. 28.*

DEmonſtratio. Quoniam perimeter, CTBXD, [a] continetur rectâ CD, axi BE perpendiculari, erunt lineæ BTC, BXD, æquales ac ſimiles, ſimiliterque poſitæ ad NQ, & BE. Ergo S, V centra grauitatis linearum BTC & BXD, & centrum Z, vtriuſque commune, ſunt in vnâ rectâ SV, ad axem BE perpendiculari, ac proinde æquales circa NQ peripherias deſcribunt. Quoniam igitur per præcedentem ſingulæ rotundæ ſuperficies genitæ à ſingulis BTC, BXD, æquantur ſingulis ſuperficiebus rectis, quæ fiunt ab iiſdem BTC, & BXD ductis in altitudines pares peripherijs à ſingularum centris S, V deſcriptis, patet rotundam ſuperficiem ab vtriſque ſimul BTC, BXD genitam, æquari ſuperficiei rectæ, quæ ab vtriſque fit ductis in peripheriam à centro communi Z deſcriptam. Quod erat demonſtrandum.

a *defin. 4.*

PROPOSITIO XVIII.

Rotunda ſuperficies cuiuſcumque perimetri (BLMRETSGH) axem habentis (BE) reuolutionis axi (NQ) perpendicularem, æqualis eſt ſuperficiei rectæ, quæ fit ab eâdem perimetro ductâ in altitudinem parem peripheriæ, à perimetri grauitatis centro (Z,) circa reuolutionis axem (NQ) deſcriptæ. *Fig. 13.*

DEmonſtratio. Quoniam ex hypotheſi figura axem habet BE, poterit per rectas, puta LG, MS, RT ad axem perpendiculares, reſolui in figuras continuè decreſcentes GHBL, GSLM, STMR, TER, quarum perimetrorum centra grauitatis ſint C, D, F, K. Iam demonſtrauimus [b] ſingularum harum perimetrorum rotundas ſuperficies æquales eſſe rectis ſuperficiebus, quæ fiunt ab iiſdem perimetris ſingulis ductis in altitudines pares peripherijs, quas ſingularum grauitatis centra deſcribunt. Ergo etiam rotunda ſuperficies genita à totâ perimetro, æquatur [c] ſuperficiei rectæ, quæ fit ab eâdem totâ perimetro ductâ in altitudinem parem peripheriæ à ſuo grauitatis centro Z deſcriptæ. Quod erat demonſtrandum.

b *prop. 14. 15. 17.*
c *per 11. huius.*

Corollarium I.

Hoc Theoremate etiam ſuperficies comprehenduntur annulorum cuiuſuis generis.

Corollarium II.

Vera eſt propoſitio etiam in perimetro ſubtenſam habente reuolutionis axi perpendicularem, licet axe careat, aut eum certè non habeat reuolutionis axi perpendicularem. Talis eſt in *fig.* 13, perimeter BLMRE, & in *fig.* 26, BGE.

Apponatur enim in *fig.26.* perimetro BGE, alia BIE æqualis & ſimilis ſimiliterque poſita ad reuolutionis axem NQ, eritque ſubtenſa EB, quæ per hyp. recta eſt ad NQ, axis perimetri totius BGEIB; eſtque manifeſtum totius perimetri ac partium eius centra grau. Z, S, X eſſe in rectâ lineâ ad NQ parallelâ. Quibus poſitis, ex *propoſ.* 18. facilè concludetur propoſitum eodem fere ratiocinio, quo vſi ſumus *propoſ.9.huius.*

PROPOSITIO XIX.

Fig. 29. Rotunda ſuperficies cuiuſcumque perimetri, vndique clauſæ (FEGB) vel axe carentis, vel eum certè non habentis perpendicularem axi reuolutionis (NQ) æqualis eſt ſuperficiei rectæ, quæ fit ab eâdem perimetro, ductâ in altitudinem parem circumferentiæ ab ipſius grauitatis centro (Z) circa axem reuolutionis (NQ) deſcriptæ.

D*Emonſtratio.* Diuidatur perimeter data ductâ rectâ GFA, per ipſius grauitatis centrum Z, ad NQ perpendiculari. Centra partium FBG ſint O, & K; ex quibus ad GF duc perpendiculares, OQ, KD. Rotunda ſuperficies genita à lineâ FEG, æquatur [a] rectæ ſuperficiei, quæ fit ab eâdem ductâ in viam, à ſuo centro O ſeu Q deſcriptam. Similiter rotunda ſuperficies genita à lineâ FBG, æquatur [b] rectæ, quæ fit ab eâdem FBG ductâ in peripheriam à ſuo centro K, ſeu puncto D, deſcriptam. Ergo etiam rotunda ſuperficies à totâ perimetro FEGB genita, æquatur [c] ſuperficiei rectæ, quæ fit ab eâdem perimetro ductâ in peripheriam ſui centri Z. Quod erat demonſtrandum.

a *per* 18. *huius. cor.* 2.
b *per eand.*
c *per corol. p.12. huius.*

Scholium.

Ad propoſitiones 6 proximè præcedentes omnes curuarum linearum ſpecies reuocari poſſunt: ex quibus in perimetris rectilineis eadem veritas à fortiori (quod aiunt) patet. Plenè igitur demonſtratum eſt, quod fuerat ſecundâ huius libri parte propoſitum; videlicet,

Quamuis perimetrum, quocumque ſitu circa axem quomodocumque diſtantem, in orbem ductam, gignere rotundam ſuperficiem, æqualem ſuperficiei rectæ, quæ fit ab eâdem perimetro ductâ in altitudinem viæ centri grauitatis æqualem.

PARS TERTIA.

Solidorum rotundorum à Parabola genitorum affectiones contemplatur.

DEFINITIONES.

1. PEr *Parabolam* vel *Hyperbolam* ſemper intelligo ſuperficiem planam lineâ parabolicâ vel hyperbolicâ, & rectâ ad axem perpendiculari comprehenſam.

2. *Baſim Parabolæ* vel *Hyperbolæ* non voco niſi eam, quæ ad axem eſt ordinatim applicata.

*Fig.*39. 3. *Conoïs obtuſa Parabolica* vel *Hyperbolica* eſt, quę fit à ſemiparabolâ (CBA) ſeu à ſemihyperbolâ, circa totius parabolæ aut hyperbolæ axem (AB) reuolutâ.

4. *Conoïs acuta* eſt, quę fit à ſemiparabolâ aut ſemihyperbolâ circa baſim AC in orbem actâ.

*Fig.*42. 5. *Clauſum annulum* voco cùm axis reuolutionis (OP) figuram genitricem (IDEB) tangit.
*Fig.*43. *Patentem* verò *annulum* appello, cùm axis reuolutionis extra figuram eſt.

*Fig.*51. 6. *Obtuſus annulus Parabolicus*, ſeu *Hyperbolicus* eſt, qui fit à parabola vel hyperbola (FDB) ſic poſitâ, vt eius axis (DC) axi reuolutionis (GN) æquidiſtet: *Acutus* verò cum duæ ſemipara-

miparabolæ aut ſemihyperbolæ æquales & ſimiles (CBE, CDE) ita ſunt poſitæ, vt baſis earum communis (CE) reuolutionis axi (OP) æquidiſtet; axes verò earum (DC, BC) ſint indirectum. Fig. 42. 43.

PROPOSITIO XX.

Conoïs parabolica acuta (BFCD) eſt ad maximum conum ſibi inſcriptum, vt 8 ad 5. Fig. 39.

DEmonſtratio. Centrum grauitatis parabolę totius ACBE ſit O, & per O ducatur parallela ad baſim CE. In hac erit centrum ſemiparabolæ ABFC. Eſto in Q. Ex Q demittatur perpendicularis QP. Cùm igitur OA ſint [a] duæ quintæ axis AB; erit quoque QP. Sit deinde S centrum grauitatis trianguli CBE, & per S ducatur SK parallela baſi CE. Erit in hac centrum grauitatis trianguli CBA, puta in K. Ex K demittatur perpendicularis KN, quæ erit par ipſi AS, ac [b] proinde tertia pars axis AB. Cùm ergo QP ſit duæ quintæ ſiue ſex decimæ quintæ axis AB, & KN vna tertia, ſeu quinque decimæ quintę eiuſdem axis AB, erit QP, ad KN vt 6 ad 5. Iam verò conoïs acuta BFCD, æquatur [c] recto ſolido, cuius baſis eſt ſemiparabola ABC, altitudo autem par circumferentiæ à grauitatis centro Q circa AC deſcriptæ, cuius radius QP. Similiter conus BCD æqualis eſt [d] ſolido recto, cuius baſis eſt triangulum CBA, altitudo verò par peripheriæ deſcriptæ à grauitatis centro K, cuius radius KN. Atqui proportio horum rectorum ſolidorum compoſita eſt ex ratione baſis ad baſim, ſemiparabolæ nimirum ABFC ad triangulum CBA; hoc [n] eſt ex ratione 4 ad 3; & ex ratione altitudinis ad altitudinem, nimirum peripheriæ, cuius radius QP, ad peripheriam, cuius radius KN; hoc eſt ex ratione radij QP ad radium KN; hoc eſt (vt oſtendi ſupra) ex ratione 6 ad 5. Ergo etiam ratio conoïdis acutæ parabolicæ BFCD ad conum BCD compoſita eſt ex ratione 4 ad 3, & ex ratione 6 ad 5: ſiue ex rationibus 8 ad 6, & 6 ad 5. Atqui ratio 8 ad 5 ex rationibus illis compoſita eſt. Ergo conoïs acuta parabolica BFCD eſt ad conum maximum ſibi inſcriptum, vt 8 ad 5. Quod erat demonſtrandum.

a Arch. 1. æquip. p. 8.
b patet ex Archim. 1. æquip. p. 13.
c per 9. huius.
d per eand.
n Archim. p. 24. quadr. parab.

Corollarium.

Hinc efficitur Cylindrum BL conoïdi parabolicæ acutæ circumſcriptum, eſſe ad ipſam conoidem vt 15 ad 8.

Rationem conoïdis parabolicæ acutæ ad Cylindrum ambientem, & conum inſcriptum non tradidit Archimedes.

PROPOSITIO XXI.

Cylindri parabolici portio (BGEOF) per (GF) baſim parabolæ inferioris (GBF) & punctum (E) extremum axis parabolæ ſuperioris abſciſſa, ad maximam ſibi inſcriptam pyramidem (GBEF) eam rationem habet, quam 8 ad 5. Fig. 40.

DEmonſtratio. Portio GBEOF eſt ad conoïdem acutam genitam à parabolâ GLBF circa baſim GF in orbem actâ, vt EB ad peripheriam radij BA, vt demonſtraui *lib. 1. Cyl. & Annul. p. 16.* Similiter pyramis GBEF eſt ad conum duplicatum ſiue rhombum conicum, genitum à triangulo GBF, circa GF circumacto, vt EB ad peripheriam radij BA, vt ibidem oſtendi *prop. 19.* Ergo portio GBEOF eſt ad dictam conoïdem acutam, vt pyramis GBEF ad rhombum conicum dictum. Igitur permutando, portio GBEOF eſt ad pyramidem GBEF, vt acuta conoïs ad rhombum conicum; hoc eſt per præcedentem vt 8 ad 5. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Ex hoc theoremate facilis atque expedita habetur huius portionis cubatura. Eandem portionem cubauit, ſed aliâ prorſus viâ, clariſſimus è noſtrâ Societate Geometra Gregorius à S. Vincentio, totâ fere quintâ parte libri 9. operis ſui Geometrici.

Eſt porrò præter hanc alia Cylindri parabolici portio BPKAF, quæ per rectam Fig. 40.

*KA & baſeos Parabolicæ axem AB abſcinditur. Hanc cubaui l.1. Cyl. & Annul.*prop. 32*:vbi demonſtro eam maximæ pyramidis ſibi inſcriptæ ſeſquialteram eſſe, &* prop.42*, ita eam eſſe ad Cylindrum ſuum Parabolicum æquè altum, vt 3 ad 16.*

Quod verò admirabilius eſt, ſimilem quoque portionem ab hyperbolico Cylindro abſciſſam, cubatam reperies ibidem, prop. 33; *vbi demonſtrauimus eam eſſe ad pyramidem maximam ſibi inſcriptam, vt compoſita ex axe hyperboles & ſeſquialterâ axis tranſuerſi, ad compoſitam ex axe, & tranſuerſo axe. Deinceps verò adhuc alias hyperbolici Cylindri partes cubaturi ſumus* prop. 49. & 50.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 40. Cylindri Parabolici portio (BGEOF) per baſim (GF) Parabolæ inferioris obliquè abſciſſa, ad portionem (BPKAF) æquè altam, ab eodem Cylindro obliquè abſciſſam per (AB) axem inferioris Parabolæ eam habet rationem, quam 32 ad 15.

D*Emonſtratio.* Per præcedentem dimidia portio BEAOF eſt ad inſcriptam ſibi pyramidem BEAF, vt 8 ad 5, ſiue vt 16 ad 10. Et *lib. 1.* Cyl. & Annul. *prop.* 32 demonſtraui

a *per* 5.12. pyramidem BKAF inſcriptam portioni BPKFA (quæ priori pyramidi BEAF [a] æqualis eſt) eſſe ad portionem BPKFA vt 2 ad 3, ſeu vt 10 ad 15. Igitur ex æquo dimidia portio BEAOF eſt ad portionem BPKFA, vt 16 ad 15. Ergo tota portio GBEOAF eſt ad portionem BPKFA, vt 32 ad 15. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIII.

*Fig.*40. Cylindrus Parabolicus (HEKBFG) ad portionem æquè altam (GBEOF) per baſim (GF) inferioris Parabolæ obliquè abſciſſam, eam rationem habet, quam 5 ad 2.

a *per præc.* b *Demonſtraui p.* 42 *l.*1 *Cyl. & Annularium.*

D*Emonſtratio.* Portio BGEOP eſt ad [a] portionem BPKFA vt 32 ad 15. Portio autem BPKFA eſt ad Cylindrum HEKBGF, [b] vt 3 ad 16, ſiue vt 15 ad 80. Igitur ex æquo portio BGEOF eſt ad Cylindrum HEKBGF, vt 32 ad 80, hoc eſt vt 2 ad 5. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXIV.

*Fig.*42. 41. Parabolicus annulus [a] acutus & clauſus, acutæ conoïdeos DEA genitæ ab ſemiparabolis, quæ annulum genuêre, circa EC rotatis, quintuplus eſt.

a *Vide deſin.* 5. *&* 6. *partis tertiæ huius.*

D*Emonſtratio.* Super tota Parabola EAI conſtituatur Cylindrus Parabolicus EIAKLH, à quo per baſim EI abſcindatur portio EKAI. Quoniam duæ ſemiparabolæ DEC, A-

b *ex def.*6. EC, æquales [b] ſunt toti Parabolæ EAI, ſi ſuper DEA intelligatur Cylindrus alius etiam in altitudine AK erectus ſtare, erit hic par priori EIAKLH. Sed annulus genitus à figura D-

c *Demonſtraui p.* 6. *l.*3. *Cyl. & Annul.* n *l.*1. *Cyl. & Annul. p.*16. EA, circa axem OP, eſt ad Cylindrum ſuper eadem figurâ erectum in altitudine AK, vt [c] peripheria CF, cuius radius AC, ad AK. Ergo etiam idem annulus erit ad Cylindrum EIAKLH, vt peripheria CF radij AC ad AK. Similiter rotundum ſolidum quod fit à Parabolâ EAI circa baſim EI circumactâ, etiam eſt ad [n] portionem EKIA, vt peripheria radij AC ad AK. Ergo annulus genitus à figurâ DEA, circa axem OP, eſt ad Cylindrum EIAKLH, vt rotundum ſolidum genitum à Parabola EIA circa baſim EI, ad portionem EKIA; hoc eſt vt rotundi ſolidi ſemiſſis, quæ eſt conoïs acuta AED, ad ſemiſſem portionis. Igitur permutando, annulus eſt ad acutam conoïdem AED, vt Cylindrus eſt ad ſemiſſem portionis. At-

d *per præc.* qui Cylindrus EIAKLH eſt [d] ad portionē EKIA vt 5 ad 2, ac proinde ad ſemiſſem portio-

nis

nis vt 5 ad 1. Ergò dictus annulus acutæ conoïdeos dictæ quintuplus eſt. Quod erat demonſtrandum.

Aliter.

Centrum grauitatis Parabolæ EAI eſto punctum M: hoc ita ſecat axem ^d CA, vt CA ſit ad CM, ſicut 5 ad 2. Centrum verò grauitatis figuræ IDEA ex duabus æqualibus & ſimilibus Parabolis compoſitæ erit punctum C, quod DA ex vtroque axe compoſitam ſecat bifariam. Annulus qui producitur à figurâ IDEA rotatâ circa OP, æquatur ^e ſolido recto, cuius baſis eſt figura IDEA, altitudo autem par peripheriæ, cuius radius AC. Similiter rotundum ſolidum genitum à Parabolâ EAI reuolutâ circa baſim ſuam EI, æquatur ^n ſolido recto, cuius baſis Parabola eſt EAI, altitudo verò par peripheriæ, cuius radius CM. Atqui horum rectorum ſolidorum ratio componitur ex ratione baſis IDEA ad baſim EAI, & ex ratione altitudinis ad altitudinem, peripheriæ nimirum, cuius radius AC ad peripheriam cuius radius CM, hoc eſt ex ratione radij AC ad radium CM. Ergo etiam ratio annuli, qui fit à figurâ IDEA circa OP ad rotundum ſolidum genitum à Parabolâ EAI circa IE, componitur ex ratione figuræ IDEA ad Parabolam EAI, & ratione radij AC ad radium CM. Sed ratio IDEA ad EAI ea eſt, quæ 2 ad 1, ſeu 10 ad 5: & ratio AC ad CM ea eſt, quæ 5 ad 2; quæ binæ rationes, nempe 10 ad 5, & 5 ad 2, componunt rationem 10 ad 2, ſeu 5 ad 1. Igitur annulus ſupradictus eſt ad ſupradictum rotundum ſolidum, vt 5 ad 1: ac proinde etiam ſemiſſis eius, quæ nimirum fit à DEA circa OP, eſt ad rotundi ſolidi ſemiſſem nempe ad conoïdem acutam factam à ſemiparabolâ EAC circa baſim EC, vt 5 ad 1. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 42. ^d per 8.2. æquip. ^e per 6 huius vel per 5.l.5 Cyl. & Annul. ^n per 5.

Propo rtionem annuli Parabolici obtuſi & clauſi ad conoïdem obtuſam Parabolæ, quæ annulum genuit, eam eſſe quæ eſt 16 ad 3 demonſtrammus l. 3. Cylind. & Annul. p. 46.

PROPOSITIO XXV.

Parabolicus annulus ^a acutus & patens, ad acutam conoïdem genitam à binis ſemiparabolis, quæ genuêre annulum, circa baſim EC rotatis, eam habet rationem, quam radius reuolutionis AC ad quintam partem axis CB.

Fig. 43. ^a Vide defin. 5. & 6. ſupra.

D*Emonſtratio.* Centrum grauitatis Parabolæ EBI eſto M. Erit CM duæ quintæ axis CB per 8.2. *æquip. Archim.* vnde ſi biſecetur CM in Q, erit CQ quinta pars axis CB. Annulus qui fit à figurâ IDEB circa OP reuolutâ, ad rotundum ſolidum factum à Parabolâ EBI rotatâ circa baſim ſuam EI, rationem ^m habet compoſitam ex ratione figuræ IDEB ad Parabolam EBI; hoc eſt per conſtructionem ex ratione MC ad QC, vtraque enim dupla eſt: & ex ratione peripheriæ deſcriptæ à centro grau. C ad peripheriam deſcriptam à cētro grau. M circa C, hoc eſt ratione radij AC ad radium CM. Atqui binæ hæ rationes, nempe AC ad CM, & CM ad QC componunt rationem AC ad QC. Ergo dictus annulus eſt ad rotundum ſolidum dictum, vt AC ad QC. Ergo etiam huius annuli ſemiſſis, quæ fit nempe à figurâ DEB rotatâ circa OP, eſt ad rotundi ſolidi ſemiſſem, nempe ad conoïdem acutam genitam à Parabolâ EBC circa baſim EC reuolutâ, vt AC ad QC quintam partem axis CB. Quod erat demonſtrandum.

^m patet ex 5 huius & corollario 3. ſcho 9 poſt. 9.

Rationem annuli obtuſi Parabolici patentis ad conoïdem obtuſam Parabolæ annulum gignentis, eam eſſe, quam habet radius reuolutionis ad tres decimas ſextas ſemibaſeos Parabolicæ, demonſtraui l. 3. Cyl. & Annul. p. 47.

Cæterùm potuit hæc propoſitio etiam demonſtrari iuxta primum modum præcedentis.

PROPOSITIO XXVI.

Parabolici annuli acuti & clauſi pars exterior, genita ab Parabolâ IDE circa axem OP reuolutâ, ad interiorem genitam ab æquali Parabolâ IBE circa eumdem axem OP, eam habet rationem, quam 7 ad 3.

Fig. 42.

D*Emonſtratio.* Parabolarum EDI, EAI, centra grauitatum ſint S & M. Igitur CS ſunt duæ quintæ axis CD, ſiue CA, per 8.2. æquipond. ac proinde SA ſunt 7 quintæ axis CA,

AM verò eſt tres quintæ eiuſdem axis CA. Ergo SA eſt ad MA, vt 7 ad 3. Iam verò quia Parabolæ IDE, IAE ſunt æquales, erit [a] annuli pars exterior genita à Parabolâ IDE circa OP, ad interiorem genitam à Parabolâ EAI, ſeu EBI circa OP, vt peripheria genita à centro grau. S, circa OP reuoluto, ad peripheriam factam à centro grau. M, etiam rotato circa OP; hoc eſt vt radius AS ad radium AM, hoc eſt (vt iam oſtenſum) ſicut 7 ad 3. Quod erat demonſtrandum.

a patet ex 5. huius, & Corol. 2. in ſcho. poſt p. 9.

Annuli Parabolici obtuſi & clauſi pars exterior eſt ad interiorem vt 11 ad 5. Quod demonſtrauimus prop. 48. lib. Cyl. & Annul.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 39. a deſin. 3. b deſin. 4.

Conoïs [a] obtuſa Parabolica (CBE) eſt ad [b] acutam (BCD) eâdem ſemiparabolâ genitam, vt baſis (AC) ſemiparabolæ genitricis ad ſedecim decimaſquintas partes axis (AB).

c per 11. 12. d per 2. 12. e per conſtr.

D*Emonſtratio.* Fiat AZ, ſeu DH æqualis AB: tum vt AC ad AZ, ſeu AB, ita fiat AZ, ſeu AB ad X. Cylindrus CR eſt ad Cylindrum BH, altitudinis AZ paris ipſi AB, vt [c] baſis ad baſim, circulus nempe radij AC ad circulum radij AB, ſeu AZ, hoc eſt [d] vt AC ad tertiam proportionalem X. Cylindrus verò BH eſt ad Cylindrum BL, vt AZ ad AC, hoc eſt vt [e] X ad AZ, ſeu AB. Igitur ex æquo Cylindrus CR eſt ad Cylindrum BL, vt AC ad AB.

Cylind.	CR	AC
Cylind.	BH	X
Cylind.	BL	AB.

f per 31. l. 1. Cyl. & Annul. g per Corol. p. 20. huius i per conſtr.

Hoc oſtenſo, ita propoſitum concludemus. Sit AI ſemiſſis ipſius AC, & AG octo decimæquintæ axis AB. Conois obtuſa CBE eſt ad Cylindrum ſibi circumſcriptum CR, [f] vt 1 ad 2, hoc eſt vt AI ad AC: Cylindrus autem CR eſt ad Cylindrum BL circumſcriptum conoidi acutæ BCD, vt AC ad AB, quod iam demonſtrauimus: Cylindrus verò BL eſt ad acutam conoidem BCD, [g] vt 15 ad 8; hoc eſt vt [i] AB ad AG. Igitur ex æquo conoïs obtuſa CBE eſt ad acutam BCD, vt AI ad AG octo decimaſquintas axis AB, hoc eſt vt ipſius AI dupla, nempe AC ad ſedecim decimaſquintas axis AB. Quod erat demonſtrandum.

Conoïs	CBE	AI
Cylind.	CR	AC
Cylind.	BL	AB
Conoïs	BCD	AG

Scholium.

Errauit ergo Paulus Guldinus lib. 3. *centrobaricorum* cap. 6. prop. 28. *quæ ita habet; Conoïs obtuſa ad conoïdem acuminatam eâdem ſemiparabolâ genitam eam proportionem habet quam* 15 *ad* 16. *Quod quidem nunquam verum eſt, niſi tum, quando Parabola axis AB baſi AC æqualis eſt. Occaſio errori data videtur ex ſcholio eius poſt* 8 prop. l. 2. cap. 7. *vbi cùm vellet numeris exprimere, quam proportionem habeat diſtantia QO ad diſtantiam QP, lineâ* 12 *&* 13 *dicti ſcholij tam axem AB, quàm ſemibaſim AC ſtatuit* 2000. *adeoque hanc illi æqualem; atque inde elicit QO eſſe ad QP, vt* 15 *ad* 16; *vti videre eſt* num. 3 *eiuſdem ſcholij. Oblitus deinde, vt apparet, eam proportionem proueniſſe ex ſuppoſitâ rectarum AB, & AC æqualitate.* lib. 3. cap. 6. prop. 28 *illimitatè aſſumit diſtantiam QO eſſe ad diſtantiam QP, vt* 15 *ad* 16, *indeque concluſit etiam illimitatè conoïdem obtuſam eſſe ad acutam, vt* 15 *ad* 16. *Verùm hallucinationes eiuſmodi ex incuria & obliuione natas viris aliàs doctiſſimis ſubrepere nihil nouum aut mirum. Quare lectores beneuoli & prudentes, facilè ſolent inter multa inuenta præſtantia ſcriptori hoſce næuos condonare.*

Scimus & hanc veniam petimuſque damuſque viciſſim.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

Semiparabolam exhibere, quæ conoïdem obtuſam, & conoïdem acutam æquales, vel datam habentes rationem producat.

AD rectum ponantur angulum duæ rectæ AB, AC, & ſit AC partium 16, quarum AB eſt 15. Circa axem AB per punctum C deſcripta Parabola producet conoidem acutam æqualem obtuſæ. *Fig. 39.*

Nam conoïs obtuſa eſt ad acutam ab eâdem ſemiparabolâ CBA genitam [a], vt AC ad 16 decimaſquintas axis AB. Cùm ergo per conſtr. AC ſit æqualis 16 decimiſquintis axeos AB, etiam conoïs obtuſa acutæ æqualis erit. *a per præc.*

Quod ſi AC ad 16 decimaſquintas dati axis AB fiat in ratione datâ, per B & C deſcripta Parabola dabit conoides obtuſam & acutam rationem habentes datam: vti patet.

PROPOSITIO XXIX.

Parabola (DEF) ad circulum (ADN) cuius diameter eſt baſis Parabolæ, eam habet rationem, quam Parabolæ axis (AE) ad peripheriam (OP), cuius radius eſt æqualis diſtantiæ centri grau. (K) ſemiparabolæ, ab axe. *Fig. 34.*

DEmonſtratio. Cylindrus DM conoïdi Parabolicæ circumſcriptus duplus [b] eſt conoïdis. Quare ſi axis AE ſecetur bifariam in C, erit Cylindrus DL altitudinis AC par conoïdi. Atqui eadem conois æquatur [c] etiam recto ſolido, cuius baſis eſt ſemiparabola DEA, altitudo verò par circumferentiæ OP, cuius radius eſt AO, hoc eſt KB diſtantia centri grauitatis K, ab axe. Ergo Cylindrus DL & rectum illud ſolidum æqualia ſunt. Ergo ſemiparabola DEA baſis recti ſolidi, eſt ad circulum ADN baſim Cylindri DL, vt reciprocè Cylindri altitudo AC ad altitudinem recti ſolidi, peripheriam nempe OP. Ergo tota Parabola DEF eſt ad circulum ADN, vt axis totus AE ad peripheriam OP. Quod erat demonſtrandum. *b per 31. l. 1. Cyl & Annul.* *c per 9. huius.*

PARS QVARTA.

Conatus & viæ multiplices ac nouæ ad circuli quadraturam.

Totis paſſim Cylindricorum & Annularium quatuor libris noſtris prioribus plurimas reperiet lector theorematicas circuli quadraturas; quas nouâ iam acceſſione hîc cumulabimus.

PROPOSITIO XXX.

Dato centro grauitatis ſemihyperbolæ, ſemiellipſeos, ſemicirculi, datur omnium quadratura.

Cùm centro grauitatis partium circuli & Ellipſis connexam eſſe circuli & Ellipſis quadraturam primus demonſtrauit la Faille è Societate IESV. *Idem deinde præſtitit Paulus Guldinus ex eadem Societate, qui vltra progreſſus eamdem connexionem extendit ad centrum grauitatis partium circumferentiæ circularis; cuius inter cætera hoc extat egregium theorema, centrum grauitatis ſemicircumferentiæ eſſe punctum vltimum quadratricis. Nouiſſimè quod adhuc aliis fuerat intactum, etiam hyperbolæ quadraturam ex ſuo pendere grauitatis centro primi aperuêre Antonius Lalouera è Societate noſtra, & Chriſtianus Hugenius, qui vno eodemque anno mutuorum ignari inuentorum, ſua de his aliiſque egregia theoremata edidêre. Ego præſtantibus his Geometris ſuam ſingulis quam omni iure merentur laudem lubentiſſimè concedens, connexionem illam triplicem ex vniuerſali theoremate noſtro vnicâ demonſtratione concludam hunc in modum.*

Demonſtratio. Semihyperbolæ, ſemiellipſeos, ſemicirculi NEFB centrum grauitatis eſto D, & inſcribatur ſingulis triangulum, cuius centrum grauitatis eſto C. Si iam ſectiones datæ NEFB, *Fig. 30. 31. 32.*

NEFB, cum inſcriptis triangulis circa axem NB in orbem ducantur, ſemihyperbola producet conoidem hyperbolicam cum inſcripto ipſi cono, ſemiellipſis ſphæroidem cum inſcripto ipſi rhombo conico, ſemicirculus ſphæram cum inſcripto item rhombo conico: eſtque ex Archimede ª nota proportio horum ſingulorum corporum rotundorum ad inſcriptos ſibi conos & rhombos conicos. Atqui rotundum corpus à ſectione NEFB productum æquatur ᵇ ſolido recto, cuius baſis eſt ipſa ſectio NEFB, altitudo autem par peripheriæ à grauitatis centro D deſcriptæ, cuius radius eſt XD, ſeu AO; & rotundum ſolidum genitum à triangulo NEB, ipſe nempe inſcriptus conus, ſeu rhombus conicus æquatur ᶜ ſolido recto cuius baſis eſt triangulum ipſum NEB, altitudo verò par circumferentiæ deſcriptæ à centro grauitatis C ipſius trianguli, cuius radius eſt ZC, ſeu AP. Ergo etiam duorum horum rectorum ſolidorum eſt nota proportio, ex. gr. ea, quæ eſt rectæ K ad rectam M. Fiat vt AO ad AP (quæ quidem ratio nota eſt, cùm dentur grauitatum centra O & P) ſic K ad aliam quampiam S. Ratio igitur K ad M, hoc eſt ratio quæ eſt inter duo illa recta ſolida, ᵒ componitur ex ratione K ad S, & ratione S ad M. Atqui etiam ratio K ad M, ſeu ratio quæ eſt inter illa duo recta ſolida, ᵖ componitur ex his duabus, nempe ex ratione altitudinum (hoc eſt peripheriæ OL, ad peripheriam PI, hoc eſt radij AO, ad radium AP) & ex ratione baſis NEFB, ad baſim NEB, Quare cùm ratio AO ad AP ſit eadem ᵈ cum ratione K ad S, etiam ratio reliqua baſis NEFB, ad baſim NEB eadem eſt cum ratione reliquâ S ad M. Quare cùm ratio S ad M nota ſit (eſt enim ratio rectæ datæ ad rectam datam) etiam ratio ſemihyperbolæ, ſemiellipſeos, ſemicirculi NEFB, ad triangulum NEB nota erit. Quod erat demonſtrandum.

a lib. de ſphæroid. & conoid.
b per 5. & 9. huius.
c per eand.
o ex elem.
p Pappus l.
d per conſtr.

Atque hæc quidem hyperbolæ, Ellipſi ac circulo quodammodo communia. Verùm alia eſt Ellipſi & circulo propria, multò priori illâ admirabilior atque illuſtrior centri grauitatis tum quadratura connexio, quam tribus ſequentibus theorematis aperiam.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 35. 36. Semiellipſeos SDE centrum eſto A, grauitatis autem centrum O. Circuli circumferentia OP, cuius radius eſt AO vtriuſque centri interuallum, ad quatuor trientes axis ES, qui ſemiellipſeos SDE baſis eſt, eam habet rationem, quam axis alter DF, ad axem ES.

DEmonſtratio. Sphærois SDEF genita à ſemiellipſi SDE rhombi conici ſibi inſcripti DEFS dupla eſt, vt demonſtraui *l. 1. Cylind. & Annul p. 25*; ac proinde ſphærois eſt ad rhombum DEFS, vt 2 ad 1. Rhombus autem DEFS eſt ad Cylindrum HM ſphæroïdi circumſcriptum, ª vt 1 ad 3. Igitur ex æquo ſphærois SDEF eſt ad Cylindrum HM, vt 2 ad 3. Sumantur SC duæ tertiæ axis SE. Erit quoque Cylindrus HL, cuius altitudo SC, ad Cylindrum HM ᵐ vt 2 ad 3, ac proinde æqualis ſphæroidi SDEF. Atqui eadem ſphærois etiam æqualis ⁿ eſt recto ſolido, cuius baſis eſt ſemiellipſis SDE, altitudo autem par circumferentiæ OP, à grauitatis centro O deſcriptæ, cuius radius AO. Ergo rectum illud ſolidum Cylindro HL æquale eſt. Ergo recti ſolidi altitudo, peripheria nempe OP, eſt ad SC altitudinem Cylindri, vt ᵇ reciprocè baſis Cylindri, nempe circulus DN, ad recti ſolidi baſim, nempe ſemiellipſim SDE. Ergo peripheria OP eſt ad duplam ipſius SC, hoc eſt ad quatuor trientes axis SE, (eſt enim SC duo trientes axis SE) vt circulus DN ad totam Ellipſim SDEF. Sed DN circulus eſt ad Ellipſim SDEF, ᶠ vt axis DF ad axem SE. Ergo peripheria OP eſt ad quatuor trientes axis SE, vt axis DF ad axem ES. Quod erat demonſtrandum.

a per 10. l. 12.
m per 13. l. 12.
n per 5. huius.
b patet ex 15. l. 12.
f Archim.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 37. Semicirculi SDE centrum eſto A, grauitatis verò centrum O. Circuli peripheria OP, cuius radius eſt AO, vtriuſque centri interuallum, ad diametrum ES eam habet rationem, quam 4 ad 3.

a per 13. l. 12
b Archim.

DEmonſtratio. Ex diametro SE ſumatur SC par duobus trientibus diametri. Cylindrus igitur HL altitudinis SC erit ad Cylindrum HM ſphæræ circumſcriptum ª vt 2 ad 3. Sed etiam ſphæra ASDN eſt ad eundem HM Cylindrum ᵇ vt 2 ad 3. Ergo Cylindrus HL,

& ſphæra æquales ſunt. Atqui eidem ſphęræ æquatur [c] etiam ſolidum rectum, cuius baſis eſt ſemicirculus SDE, altitudo autem par circumferentiæ OP deſcriptæ à grauitatis centro O, cuius radius AO. Ergo rectum illud ſolidum etiam Cylindro HL æquale eſt. Ergo recti ſolidi altitudo peripheria OP, eſt ad Cylindri altitudinem SC, vt [d] reciprocè Cylindri baſis circulus SDN ad baſim recti ſolidi ſemicirculum SDE. Ergo peripheria OP dupla eſt rectæ SC; quæ cùm per conſtr. conficiat duos trientes diametri SE, erit OP circumferentia par quatuor trientibus diametri SE. Quod erat demonſtrandum.

c per 5. huius.
d patet ex 15. l. 12.

Poſtquam theoremata proximè præcedentia iam inueniſſem, incidi in Ærarium Bettini, qui tomi 3. parte 2. pag. 69. & 70. proponit ſequens theorema noſtris iam demonſtratis affine. Sed quia nullam eius adfert demonſtrationem, quæ Geometrica, hoc eſt infallibilis cenſeri poſſit, nos hic eâdem illud methodo, quâ præcedentia, Geometricè demonſtrabimus.

PROPOSITIO XXXIII.

Circulus eſto ASDN, cuius centrum A, diameter SE, ſemiperipheria SDE, cuius centrum grauitatis O. *Fig. 38.*

Circumferentia OP, cuius radius eſt AO vtriuſque centri interuallum dupla eſt diametri SE dati circuli.

D*Emonſtratio.* Superficiei ſphęræ ASDN genitæ à ſemicircumferentiâ SDE, æqualis eſt [a] Cylindrica ſuperficies, cuius baſis eſt eadem ſemiperipheria SDE, altitudo autem par circumferentiæ OP à grauitatis centro O deſcriptæ, cuius radius AO. Atqui eidem ſuperficiei ſphæricæ [b] æqualis eſt Cylindri HM ſphęræ circumſcripti ſuperficies abſque baſibus. Ergo hæc poſterior Cylindrica ſuperficies illi priori æqualis eſt. Ergo prioris illius altitudo, nimirum peripheria OP, eſt ad poſterioris altitudinem SE, vt reciprocè poſterioris baſis, nempe peripheria tota SDN, ad prioris baſim, nempe ſemiperipheriam SDE. Quare circumferentia OP dupla eſt diametri SE. Quod erat demonſtrandum.

a per 14. huius.
b Archim.

Ex tribus proximè præcedentibus propoſitionibus cernitur, quàm non modò neceſſaria, ſed etiam concinna & elegans cum grauitatis centro ſit quadraturæ connexio.

PROPOSITIO XXXIV.

Semipheriæ SDE centrum grauitatis eſto I; ſemicirculi autem ASDE grauitatis centrum ſit O. *Fig. 37.*

Dico IA diſtantiam centri grauitatis ſemipheriæ à diametro SE, ſeſquialteram eſſe ipſius OA diſtantiæ centri grauitatis ſemicirculi ab eadem diametro.

D*Emonſtratio.* Per pręcedentem peripheria cuius radius AI, eſt ad diametrum SE, vt 6 ad 3: & per 32 diameter SE eſt ad peripheriam OP, cuius radius AO, vt 3 ad 4. Igitur ex æquo peripheria cuius radius AI, eſt ad peripheriam cuius radius AO, vt 6 ad 4. Quare cùm peripheriæ ſint radijs proportionales, etiam AI eſt ad AO vt 6 ad 4, ſiue vt 3 ad 2. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXV.

Segmenti circularis HCL centrum grauitatis eſto O, ſemiſegmenti verò HCP grauitatis item centrum ſit I, eiuſque à ſemidiametro AOC diſtantia IO. *Fig. 44. in figurâ aliqua lineæ redundant.*

Dico rationem rectæ AO ad rectam IO eſſe notam.

D*Emonſtratio.* Rotundum ſolidum genitum à ſegmento circulari HCP, reuoluto circa radium NA ipſi CY perpendicularem, eſt ad rotundum ſolidum quod fit ab eodem ſegmento HCP rotato circa radium APC, [a] vt peripheria, cuius radius AO, eſt ad peripheriam cuius radius OI; hoc eſt vt [b] radius ipſe AO ad radium OI. Atqui ratio duorum horum

a Patet ex 9 huius. & cor. 2. in ſch. poſt p. 9.
b Pappus.

Digitized by Google

horum rotundorum ſolidorum nota eſt; primum enim æquari ſphæræ cuius HL diameter eſt, demonſtraui *prop.44. l.1. Cylind. & Annul.* Secundum verò eſt portio ſphæræ, cuius ratio ad ſphæram nota eſt ex Archimede. Ergo nota etiam eſt ratio AO ad OI. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVI.

Fig.44. Ex his abſolutè exhibebitur linea recta, in quâ exiſtit centrum grauitatis ſemiſegmenti circularis (HCP.)

Iiſdem enim poſitis quæ in præcedenti, quoniam nota eſt ratio AO ad OI, ea ſit quæ eſt datæ rectæ AP ad PM. Ex A centro per M ducatur recta AZ. In hac eſt centrum grauitatis ſemiſegmenti HCP.

D*Emonſtratio*. Intelligatur enim per O centrum grauitatis ſegmenti totius HCL ducta OX parallela ad HL, ſecans AZ in I. Ex conſtr. eſt vt AP ad PM, ita AO ad diſtantiam centri grauitatis ſemiſegmenti HCP à diametro YC, ſed etiam eſt vt AP ad PM, ita AO ad OI. Liquet ergo punctum I in rectâ AZ exiſtens, eſſe centrum grauitatis ſemiſegmenti HCP. Exhibita eſt ergo recta &c. Quod petebatur.

PROPOSITIO XXXVII.

Fig.44. Iiſdem poſitis quæ in propoſ.35, qui dederit proportionem interuallorum OP, IO, quibus duo grauitatum centra, O ſegmenti totius HCL, I ſemiſegmenti HCP, diſtant à ſuis baſibus HL, CP, dabit circuli quadraturam.

D*Emonſtratio* patet ex *propoſ.* 35. Nam ſi nota fiat ratio OP ad IO, quoniam per *propoſitionem* iam citatam nota etiam ſit ratio IO ad AO, ex æquo nota quoque fiet ratio OP ad AO. Quare diuidendo, etiam nota erit ratio AP rectæ datæ ad PO, ac proinde inuentum erit O centrum grauitatis ſegmenti circularis HCL. Atque inde dabitur circuli quadratura. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVIII.

Fig.45. Arcus HCL ſemicircumferentiâ minoris centrum grauitatis ſit O, eiuſque ſemiſſeos HC, centrum ſit G: arcum verò ſubtendat HL.

Si innoteſcat proportio diſtantiarum OP, GO, datur quadratura circuli.

D*Emonſtratio*. Ex centro circuli A ducantur rectæ AM, AC, ſecantes arcus HC, HL biſariã in M & C. Manifeſtum eſt centrum grauitatis arcus HC eſſe in rectâ AM arcum HC biſecante, & centrum gr. arcus HCL eſſe in rectâ AC biſecante arcum HCL. Deinde per O centrum grauitatis arcus HCL ducatur OX parallela ſubtenſæ HL ſecans rectam AM in G. Manifeſtum quoque eſt centrum gr. arcus HC eſſe in rectâ OX, ac proinde in ipſo concurſus puncto G. Quoniam recta AP data eſt, & AM, AC poſitione datæ, data quoque eſt ratio AP ad PN; ac proinde, quia GO eſt parallela ad HL, data etiam eſt ratio AO ad OG. Quare ſi detur ratio OG ad OP, etiam dabitur ex æquo ratio AO ad OP; & diuidendo dabitur ratio AP ad PO. Quare cùm recta AP ſit data, etiam PO data eſt, ac proinde inuentum eſt centrum grauitatis arcus HL, atque inde datur quadratura circuli. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 57. Libro 3. Cyl. & Annul. prop. 49 *demonſtraui ſi innoteſcat ratio quam annuli circularis aut Ellipticæ pars exterior, genita nempe à ſemicirculo aut ſemiellipſi HOQ rotato circa axem XZ, ad interiorem genitam à ſemicirculo ſeu ſemiellipſi HGQ haberi quadraturam:* & lib. 4. prop. 48. *oſtendi ſimiliter datâ pro-*

por-

portione, quam habet circularis annuli exterior ſuperficies genita à ſemicircumf. HOQ circa axem XZ, ad interiorem genitam ab ſemicircumf. HGQ, dari ſimiliter quadraturam circuli. Sed quia adhuc propior videtur aditus aperiri, ſi partes interiores cum interioribus & exteriores cum exterioribus comparentur, collationem huiuſmodi per aliquot theoremata inſtituamus.

PROPOSITIO XXXIX.

Si reperiatur proportio ſolidorum annularium, quæ fiunt à duobus æqualibus ſemicirculis HGQ, PMR, vel HOQ, PVR, quorum baſes HQ, PR ſint parallelæ ad reuolutionis axem XZ, datur quadratura circuli. *Fig. 57.*

D*Emonſtratio.* Semicirculorum HGQ, PMR centra grauitatum ſint C & D. Cùm ſemicirculi æquales ſint, patet centrorum interualla CF, DN æqualia eſſe. Additâ igitur communi CN, etiam totæ FN, CD æquales erunt. Atqui FN eſt recta data. Ergo etiam CD data recta eſt. Deinde quoniam prædicta annularia ſolida genita ſunt à ſemicirculis æqualibus, patet ex 5 *huius*, eam inter ſe habere rationem, quam peripheriæ à grauitatum centris C, D, circa axem reuolutionis XZ deſcriptæ, quarum radij ſunt AC, AD: hoc eſt eamdem quam ipſi radij AC, AD. Ergo ſi nota fiat proportio annularium ſolidorum, nota quoque fiet ratio CA ad DA. Vnde diuidendo, ratio CD ad DA erit nota. Quare cùm recta CD oſtenſa ſit eſſe data, ſeu nota, etiam DA diſtantia centri grauitatis ſemicirculi nota erit: adeoque inuentum erit D grauitatis centrum in ſemicirculo, ac proinde & quadratura. Quod fuit demonſtrandum.

Eadem erit demonſtratio ſi comparentur annularia ſolida quæ fiunt à ſemicirculis AOQ, PVR.

PROPOSITIO XL.

Si reperiatur proportio ſuperficierum annularium, quæ fiunt à duabus ſemiperipheriis æqualibus HGQ, PMR, vel à duabus HOQ, PVR, quarum baſes ſint parallelæ ad reuolutionis axem XZ, datur circuli quadratura. *Fig. 57.*

D*Emonſtratio.* Annulares ſuperficies genitæ à ſemiperipheriis HGQ, PMR æqualibus ſimiliterque poſitis circa reuolutionis axem XZ eam inter ſe rationem habent, quam peripheriæ à grauitatum centris C, D, circa axem XZ deſcriptæ, quarum radij ſunt AC, AD (vt patet ex 14 & 15 *huius*) hoc eſt eamdem quam ipſi radij AC, AD. Quare ſi nota fiat annularium harum ſuperficierum proportio, nota etiam fiet ratio CA ad AD. Quare diuidendo, etiam ratio CD ad DA nota erit. Atqui CD eſt data, vtpote æqualis datæ rectæ FN. Ergo etiam DA datur. Inuentum eſt ergo D centrum grauitatis ſemiperipheriæ PMR: ac proinde & quadratura circuli. Quod erat demonſtrandum.

Atque hæc quidem proportio, cùm æquales ſunt ſemicirculi, altâ etiamnum nocte latet ſepulta. Nihilominus videri forſan poſſit huius inuentio non penitùs deſperanda. Exhibituri certè illam ſumus propoſitione ſequenti in ſemicirculis inæqualibus.

PROPOSITIO XLI.

Duo circuli ſe interius contingant in A, ibidemque eos tangat recta LH. Sint autem diametri CF, DG ad LH parallelæ. *Fig. 58.*

Proportio ſolidorum annularium, quæ fiunt à ſemicirculis tam interioribus CAF, DAG, quàm exterioribus CMF, DNG, circa LH rotatis, eſt triplicata proportionis diametrorum CF, DG: annularium verò ſuperficierum à ſemiperipheriis tam interio-

ribus quam exterioribus circa LH genitarum proportio eſt proportionis diametrorum duplicata.

D*Emonſtratio I. Partis.* Circulorum centra ſint E, I, ſemicirculorum verò CAF, DAG, grauitatum centra ſint X, Z: quæ omnia exiſtunt in diametro MA ductâ per contactum A. Duæ tertiæ diametri FC ſunt ad FC vt duæ tertiæ diametri DG ſunt ad DG. Sed FC eſt ad ſemiperipheriam CAF, [a] vt DG ad ſemiperipheriam DAG. Ergo ex æquo duæ tertiæ diametri FC ſunt ad ſemiperipheriam CAF, vt duæ tertiæ diametri DG ad ſemiperipheriam DAG. Iam verò EX eſt ad duas tertias FC, [b] vt duæ tertiæ FC ad ſemiperipheriam CAF; hoc eſt (quemadmodum iam oſtendi) vt duæ tertiæ DG ad ſemiperipheriam DAG. Atqui etiam eſt [b] vt duæ tertiæ GD ad DAG, ita IZ ad duas tertias GD. Ergo vt EX eſt ad duas tertias FC, ita IZ ad duas tertias DG. Igitur permutando EX eſt ad IZ, vt duæ tertiæ FC ad duas tertias DG; hoc eſt vt FC ad DG; hoc eſt EA ad IA. Cùm ergo ſit vt tota EA ad totam IA, ita EX ad IZ, etiam erit reliqua XA ad reliquam ZA, vt tota EA ad totam IA. Cùm igitur ratio ſemicirculi CAF ad ſemicirculum DAG ſit duplicata rationis EA ad IA, duplicata etiam erit rationis XA ad ZA. Ergo ratio compoſita ex ratione ſemicirculi FAC ad ſemicirculum DAG, & ex ratione XA ad ZA, triplicata erit rationis EA radij ad radium IA. Atqui ratio [p] annularium ſolidorum quæ fiunt à ſemicirculis CAF, DAG circa LH rotatis, compoſita eſt ex ratione ſemicirculi FAC ad ſemicirculum DAG, & ex ratione peripheriarum, quarum radij AX, AZ; hoc eſt ex ratione radiorum AX, AZ. Ergo ratio annularium ſolidorum à ſemicirculis CAF, GAD genitorum, triplicata eſt rationis radij EA ad radium IA, ſeu diametri CF ad diametrum DG. Quod erat demonſtrandum.

[a] *Pappus.*

[b] *La Faille de cētro gr.*

[p] *patet ex 5 huius, & cor. 3 in ſcho. poſt p. 9.*

Idem eodem modo demonſtrabitur de ſolidis annularibus, quæ fiunt à ſemicirculis exterioribus CMF, DNG, reuolutis circa eumdem axem LH.

Demonſtratio II. Partis. Ratio annularium ſuperficierum à ſemiperipheriis CAF, DAG genitarum compoſita eſt ex ratione ſemiperipheriæ CAF ad ſemiperipheriam DAG, & ex ratione peripheriarum, quarum radij AX, AZ, vt patet ex 15. *huius.* Sed ratio ſemiperipheriæ CAF ad ſemiperipheriam DAG eſt ratio [n] radij EA ad radium IA; ratio autem peripheriarum quarum radij AX, AZ, eſt ratio [n] radij AX ad radium AZ; ratio autem AX ad AZ eſt rurſus ratio EA ad IA, vt oſtenſum in prima parte. Ergo ratio ſuperficierum annularium à ſemiperipheriis CAF, DAC circa LH genitarum, eſt duplicata rationis EA ad IA, ſeu diametri CF ad diametrum DG. Quod erat demonſtrandum.

[n] *Pappus.*

Idipſum ſimili diſcurſu demonſtrabitur de annularibus ſuperficiebus, quæ fiunt à ſemiperipheriis exterioribus CMF, DNG.

Verum eſt theorema tam quoad ſoliditatem quàm ſuperficiem etiam in partibus tam interioribus quàm exterioribus patentium annularium, quando radij reuolutionum BE, BV ſunt proportionales diametris CF, PQ genitorum circulorum MCAF, QRPK.

Demonſtratio ſimilis eſt præcedenti.

PARS V.

Solido annulari ab Hyperbolâ genito ſphæra exhibetur æqualis.

Hinc nouæ ad Hyperbolæ quadraturam viæ aperiuntur; & reperitur ſphæra æqualis annulo integro producto à figurâ, quæ ex ſegmento circuli & ſegmento hyperbolæ compoſita eſt.

Deinde Cylindri hyperbolici partes quædam abſolutè cubantur: vnde rurſum aliæ ad quadraturam hyperbolæ demonſtrantur viæ.

DEFINITIONES.

Fig 46.

1. A*Nnulus planus* eſt ſuperficies plana (FF) duabus concentricis peripheriis comprehenſa.

Itaque ſi concentricus minor circulus auferatur à maiore concentrico, ſpatium reſiduum eſt annulus planus.

Hinc patet ſi ex rectâ quâpiam AB ſumatur pars quælibet BC, & tota recta AB fixo

manente

manente puncto A ducatur in orbem, à ſegmento BC generari planum annulum.

2. Cylindrus cauus eſt ſolidum duobus planis annulis OO, NN, & duabus ſuperficiebus Cylindricis, circa eumdem axem poſitis, comprehenſum. *Fig.* 48.

Itaque ſi duo Cylindri æque alti circa eumdem axem AC exiſtant, & minor DQ auferatur ex maiore BS, corpus reſiduum eſt Cylindrus cauus.

Hinc patet ſi ex rectangulo ABEC ſumatur rectangulum DBEF, & figura tota circa AC circumagatur, generari Cylindrum cauum à rectangulo BDEF.

Eadem definiuimus in libris prioribus, hic rurſum appoſui vt ſint ad manum.

Lemma XII.

Annuli plani FF centrum eſto A, per quod ducta ſit recta GCB. *Fig.* 46. 47.

Annulus planus eſt ad circulum quemuis DM, vt rectangulum GBC ad quadratum radij DQ.

Demonſtratum eſt *lib.* 1. *Cyl. & Annul. prop.* 43.

PROPOSITIO XLII.

Data ſit hyperbola DMX, cuius axis tranſuerſus MN, centrum A, baſis ad axem recta DX. Per centrum A ponatur in hyperbolæ plano recta O5 ad axem perpendicularis. *Fig.* 49.

Dico; ſi axis tranſuerſus MN eſt æqualis lateri recto, annulare ſolidum genitum ab hyperbolà DXMD circa rectam O5 circumactâ, æquari ſphæræ, cuius diameter eſt hyperbolæ baſis DX. Quod ſi tranſuerſus axis non ſit par lateri recto, hyperbolicum illud ſolidum annulare ad ſphæram diametri DX eam habebit rationem, quam axis tranſuerſus ad latus rectum.

D*Emonſtratio.* Sectio oppoſita ſit SNT, & centro B interuallo BD, vel BX (ſunt enim BD, BX ex hyp. æquales) deſcribatur circulus DZX. Secetur deinde BD in quotuis æquales partes, & per ſectionum puncta ducantur parallelæ ad BN rectæ ſecantes hyperbolam MD in punctis H, I, L; circulum in punctis, K, C, V; axem reuolutionis O5, in 2, 3, 4; hyperbolam SN, in R, 6, 7. Tum perpendicularibus demiſſis ex H, I, L, item ex K, C, V, inſcripta erunt ſemihyperbolæ rectangula FH, GI, BL, quadranti verò BDZ rectangula FK, GC, BV. His peractis, ſi quadrans BDZ cum inſcriptis ſibi rectangulis conuertatur circa DB, ipſe quidem hemiſphærium deſcribet, rectangula verò producent Cylindros ſibi mutuo inſiſtentes, & hemiſphærio inſcriptos. Hac autem Cylindrorum inſcriptione hemiſphærium exhauriri, hoc eſt tot inſcribi poſſe Cylindros rectâ BD in plures ſemper ac plures partes diuisâ, vt aggregatum Cylindrorum ab hemiſphærio deficiat quantitate quantumlibet paruâ, patet ex Archimede, *prop.* 21. de conoidibus & ſphæroid. Similem in modum ſemihyperbola DMB cum inſcriptis ſibi rectangulis ſi rotetur circa axem OA, ipſa quidem deſcribet ſolidum annulare, rectangula verò producent Cylindros cauos [a] annulari ſolido inſcriptos & ſibi mutuo gradatim inſiſtentes, quorum baſes ſuperiores erunt plani annuli à rectis EH, FI, GL, eàdem reuolutione illà geniti, inferiores autem erunt annuli plani facti à rectis Fω, Gϑ, Bλ. Tot porro annulari ſolido inſcribi poſſe cauos huiuſmodi Cylindros, vt ipſum exhauriant, hoc eſt vt eorum aggregatum ab annulari ſolido deficiat quantitate minori datâ quâcumque, demonſtraui *prop.* 3. *lib.* 3. *Cylind. & Annul.* [a *patet ex defin. Cylindri caui.*]

Iam verò demonſtrabimus totum inſcriptum hyperbolico annulari ſolido ad totum inſcriptum hemiſphærio eam ſemper tenere rationem, quam tranſuerſus axis MN ad latus rectum. Per 22. *lib.* 3 *conic.* Apollonij rectangulum REH eſt ad rectangulum DEX, vt axis tranſuerſus MN ad latus rectum. Sed rectangulum DEX æquatur [b] quadrato EK. Ergo rectangulum REH eſt ad quadratum EK, vt latus tranſuerſum ad rectum. Sed vt rectangulum REH ad quadratum EK, ita [a] planus annulus genitus à recta EH circa AO reuoluta eſt ad circulum genitum à radio EK rotato circa BD; vt verò hic planus annulus ad hunc circulum, ita [c] Cylindrus cauus genitus à rectangulo FH circa OA reuoluto, ad Cylindrum integrum factum à rectangulo KF, rotato circa BD, ſunt enim æquè alti. Ergo Cylindrus cauus factus à rectangulo FH eſt ad Cylindrum integrum factum à rectangulo KF, vt latus MN [b 35. 3.] [a *per lem.* 12.] [c *patet ex* 11. 12.]

tranſuerſum ad rectum. Eodem diſcurſu oſtendam Cylindros cauos factos à rectangulis GI, BL, ſingulos eſſe ad ſingulos Cylindros integros genitos à rectangulis CG, VB, vt latus MN
d per 12. 5. tranſuerſum ad rectum. Ergo [d] omnes Cylindri caui ſimul ſumpti ſunt ad omnes Cylindros integros ſimul ſumptos, vt latus MN tranſuerſum ad rectum. Atque hoc ſemper eueniet, quotcumque Cylindros cauos hyperbolico annulari ſolido, & Cylindros integros æquè multos hemiſphærio inſcripſerimus. Quare cum per inſcriptiones illas vtrumque corpus exhauriatur per ea quæ demonſtraui ad *prop. x. lib. 12*; vel *prop. 1 lib. 1. Cylind. & Annul.* etiam hyperbolicum annulare ſolidum genitum à ſemihyperbola BMD eſt ad hemiſphærium productum à qoadrante BDZ, vt MN axis tranſuerſus ad latus rectum. Ergo etiam annulare ſolidum genitum à tota hyperbola DMX, eſt ad totam ſphæram diametri DX, vt axis tranſuerſus ad latus rectum. Quod erat demonſtrandum.

Quanti hoc theorema ſit momenti, ex ſequentibus apparebit.

PROPOSITIO XLIII.

Fig. 49. Iiſdem poſitis, circa axem MB productum hyperbolæ DMX apponatur alia æqualis & ſimilis D9X.

Si annulari ſolido quod fit ab hyperbola D9X circa O5 circumacta, etiam ſphæra exhibeatur æqualis, eiuſue proportio ad aliquam ſphæram vel ad ſolidum annulare hyperbolæ prioris DMX, dabitur hyperbolæ centrum grauitatis, adeoque & quadratura.

DEmonſtratio. Centra grauitatis hyperbolarum DMX, D9X, ſint P, & Q. Quoniam hyperbolæ ſunt æquales & ſimiles, ſimiliterque poſitæ, erit QP biſecta in B. Quoniam ſolidum annulare genitum ab hyperbola DMX circa O5 rotatâ, præcedenti *prop.* iam reduxi ad ſphæram, ſi etiam annolare ſolidum genitum ab hyperbola D9X reducatur ad ſphæram, nota fiet horum annularium ſolidorum proportio, cum ſphæræ ad ſphæram proportio ſit nota per 18. 12. Proportio igitur illa nota ſit SZ ad TZ. Si ST bifariam ſecetur in O, etiam ratio OZ ad TZ nota erit. Per 5 huius annulare ſolidum hyperbolæ D9X eſt æquale ſolido recto, cuius baſis eſt hyperbola D9X, altitudo verò par peripheriæ radio AQ deſcriptæ; & ſolidum annulare hyperbolæ DMX æquatur ſolido recto, cuius baſis eſt hyperbola DMX, altitudo autem peripheria radij AP. Atqui recta illa ſolida cum baſes habeant æquales hyperbolas, ſunt inter ſe vt altitudines, nimirum [o] peripheriæ radiorum AQ, AP, hoc eſt vt ipſi ra-
o per corol. a ſcho. p. 9. dij AQ. AP. Ergo etiam ſolida annularia erunt inter ſe vt radij AQ, AP. Sed ratio annularium ſolidorum eadem eſt, quæ ratio nota SZ ad TZ. Ergo etiam AQ eſt ad AP, vt SZ ad TZ: & diuidendo QP ad PA vt ST ad TZ. Ergo cum BP, OT ſint ſemiſſes rectarum QP, ST, etiam BP eſt ad PA, vt OT ad TZ: & compon. BA ad PA vt OZ ad TZ. Sed ratio OZ ad TZ nota eſt. Ergo etiam ratio BA ad PA nota eſt. Igitur ſi fiat vt OZ ad TZ, ita recta BA data ad aliam, ea erit diſtantia centri grauitatis P, ab hyperbolæ centro A, ac proinde ipſum grauitatis centrum exhibetur. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 50. Data ſit hyperbola DMX, cuius centrum A, axis BMA. Per quodvis (Z) punctum axis inter A centrum hyperbolæ & M verticem ducatur perpendicularis HN.

Si annulare ſolidum quod fit ab hyperbola DMX circa HN circumacta, reducatur ad ſphærã, habetur quadratura hyperbolæ.

DEmonſtratio. Centrum grauitatis hyperbolæ eſto O. Solidum annulare genitum ab hyperbola DMX circa axem FG per centrum A ductum circumactâ, eſt ad ſolidum annulare genitum ab eâdem hyperbola rotatâ circa axem HN, vt peripheria radij AO ad peripheriam radij ZO, quod quidem manifeſtum eſt ex 5 huius, *& Coroll. 2. ſcholij poſt 9. huius.*

Atqui

Atqui ſolidum annulare genitum ab hyperbola reuolutâ circa FG reduxi ad ſphæram *prop.* 42. Quare ſi etiam reducatur ad ſphæram, annulare genitum ab eadem hyperbola circa HN rotatâ; cum ſphærarum proportio nota ſit ex 18. 12, etiam horum annularium ſolidorum, ac proinde (vt iam oſtendi) & peripheriarum radiis AO, ZO deſcriptarum proportio nota erit. Vnde cùm peripheriæ ſint inter ſe vt radij, etiam radiorum AO, ZO proportio erit nota. Ea ſit, quæ eſt rectæ PS, ad rectam TS. Igitur diuidendo vt PT ad TS, ita AZ ad ZO. Quare cum tres primæ BT, TS, AZ ſint datæ, etiam datur quarta ZO, diſtantia videlicet centri grauitatis hyperbolæ à dato puncto Z. Inuentum eſt igitur centrum grauitatis hyperbolæ, ac proinde eius quadratura datur. Quod erat demonſtrandum.

Quidni verò cum vnum iam ſolidum annulare hyperbolicum prop. præced. *ad ſphæram reduxerim ſperari poſſit fortaſſe repertum iri aliquando viam, quâ ex reliquis etiam iſtiuſmodi ſolidis vel vnum aliquod ad ſphæram reducatur?*

PROPOSITIO XLV.

Si innoteſcat proportio quam habet conoïs hyperbolica obtuſa (quæ nimirum fit ab ſemiperbolâ BDM circa axem BM rotatâ) ad conoïdem hyperbolicam acutam, quæ nimirum fit ab eadem ſemihyperbolâ BMD rotatâ circa BD ordinatim axi applicatam, habetur quadratura hyperbolæ. *Fig. 50.*

DEmonſtratio. Centrum hyperbolæ eſto A, centrum verò grauitatis ſemihyperbolæ ſit Q: à quo ducantur perpendiculares QY, QO. Liquet centrum grauitatis hyperbolæ totius eſſe O. Solidum annulare genitum ex ſemihyperbolâ BMD conuerſâ circa FAG, eſt [a] ad conoïdem factam ab eadem rotatâ circa axem BM, vt peripheria radij RQ, ſeu AO ad peripheriam radij QO, hoc eſt vt radius AO ad radium QO. Atqui horum ſolidorum ratio eſt nota; vtrumque enim reductum eſt ad ſphæram, annulare quidem à me *prop.* 42. conoïs verò ab Archimede. Ergo etiam ratio AO ad OQ nota eſt. Ea ſit, quæ eſt rectæ L ad rectam V. Rurſum illa conoïs genita ab ſemihyperbola BMD rotatâ circa axem BM, eſt ad conoïdem genitam ab eadem ſemihyperbola circumducta circa BD ordinatim axi applicatam, vt [b] peripheria radij OQ ad peripheriam radij YQ; hoc eſt vt ipſa OQ ad YQ. Ratio autem harum conoïdum, cum ſupponatur eſſe nota, ea ſit quæ eſt V ad K. Igitur ex æquo vt L ad K, ita annulare ſolidum quod fit ab ſemihyperbola BMD rotatâ circa FAG, eſt ad conoïdem genitam ab eadem ſemihyperbola circa BD rotatâ. Sed annulare ſolidum iſtud eſt ad conoïdem dictam, [d] vt peripheria radij AO, ad peripheriam radij YQ, ſeu BO, hoc eſt vt ipſa AO ad ipſam BO. Ergo etiam vt L ad K, ita AO ad BO. Ergo ratio AO ad BO nota eſt. Quare O centrum grauitatis hyperbolæ inuentum eſt, atque inde eiuſdem quadratura. Quod erat demonſtrandum.

a patet ex 9. huius & ex cor. 2. eiuſd.

b patet ex 9. huius & cor. 2 in ſchol. poſt p. 9.

d patet ex 9 huius & corol. 2. in ſchol. poſt 9.

Corollaria.

I.

Proportio rectæ AO, quæ eſt diſtantia centri A hyperbolæ totius, ab eiuſdem centro grauitatis O ad QO diſtantiam centri grau. ſemihyperboles ab eodem O. nota eſt, vt oſtenſum eſt in diſcurſu demonſtrationis iam allatæ.

Quod ſi independenter ab iſto reperiatur ratio quæ eſt inter BO, & QO, dabitur quadratura hyperbolæ. Ita enim, cum nota ſit ratio AO ad OQ. & nota item ratio QO ad BO; ex æquo nota etiam eſſet ratio AO ad BO, adeoque & ipſum daretur grauitatis centrum O totius hyperbolæ.

I I.

Dato O centro grauitatis hyperbolæ, centrum grauitatis ſemihyperbolæ inuenire.

Quoniam ratio AO ad OQ nota eſt per *Corol.* 1, fiat in ea ratione ipſa AO data ad aliam, hæc perpendiculariter erecta ex O centro grauitatis hyperbolæ dabit Q centrum grauitatis ſemihyperbolæ.

PROPOSITIO XLVI.

Fig. 50. **Lineam rectam abſolutè exhibere, in quâ exiſtit centrum grauitatis ſemihyperbolæ.**

QVoniam AO,QO diſtantiæ centrorum A,O,& Q,O notam inter ſe habent rationem, fiat in ea ratione AB recta data ad aliam, quæ ponatur in rectâ BD ex B in I.

Dico: centrum grauitatis ſemihyperbolæ BDM exiſtere in rectâ AI, quæ ab hyperbolæ centro A,ad I,terminum rectæ iam inuentæ BI extenditur.

Ducatur enim ex O centro grau. hyperbolæ totius recta OQ parallela BI, ſecans AI in Q. Manifeſtum eſt centrum grau. ſemihyperbolæ BMD eſſe in recta OQ, & quia per conſt. AO diſtantia centrorum A,O,eſt ad diſtantiam centrorum grauitatis hyperbolæ totius O, & ſemihyperbolæ, vt AB ad BI, liquet centrum grau. ſemihyperbolæ eſſe in Q, vbi recta OQ ſecat ipſam BI, vt patet ex 4.6.

PROPOSITIO XLVII.

Fig. 51. **Data ſit hyperbola FDB, cuius axis DC, baſis FB ad axem recta. In hac producta ſumatur quoduis punctum A, per quod exiſtat perpendicularis GN.**

Si annulus obtuſus, qui fit ab hyperbolâ FDB circa GN circumactâ, vel eius pars alterutra, genita ab ſemihyperbolâ FDC, vel à CDB, reducatur ad ſphæram, datur quadratura hyperbolæ.

H*Actenus quid ad hyperbolæ quadraturam ex hyperbolico annulo acuto ſperari poſſit executi ſu mus: Idem iuuat hoc theoremate in obtuſo tentare.*

Demonſtratio. Centrum grau. ſemihyperbolæ eſto O, per quod ducantur PQ, IM parallelæ ad CA, CD. Obtuſum annulare ſolidum productum ab ſemihyperbolâ CDB, reuolutâ circum GN, eſt ad conoïdem genitam ab eâdem ſemihyperbola circa axem CD rotatâ, vt peripheria radij QO, ſeu AM, ad peripheriam radij PO, ſeu CM, vt patet ex 9. *huius & Corol.* 2. Atqui ratio horum ſolidorum eſt nota; nam conois reducta eſt ad ſphæram ab Archimede, & annulare ſolidum iam ſupponitur ad ſphæram reductum eſſe. Ergo etiam ratio harum peripheriarum, & quæ huic eſt eadem ratio radij AM ad radium CM, nota eſt. Secetur ergo ſecundùm notam hanc rationem recta data AC in M, & per M ducatur MI parallela axi CD. Manifeſtum eſt in rectâ MI fore centrum grau. ſemihyperbolæ CDB. Sit iam hyperbolæ centrum X. *prop. præcedenti* exhibetur alia recta linea ex X centro ad baſim CB ducta, in quâ etiam ſit centrum grau. ſemihyperbolæ CDB. Ea porro interſecabit neceſſariò rectam MI. Quare cùm ſemihyperbolæ grau. centrum ſit in vtrâque rectâ, erit hoc interſectionis ipſum punctum O. Inuentum eſt igitur grau. centrum in ſemihyperbola: ac [a] proinde & quadratura eiuſdem. Quod erat demonſtrandum.

a per 30. huius.

PROPOSITIO XLVIII.

Fig. 52. **Supra ſemihyperbolam ABF cuius axis AB, baſis AF axi recta, exiſtat Cylindrus rectus hyperbolicus BETKFA. Libro primo Cylindricorum & Annularium prop. 33. portionem BPKFA, quæ per punctum K, & axem AB ab hyperbolico Cylindro abſcinditur, reduxi ad corpus rectilineum: demonſtraui enim hanc portionem ad pyramidem, cuius baſis ſit triangulum ABF, altitudo autem eadem quæ Cylindri, eam habere rationem, quam recta compoſita ex ſeſquialterâ lateris tranſuerſi hyperboles S-**

BF&

BF & axe, ad compoſitam ex latere tranſuerſo & axe.

Dico: ſi etiam portio ABEOF ab eodem Cylindro per punctum E, & baſim hyperboles AF abſciſſa, reducatur ad rectilineum ſolidum, haberi quadraturam hyperbolæ.

DEmonſtratio. Sint pares AB, AF. Portio BPKFA eſt ad conoïdem obtuſam genitam à ſemihyperbolâ ABF, circa axem AB reuolutâ, vt [a] KF altitudo Cylindri ad peripheriam cuius radius eſt ordinatim applicata AF; hoc eſt (quoniam ex hyp. tam AF, ipſi AB, quàm KF ipſi EB æqualis eſt) vt EB ad peripheriam cuius radius eſt axis AB. Atqui etiam portio ABEOF eſt ad conoidem acutam genitam ab eadem ſemihyperbola ABF reuolutâ circa ordinatim applicatam AF, vt EB ad peripheriam, [b] cuius radius eſt axis AB. Ergo portio BPKFA eſt ad portionem ABEOF, vt conoïs obtuſa ad conoïdem acutam. Sed ratio portionis BPKFA ad portionem ABEOF nota eſt, primæ enim de facto exhibui ſolidum rectilineum æquale, de altera verò idem hic ſupponitur. Ergo enim nota erit ratio conoidis obtuſæ hyperbolicæ ad acutam. Ergo per 45. datur hyperbolæ quadratura. Quod erat demonſtrandum.

[a] per 17. l. 1. Cylindri. & Annul.

[b] per 16. ibid.

PROPOSITIO XLIX.

Data ſit hyperbola BCAD, cuius axis AB, axis tranſuerſus AM, centrum X, baſis CD ad AB axem recta. Supra hyperbolam erectus ſit Cylindrus indefinitæ altitudinis, ſectus plano per AB, ad baſim CAD recto, producente in Cylindri ſuperficie rectas BI, AF. Sumpto deinde in rectâ BI quouis puncto K, perque illud ductâ EN ad CD parallelâ, fiat vt XB ad XA, ſic BK ad AG. Fig. 53. Fig. 54.

Dico: ſi axis tranſuerſus AM eſt par lateri recto hyperbolæ, fruſtum Cylindrico-hyperbolicum GNECAD abſciſſum plano EGN, æquale eſſe pyramidi, cuius baſis eſt ſemiſſis quadrati CD; altitudo autem quarta proportionalis rectarum XB, BD, BK. Quod ſi axis tranſuerſus non eſt par lateri recto, dictum fruſtum erit ad dictam pyramidẽ, vt axis tranſuerſus ad latus rectũ.

DEmonſtratio. Circa baſim hyperbolæ CD deſcribatur circulus QCPD, & ex centro B ducatur BP perpendicularis ad CD. Tum fiat vt XB ad BD, ſic BK ad PR, quæ ex P erigatur perpendiculariter circulo QCPD, & ſupra circulum Cylindrus rectus in altitudine PR, à quo abſcindatur plano CRD portio PDRSC. Deinde per X centrum hyperbolæ ponatur ZV perpendicularis ad BM. Peripheria radij XB eſt ad peripheriam radij BD, vt XB ad BD; hoc eſt per conſtr. vt BK ad PR. Igitur permutando, peripheria radij XB eſt ad BK, vt peripheria radij BD, id eſt vt peripheria QC, PD, ad PR. Atqui ſolidum annulare hyperbolicum, quod fit ab hyperbolâ CAD circa ZV reuolutâ, eſt ad fruſtum Cylindrico-hyperbolicum GNECAD, vt peripheria radij XB eſt ad BK, vt demonſtraui *lib. 3. Cyl. & Annul. prop. 30 & 29*; ſphæra autem genita à circulo QCPD eſt ad portionem PDRSC, vt peripheria QCPD ad PR, quemadmodum oſtendi *lib. 1. Cyl. & Annul. prop. 13*. Ergo ſolidum hyperbolicum annulare ſupradictum eſt ad fruſtum GNECAD, vt ſphæra circuli QCPD eſt ad portionem PDRSC. Igitur permutando, ſolidum annulare dictum eſt ad ſphæram circuli QCPD, ſiue diametri CD, vt fruſtum GNECAD eſt ad portionem PDRSC. Sed dictum annulare ſolidum productum ab hyperbolâ CAD rotatâ circum ZV, eſt ad ſphæram diametri CD, vt [d] axis tranſuerſus AM ad latus rectum. Ergo etiam fruſtum GNECAD eſt ad portionem PDRSC, vt axis tranſuerſus AM ad latus rectum. Atqui portio PDRSC dupla eſt pyramidis, cuius baſis eſt triangulum APD, altitudo verò PR, vt demonſtraui *lib. 1. Cyl. & Annul. prop. 20*; ac proinde æqualis eſt pyramidi, cuius baſis eſt dupla trianguli CPD, ſeu par quadrato CP, quod eſt ſemiſſis quadrati CD; altitudo verò eadem PR. Ergo fruſtum

[d] per 42. huius.

hyperbolico Cylindricum etiam eſt ad pyramidem, cuius baſis eſt ſemiſſis quadrati CD, altitudo autem PR (quæ per conſtr. eſt rectis XB, BD, BK quarta proportionalis) vt axis tranſuerſus AM ad latus rectum : ac proinde, quando latus tranſuerſum eſt æquale lateri recto etiam fruſtum hyperbolico-cylindricum dictæ pyramidi æquale erit : quæ fuerant demonſtranda.

Ex hoc theoremate habetur cubatio portionis GNECAD ab hyperbolico Cylindro FNECAD abſciſſæ : quam aliâ viâ per libram etiam dedit Antonius Lalouera è Societate IESV, *in doctiſſimis ſuis Elementis tetragoniſmicis* lib. 4. p. 24. *Neque aliud reſtat ad totius Cylindri cubaturam, quàm vt cubetur portio GNEF, quæ eſt ea ipſa, de qua egi* prop. præc.

Corollarium I.

Planum EGN quo abſcinditur fruſtum GNECAD tranſit per X centrum hyperboles CAD. Patet ex 4.6. Nam ex hyp. vt XB eſt ad XA, ita BK eſt ad AG. Ergo recta KG, adeoque & planum EGN, producta tranſeunt per X.

Corollarium II.

Fig. 53. Iiſdem poſitis, in recta BI præter punctum K ſumatur aliud inſuper punctum quoduis L, perque illud ductâ HT ad CD parallela, fiat rurſum vt XB ad XA, ita BL ad AO.

Dico etiam haberi cubaturam fruſti hyperbolico-cylindrici planis EGN, HOT intercepti.

Demonſtratio. Per præcedentem habetur cubatura fruſti GNECAD, & per eamdem habetur cubatura fruſti OTHCAD. Ergo etiam habetur cubatura differentiæ eorumdem, quæ eſt ipſum fruſtum planis EGN, HOT interceptum. Quod erat demonſtrandum.

Tranſeunt porro ambo plana EGN, HOT per X centrum hyperbolæ, vt patet ex corollario præcedenti.

PROPOSITIO L.

Fig. 55. Iiſdem poſitis, à Cylindro hyperbolico abſciſſum ſit ſegmentum GNECAD plano EGN, ſic vt BK ſit ad AG, quemadmodùm XB ad XA. Cubatum iam igitur eſt hoc ſegmentum prop. præcedenti.

Si cubetur etiam fruſtum YNECAD per eamdem EN, & punctum aliquod Y rectæ AF, ſupra vel infra G, habetur quadratura hyperbolæ.

D*Emonſtratio.* Quia enim tunc vtrique fruſto tam GNEACD, quàm YNECAD habentur ſolida rectilinea æqualia, dabitur etiam eorumdem differentiæ, ſegmento ENYG rectilineum æquale. Iam vero per 18 *lib.* 1. *Cyl. & Annul.* portio EGFN eſt ad portionem EYFN, vt GF ad YF, Ergo diuidendo ſegmentum ENYG eſt ad portionem EYFN, vt GY ad YF. Cùm igitur cubatum iam oſtenderim ſegmentum ENYG, ſi fiat vt GY ad YF, ita rectilineum ſolidum ſegmento ENYG æquale, ad aliud ſolidum rectilineum; illud æquale erit portioni EYFN. Ergo per 48. habebitur quadratura hyperbolæ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LI.

Fig. 56. Hyperbola ſit DMX, cuius axis BM, baſis DX ad axem recta, centrum A, axis autem tranſuerſus ſit æqualis lateri recto. Tum ex hyperbolæ centro A per X & D deſcribatur circuli arcus DNX.

Dico: annulum productum à figura XMDNX, quæ ex ſegmento hyperbolico & ſegmento circulari componitur, circa AF circumactâ, eſſe duplum ſphæræ, cuius diameter eſt XD.

Demon-

DEmonſtratio. Annulare ſolidum productum ab hyperbolâ BDMX conuerſâ circum FG eſt æquale ſphæræ, cuius diameter DX, vt demonſtratum eſt *prop.42. huius*. Et ſolidum rotundum genitum à ſegmento circulari BXND reuoluto circa eamdem FG, æquatur eidem ſphæræ, cuius diameter DX, vt demonſtraui *prop.44. lib.1. Cylind. & Annul.* Ergo totus annulus genitus à figura tota XNDM circa FG circumacta, duplus eſt ſphæræ cuius DX diameter eſt. Quod erat demonſtrandum.

PARS VI.

Proportio Hyperbolæ ad circulum theorematicè exhibetur.

PROPOSITIO LII.

Hyperbola ſit DEF, cuius axis AE, baſis ad axem recta DF, axis tranſuerſus ER, cui adiuncta ſit eius ſemiſſis RS. Sit autem ſemihyperbolæ DEA centrum grauitatis K. *Fig. 34.*

Fiat vt tripla AR ad duplam AS, ita AE axis hyperbolæ ad AQ.

Dico: hyperbolam DEF eſſe ad circulum ADN, cuius diameter eſt DF baſis hyperbolæ, vt recta AQ eſt ad circumferentiam OP, cuius ſemidiameter eſt OA, ſeu KB diſtantia centri grau. ſemihyperbolæ ab axe AE.

DEmonſtratio. Sumatur AC dimidia ipſius AQ. Quoniam ex hyp. eſt vt tripla AR ad duplam AS, ita AE ad AQ; erit quoque vt tripla AR ad ſimplam AS, ita AE ad AC dimidiam ipſius AQ. Inſcribatur deinde ſemihyperbolæ DEA triangulum DEA, eidemque circumſcribatur rectangulum DE. Omnibus circa axem AE in orbem actis producetur conoïs hyperbolica DOEF, cum cono DEF, & Cylindro DM, quorum hic conoïdi circumſcriptus erit, ille inſcriptus. Iam quia Cylindrus DM eſt ad conum DEF, vt a tripla AR ad AR; conus verò DEF eſt ad DOEF conoidem, b vt AR ad AS; ex æquo erit Cylindrus DM ad conoïdem, vt tripla AR ad AS; hoc eſt (vt oſtendi ſupra) vt AE ad AC. Sed etiam eſt vt AE ad AC, ita c Cylindrus idem DM ad Cylindrum DL. Ergo conoïs DOEF & Cylindrus DL æquales ſunt. Atqui eidem conoïdi etiam æquale eſt d ſolidum rectum, cuius baſis eſt ſemihyperbola DEA, altitudo autem par circumferentiæ OP, cuius radius eſt OA, ſeu KB, centri grauitatis K ſemihyperbolę diſtantia ab axe AE. Ergo ſolidum illud rectum etiam Cylindro DL æquale eſt. Ergo vt e recti ſolidi baſis nempe ſemihyperbola DEA eſt ad baſim Cylindri circulum nempe ADN; ita reciprocè AC altitudo Cylindri eſt ad peripheriam OP altitudinem ſolidi recti ſupradicti. Ergo tota hyperbola DEF eſt ad circulum ADN, vt AQ, ipſius AC dupla eſt ad peripheriam OP. Quod erat demonſtrandum.

a per 10. l.12.
b *Archim. de conoïd.*
c per 14. l.12.
d per 9. huius.
e patet ex 15. l.12.

PROPOSITIO LIII.

Sit portio hyperbolæ DEF, cuius axis AE ſit æqualis tranſuerſo axi ER, baſis autem DF ad AE recta. *Fig. 34.*

Dico: hyperbolam eſſe ad circulum ADN, cuius diameter eſt baſis DF, vt quinque ſextantes axis AE ad circumferentiam OP, cuius ſemidiameter eſt OA, ſiue KB, centri grauitatis ſemihyperbolæ diſtantia ab axe AE

DEmonſtratio. Axi tranſuerſo AR, adiiciatur ſemiſſis eius RS. Quoniam igitur ex hyp. AE, ER æquales ſunt, erit AR quadrupla ipſius RS; ac proinde tripla AR erit duodecupla RS: ipſa verò AS erit quintupla RS, adeoque dupla AS, erit decupla RS. Quare tripla AR erit ad duplam AS, vt 12 ad 10. Itaque ſi fiat vt tripla AR ad duplam AS, ita AE ad AQ,

erit

erit AE ad AQ, vt 12 ad 10, ſiue vt 6 ad 5; ac proinde AQ erit quinque ſextantes axis AE. Atqui demonſtratum eſt vniuerſim in præcedenti, hyperbolam DEF eſſe ad circulum ADN, vt AQ eſt ad circumferentiam OP. Ergo hyperbola cuius axis AE tranſuerſo axi æqualis eſt, ad circulum ADN eam habet rationem, quam quinque ſextantes axis AE ad circumferentiam OP. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO LIV.

Fig. 49. Data ſit hyperbola DMX habens axem tranſuerſum MN lateri recto æqualem. Sit autem hyperbolæ centrum A, axis BM, baſis DX ad BM recta, circa quam deſcriptus ſit ſemicirculus DZX. Porro centrum grauitatis hyperbolæ eſto P, ſemicirculi vero Y. Hyperbola DMX eſt ad ſemicirculum DZX, vt BY eſt ad AP.

a per 42. huius. b per 5. huius. c per eand. d patet ex cor. 4. p. 9.

Demonſtratio. Demonſtraui ſupra [a] ſolidum annulare genitum ab hyperbola DMX rotatâ circa axem OA per A centrum tranſeuntem, æquari ſphæræ à ſemicirculo DZX circa diametrum ſuam DX reuoluto. Atqui iſtud annulare ſolidum eſt æquale [b] ſolido recto, cuius baſis eſt hyperbolæ DMX, altitudo verò par circumferentiæ à grauitatis centro P deſcriptæ, cuius radius eſt AP: & ſphæra dicta, æqualis eſt [c] recto ſolido, ſeu Cylindro, cuius baſis eſt ſemicirculus DZX, altitudo autem par circumferentiæ deſcriptæ à grauitatis centro Y, cuius radius eſt BY. Ergo etiam duo illa recta ſolida ſunt æqualia. Ergo baſis primi nempe hyperbola DMX, eſt ad baſim ſecundi, nempe ad ſemicirculum DZX, vt [d] reciprocè altitudo ſecundi, peripheria nempe radij BY, ad altitudinem primi, peripheriam nempe radij AB, hoc eſt vt ipſa BY ad ipſam AP. Quod erat demonſtandum.

FINIS LIBRI QVINTI.

ANDREÆ
TACQVET
E SOCIETATE IESV
DISSERTATIO
PHYSICO-MATHEMATICA
DE CIRCVLORVM
VOLVTIONIBVS.

Google

AD LECTOREM.

Olutio circuli per planum tam multa, & magna continet paradoxa, vt inter arcana naturæ, præcipua meritô cenſeri debeat. Iam olim Ariſtoteles de concentricis pariter conuolutis quæſtionem mouit, ſed neque ipſe, neque alius (quod ſciam) poſt ipſum quiſpiam nodum diſſoluit. Cum verò etiam mihi ea res ſemper admirabilis viſa eſſet, conatus & ipſe non ſemel fui, hoc in labyrintho reperire exitum, ac negotio difficillimo, ſi quid poſſem lucis, affundere. Quod cùm fruſtra aliquoties tentarem, in nouas difficultates incidi, à nemine obſeruatas, quas in ſcholio primi theorematis expreſſas lector reperiet. Tandem cùm nihil vnquam daretur vel audire vel legere, ex quo vel minimum hærenti ac cæcutienti lucis ſuboriretur, attentiùs rem omnem cæpi expendere; atque ita in eas aliquando cogitationes incidi, quas hoc tractatu expreſſas habes. Aliquantò poſt, cum ita res ferret, de hoc argumento theſes quaſdam, ab Illuſtriſſimo Domino Comite de Hornes & de Herlies publicè propugnatas, in lucem edidi. Quem conatum quod viri docti complures iam probauerint, ſperaui lectori meo non ingratum futurum, ſi quinque Cylindricorum & Annularium libris, hunc de circulorum volutionibus tractatum adiungerem. Expediui illum forma theſium, qua priùs aſtringebatur, & vberiùs deduxi quædam, ſub finem maximè, quæ in editione prima nolens theſium excedere modum, breuiſſimè perſtrinxeram. Porro tum in prima, tum in hac poſtrema editione propoſitum mihi fuit, non ſolùm difficultatibus ſatiſfacere, quas in ſcholio theorematis primi deduxi, verùm & reliqua volutionum ſymptomata proſequi, quæ mirabilem earum naturam amplius declararent. Vale.

n
ds
ſſi
&
d-
en
oit
&
en
ri-
ent
ir-
ten-

cumferentiæ æqualem, vt experientia conſtat, cuius infra dabimus rationem.

Neque euadet Ageometra fortè quiſpiam dicendo, circulos concentricos AP, partim volui, partim radendo ferri; & concentricorum quidem ipſo AQ minorem vnumquodque punctum per aliquam tangentis CL partem trahi; concentricorum verò circulo AQ maiorum plura puncta tranſire per vnum idemque punctum tangentis. Id enim fieri omnino non poſſe ſic demonſtro.

Sumatur in concentrico, ſiue maiori, ſiue minori quàm AQ, punctum quoduis O, per quod ex centro A ducatur recta occurrens deferenti circulo AQ in K. Quoniam circuli iunctim voluuntur, ſuntque puncta O & K in eadem recta. manifeſtum eſt puncta O & K ſimul in ſua plana CL, BM, demitti; ſimul attolli & abire. Cum enim punctum K deſcendet in BM, fierque punctum contactus, erit AK perpendicularis [a] ad BM tangentem; ac proinde, quod BM, CL æquidiſtent, perpendicularis [b] quoque erit ad tangentem CL. Quare ſi puncto K poſito in BM, punctum O, ſupra eſſet infraúe rectam CL, non ſemper diſtaret centrum A à tangente CL, interuallo radij AO, contra quam ſuperius demonſtratum eſt. Pariter igitur puncta OK tangentes ſuas attingunt ac deferunt. Quare cum punctum K & inſtantaneè & abſque raſione vllâ planum BM contingat (circulus enim AQ ex hypotheſi per materiale planum BM volutione verâ ſuperius [c] definitâ, defertur;) punctum quoque O, inſtantaneè, & abſque vllâ raſione ſuum planum Geometricum CL continget. Id ipſum de alijs quibuſlibet circumferentiarum PP concentricarum punctis demonſtrabitur.

a 18. 3.
b 28. 1.
c *Def.* 3.

Ita quidem Geometricè propoſitum conficitur. Sed vim totius demonſtrationis ad captum philoſophorum accommodatiùs ſic colligo. Impoſſibile eſt vt eu ncentricus APN, qui percurrit lineam ſe maiorem, ſecundum idem ſui aliquamdiu tangat planum, ſiue vt tangat plura plani puncta, quin motus, quo circa centrum vertitur, tantiſper interquieſcat. Pari modo erit impoſſibile, vt circulus ARP, qui percurrit lineam ſe minorem, aliquamdiu tangat planum in eodem plani puncto hoc eſt, vt plura puncta circumferentiæ tranſeant per vnum punctum plani quin tantiſper interrumpatur motus lationis. Sed ex hypotheſi neuter motus vnquam interrumpitur. Ergo &c. vt vis huius ratiocinationis clarius percipiatur, cogitemus primò concentricum minorem ANP cieri per planum ſolo motu lationis abſque vllâ circà centrum conuerſione. Manifeſtū eſt idem circumferentiæ punctum, tangendo iam pertranſire plura puncta plani. Quod ſi deinde intelligatur ad motum lationis accedere aliqua circuli conuerſio circa centrum, quantumque tarda ea fuerit, euidenter liquet, illud circumferentiæ punctum, ſecundum quod planum tangitur, non niſi inſtantaneè in plano ſubſiſtere: cùm enim contactus ille indiuiſibilis ſit, conuerſio quantumuis exigua illum variat, circumferentiæ punctum, quod tangebat planum, è plano mox ſurſum euehendo. Deinde cogitemus maiorem concentricum ARP primò quidem agitari ſolo motu conuerſionis circa centrum A. Tum verò perſpicuum erit plura circumferentiæ puncta, tangendo pertranſire idem punctum plani. Quod ſi poſtmodo ad motum conuerſionis circa centrum, intelligatur accedere motus plani versùs L quantumuis paruus, liquidò rurſus conſtat illud plani punctum, quod tangebatur, non niſi inſtantaneè coniungi cum circulo ſuum locum non mutante, quia enim contactus indiuiſibilis eſt, quantumlibet exigua plani CL promotio versùs L contactum neceſſario variat, punctum plani, quod circulo coniungebatur, versùs L ſubducendo. Atqui perinde ſe res habet ſiue planum CL, moueatur versùs L, circulo locum non mutante, ſiue plano manente immoto circulus deferatur versùs L. Ergo etiam quantumuis paruo accedente lationis motu ad circularem, iam nequit illud plani punctum, ſecundum quod fiebat contactus, coniungi cum circulo niſi inſtantaneè, ac proinde nequeunt per illud plura circuli puncta tranſire. Quare neque cum minor circulus percurrit lineam ſe maiorem, neque cum maior ſe minorem vnquam raſio vlla committitur.

Itaque theorematis ſane admirandi plena demonſtratio data eſt. Atque ita quidem data, vt etiam cauſa totius myſterij aperta ſit, cum demonſtratio vtraque fuerit oſtenſiua & directa.

Vnum fortaſſe reſtat, quod explicatum velit nonnemo: Quî fieri nimirum poſſit, vt aliqua circumferentia, tantum ſemel conuoluta tangendo percurrat lineam ſe maiorem vel minorem? ſic enim videtur circumferentia commenſurari ſeu coextendi quantitati ſe maiori vel minori, ac proinde minor maiori, & maior minori exæquari; quæ manifeſtè impoſſibilia ſunt. Verum reſpōdeo: quamuis tota ſucceſſiuè circumferentia totam ſucceſſiuè in plano lineam ſe maiorem minoremúe tetigerit, non tamen ei commenſurata ſeu coextenſa fuit; quod ad commenſurationem ſucceſſiuam totius cum toto requiratur, vt partes partibus ſucceſſiuè applicentur & congruant. Hic autem nulla circumferentiæ pars vlli parti lineæ, in plano peragratæ, applicata fuit, ſed continuus fuit contactus indiuiſibilis, ſiue non quantus. Quod ſi polygonum aliquod exempli grat. hexagonum, per planum circumagatur, huius perimeter li-

neæ in plano confectæ commenſurabitur, quia perimetri partes (nimirum latera) ſic fuerunt applicatæ, vt congruerent. In circulorum autem volutione longè aliter ſe res habet, quandoquidem ſucceſſiua circumferentiæ cum lineâ in plano emenſa coniunctio ſemper indiuiſibilis, hoc eſt non quanta extiterit.

Scholium.

Difficultates & arcana in circulorum volutione.

Graues eæ ſunt & multæ, quarum pleræque à nullo, quod ſciam, hactenus vel explicatæ, vel ſaltem indicatæ.

1. Et prima quidem ſuperiori theoremate ſoluta eſt, ac in ſequentibus etiam plenius ex-
Schematiſmus 18 Fig. 2. plicabitur: quî fieri nimirum poſſit, vt maior minori, & maiori minor, imo vt omnes inæquales circumferentiæ poſſibiles eidem rectæ lineæ quodammodo commenſurentur? & quidem illa, quod rei admirabilitatem non parum auget, quælibet eſſe poteſt; ſi enim quilibet alius concentricus diuerſus à circulo AQ, per materiale planum voluatur, vnâ volutione percurret rectam ſuæ circumferentiæ æqualem & ipſe & omnes reliqui.

2. Sed longè adhuc maior exoritur quæſtio, quare is, qui per materiale planum voluitur, ſolus percurrat ſpatium ſuæ circumferentiæ æquale; reliqui verò omnes concentrici lineas ſuis peripherijs maiores, minoreſue abſoluant. Friuolum erit dicere eum, qui planum materiale tangit, percurrere lineam ſibi æqualem, quia is mouetur per ſe, & independenter ab alijs: id enim quæritur, quid hic ſit moueri per ſe, & cur is potius, quam reliqui, per ſe moueatur.

3. Quid fiet, ſi concentricorum iunctim volutorum nullus per planum materiale decur-
a Theor. 1. rat? Quod quidem omnes vnâ volutione emetientur æquale ſpatium, ſuperius a demonſtratum eſt. Sed quantum illud erit? cuius concentrici peripheriæ id æquabitur? An tum vocari deferens vllus poterit? Frigida reſponſio eſt, ab eo reliquos deferri, qui primariò & per ſe mouetur; cùm enim ex hypotheſi omnes concentrici iuncti ac colligati ſint, vt quolibet vno moto, omnes moueantur; declarandum erat, quid requiratur, vt concentricorum aliquis per ſe moueatur ac deferat reliquos: quo expoſito, oportebit adhuc oſtendere, eum qui mouetur per ſe, conficere ſpatium ſuæ circumferentiæ æquale.

Schematiſmus 18 Fig. 3. 4. Quod ſi ille circulus, qui materiale planum tangit, vnâ volutione decurrat ſpatium æquale ſuæ circumferentiæ; quod quidem ita fieri nemo hucuſque aliter, quam experientiâ probauit; quid tum eueniet, cum duo Cylindri EF, CG poſiti circa eundem axem AB, ambo materialia plana parallela in lateribus FE, CG contingent? nunquid vtrique circuli E, & C, vnâ volutione percurrent ſpatia ſuis circumferentijs æqualia? Atqui hoc impoſſibile eſt. Cum ex ſupra theoremate primo demonſtratis liquidò pateat, circulos E & C, volutiones ſuas pariter incipere & finire, ac proinde ambos ſemel conuolutos, æqualia ſpatia conficere. Num igitur hoc caſu dicemus volutionem eſſe impoſſibilem? At nulla impoſſibilitatis cauſa apparet. Et poſſibilem eſſe infra demonſtrabimus. Quæ igitur peripheria ſpatio vnius volutionis, æquabitur E, an C, an neutra? Si alterutra; cur hæc potius, quam illa? Cum materiale planum vtraque contingat. Si neutra; cum aliquam eſſe determinatam longitudinem neceſſe ſit, quam vtrique C & E circuli decurrant, ea erit exhibenda, vt ſatisfiat quæſtioni.

Schematiſmus. 18 Fig. 7. 5. Difficultates præcedenti numero propoſitæ, quodammodo augentur in cono infinito, ſecundum latus FE commune materiale planum tangente, perque illud volutione rectâ delato. Hic enim infiniti circuli concentrici, extra ſe inuicem poſiti, planum commune materiale contingunt.

Hæc, pluraque alia, quæ poſtmodo attingemus, ſatis declarant mirificum quoddam naturę in circulorum volutione ineſſe myſterium; quod quidem quò minùs hactenus explicaretur, inde mihi factum videtur, quod oculos non coniecerint in proportionem motuum latiui & circularis, volutiones componentium, quæ alia atque alia eſſe, & infinities variari poteſt. Ex mutuâ quippe vtriuſque motus proportione rectè perpensâ, omnes difficultates propoſitæ diſſoluentur, vt ex ſequentibus theorematis planum fiet. Porro ex huius obſeruationis defectu orta quoque eſt ea communis hallucinatio; videlicet eum circulum, qui planum materiale tangit, vnâ volutione peractâ, percurrere neceſſariò lineam in plano æqualem ſuæ circumferentiæ: neque fieri aliter poſſe. Quod falſum eſſe infra oſtendetur.

Digitized by Google

Ariſtoteles & Galilæus nihil explicant.

De circulorum concentricorum per planum volutione agit Ariſtoteles in Mechanicis quæſt. 24. cuius diſcurſus omnis huc reuocatur. *Schematiſmus 18 Fig. 2.*

Siquis minorem circulum AP impulerit, maiorem AQ huic annexum non moueri ex ſe, ſed quantum mouetur à minore: ac proinde æqualem cum eo viam conficere. Similiter, cum maiorem AQ impuleris, tunc minor non ſuo, ſed maioris motu defertur: vnde rurſus æqualem cum eo viam conficiat, neceſſe eſt. Deinde cuidam obiectioni reſpondens, ait: quamuis vnum ſit amborum centrum: eſſe tamen vnius centrum per ſe in motione; alterius verò per accidens; illum enim circulum, qui mouet alterum, obtinere illud centrum per ſe; alium verò qui mouetur, habere illud centrum per accidens, quia non vtitur illo tanquam centro.

Hæc Ariſtotelicæ ratiocinationis ſumma eſt: quam parum aut potiùs nihil ad propoſitum lucis afferre, perſpicuè lector intelliget, qui hunc Ariſtotelis diſcurſum cum difficultatibus præcedenti ſectione propoſitis componet.

Inter reliquos, qui nodum hunc gordium diſſoluere conati ſunt, poſtremus tempore, ſed ob complura in Mathematicis præclarè ſubtiliterque inuenta primus claritudine nominis eſt Galilæus Linceus. Is in libro quem inſcribit, *Diſcorſi è demonſtrationi Mathematiche &c.* Dialogo primo, hoc vnum conatur explicare, quod à nobis primo loco propoſitum eſt theoremate præcedenti; qui fieri poſſit vt minor circumferentia lineam ſe maiorem, & maior minorem vnâ conuolutione emetiatur. Sic autem ratiocinatur.

Sint duo polygona ſimilia, ſimiliterque poſita circa commune centrum G, ita ſibi mutuò coniuncta, vt vnum ſine altero moueri nequeat. Producantur latera AB, HI. Et ſuper puncto B fixo circumagatur polygonum maius, donec latus BC congruat rectæ AS, & punctum C incidat in Q. Hoc motu peracto BC eſt in BQ; & BG eſt in BC. Punctum verò I, extremum lateris KI, minoris polygoni deſcripſit arcum IO; ipſum verò latus KI, incidit in rectam OP, tranſmiſſo per ſaltum ſpatio IO. Quod ſi adhunc modum maius polygonum ſecundùm omnia latera circumagatur per rectam AS, ipſum quidem emetietur lineam AS ſuo perimetro æqualem, compoſitam nimirum ex omnibus polygoni lateribus iuxta inuicem in directum collocatis: polygonum verò minus emenſum fuerit lineam HT paulò minorem, compoſitam nempe ex ſex lateribus polygoni minoris, & quinque ſpatijs OI, ſaltu tranſmiſſis, totidem ſcilicet, vno minus, quot ſunt polygoni latera. Huius autem lineæ HT defectus ab AS priori, quam emetitur polygonum maius, vti & ſpatia ſingula ſaltu tranſmiſſa, æquantur differentiæ laterum AB, HI; quæ eò fit minor, quò plura fuerint polygonorum latera; ac tandem euaneſcit, fitque æqualitas inter rectas AS, HT. *Schematiſmus 18 Fig. 4.*

Quoniam igitur polygonorum progreſſio deſinit in circulum, is erit polygonum infinita habens latera non quanta, hoc eſt punctualia: & quemadmodùm polygonum maius abſque ſaltu vllo emetitur lineam AS, ſuo perimetro æqualem, conſtantem videlicet ex omnibus lateribus ſuis in directum & continuè abſque vllâ vacuorū ſpatiorum intercapedine diſpoſitis; ſimiliter quemadmodum minus polygonum tot ſpatia ſaltu tranſmittit, quot habet latera, vno minus; ac proinde lineam emetitur HT ferè æqualem AS lineæ polygoni maioris, conſtantem nempe ex lateribus ſuis, & ſpatijs ſaltu tranſmiſſis: ita concentricus minor delatus ab altero, tot facit ſaltus non quantos, quot habet latera non quanta, hoc eſt infinitos; adeòque linea, quam percurrit, conſtat ex infinitis circuli lateribus punctualibus, interpoſitis infinitis punctualibus ſpatijs vacuis, ſiue ſaltu tranſmiſſis. Atque inde fit, quòd circulus minor percurrat lineam æqualem ei, quam maior. Quemadmodum enim partes quantæ pedalis lineæ, ſi ſpatia vacua quanta interponas, ad quamuis longitudinem extendi poſſunt: ita lineæ pedalis partes non quantæ, id eſt puncta infinita, interpoſitis vacuis infinitis non quantis, hoc eſt punctualibus, in quamcunque longitudinem poſſunt diſtendi.

Ita, quoad rem Galilæus, addens, ſic optimè rarefactionem explicari. Non magnoperè contendendum mihi arbitror, vt hoc diſcurſu nihil effici oſtendam. Supponit enim continuum ex punctis inextenſis infinitis componi: quæ opinio in ſcholis paſſim exploditur. Inanis certè progreſſio eſt à polygonis ad circulos; & circulum eſſe infinitorum laterum polygonum, ſed non quantorum ſeu punctualium, verba ac voces ſunt. Nullum enim latus habet circulus; & latera non quanta, non ſunt latera. Pari modo ſaltus inſtantanei ac punctuales non ſunt ſaltus; & punctualis ſaltus idem eſt ac nullus. Adhæc theoremate primo demonſtratum eſt, totam cuiuſuis concentrici peripheriam, totam rectam, per quam voluitur, abſque vlla interpolatione ſucceſſiuè tangere. Nullus igitur ſaltus committitur.

Multis deinde ac longis diſcurſibus interiectis progreditur ad explicandum, quomodo maior circumferentia ſemel conuoluta percurrat lineam ſe maiorem. Summa hæc eſt.

Polygonum minus circumagatur ſuper puncto I, donec latus IK cadat in IO : tum verò B punctum extremum lateris polygoni maioris retrotrahetur deſcripto arcu BZ, cadetque latus BC in ZR, ſic vt eius pars ſuperponatur parti lateris AB. Quod ſi omnia polygoni minoris latera hunc in modum circumagantur ſupra rectam HT, ipſum quidem metietur lineam HV, æqualem ſuo perimetro, conſtantem nempe, omnibus lateribus ſuis in directum & continuè diſpoſitis: at maius polygonum deſcribet lineam AX, fere æqualem lineæ HV, polygoni minoris, conſtantem ex lateribus maioris polygoni in directum quidem collocatis, ſed aliqua ſui parte cadentibus ſupra inuicem; eruntque tot partiales ſupraponſitiones, quot ſunt latera, vnâ minus. Porro exceſſus huius lineæ à polygono maiori menſuratæ, ſupra eam, quam metitur minus, itemque ſupraponſitionum quantitas BZ, eſt ipſa laterum AB, HI, differentia; Quæ, quò plura fuerint polygonorum latera, eò ſemper euadit minor, ac tandem euaneſcit, fitque æqualitas inter ipſas HV, AX. Hæc iam circulis applicat vt prius. Circulus minor (inquit) AQ per ſe motus (vide *fig.* 2.) ſua latera infinita, non quanta explicat, ſupra rectam BM, ſic vt omnia ſint poſita extra inuicem: Circulus verò maior AR à minori delatus, ſua quoque infinita latera diſponit per rectam CL, non planè extra inuicem, ſed cum infinitis ſupraponſitionibus, ſeu replicationibus, ſeu retractionibus non quantis, hoc eſt punctualibus, abſque vllâ tamen partium quantarũ ſupraponſitione ſeu penetratione. Atque inde fieri putat, quod maior AR ſemel conuolutus abſoluat lineam ſe minorem, & æqualem ei, quam minor. Quemadmodum enim, ait, partes quantæ pedalis lineæ ſupra inuicem poſitæ, hoc eſt per ſupraponſitiones quantas, conficere poſſunt magnitudinem datâ minorem: ſic viciſſim pedalis lineæ partes non quantæ, hoc eſt infinita puncta, per infinitas ſupraponſitiones non quantas, abſque vllâ partium quantarum penetratione, ita conſtipari poſſunt vt magnitudinem datâ minorem conficiant. Demum addit ita facilè condenſationem explicari.

Schematiſmus 18 *Fig.* 2.

Hunc diſcurſum, quamuis eius ſubtilitatem interlocutor Sagredus exclamans, vt ſolet, mirificè deprædicet, ſi priori adhuc inaniorem eſſe dixero, nihil magnopere vereor, ne me temeritatis eruditus lector condemnet. Tametſi enim polygonorum concentricorum volutiones aptè & eleganter explicet, applicatio tamen ad circulos facta, ac cætera quæ ſubiungit de infinitis punctorum ſupraponſitionibus non quantis, pluraque alia, eiuſmodi ſunt, quæ philoſopho cuicumque in promptu atque obuium ſit refellere. Hoc ſolum breuiter dico: retractio & ſupraponſitio non quanta, inſtantanea, punctualis, eſt retractio & ſupraponſitio nulla: & nequit fieri punctorum ſupraponſitio, quin plura puncta circumferentiæ idem plani punctum ſucceſſiuè contingant. Quod fieri in caſu non poſſe theoremate primo demonſtratum eſt.

Et hæc quidem omnia Galilæus de ea difficultate ſolum, quam primo loco propoſuimus. Cæterarum quippe, quas nos ipſi nobis obiecimus, nec ipſe, nec alius, quod ſciam, quiſpiam meminit.

Reliquum iam eſt, vt ſiquid ipſi ad difficultates propoſitas afferre lucis poſſimus ordine ac breuiter expediamus. Quod priuſquam facio non alienum à propoſito erit ſi referam, quâ primum viâ hoc mihi in labyrintho ſuboriri lux cœperit. Videbam, quod quidem nemo eſt qui non viderit, ſphæram digito impulſam ſic moueri per planum, vt & latione rectâ progrederetur, & ſimul interim circa centrum ſuum verteretur; notabamque proinde duos motus effici impulſu vno; ſiue quod idem eſt, motum vnum ex duobus ſpecie diuerſis compoſitum. Tum verò cogitare cœpi, ſi binos hoſce diuerſos motus, non vnus motor vt primo, ſed bini motores efficiant, quid eueniet? quid enim ſi vnus ſphæram trahat motu recto per planum, atque interim eandem alter circa ſuum centrum rotet? tum certè ad eundem planè modum ſphæra mouebitur, ac ſi ab vno aliquo impulſa liberè volueretur. Ita deinde ratiocinabar: cum hi motores diuerſi ſint, ab inuicem non dependent. Dabit igitur motui quiſque ſuo eam celeritatem, quam volet. Quid igitur, ſi is, qui ſphæram trahit, trahat velociſſimè, altero interim tardiſſimè eandem circumagente? Tum enimverò neceſſe erit, vt priuſquam vna volutio peracta ſit, longiſſimum in plano ſpatium multoq; ſua circumferentia maius ſphæra percurrerit. Quod ſi iam trahente illo tardiſſimè, alter ſphæram celerrimè circumageret, perſpexi continuò neceſſariò conſequi, vt minimo illo tempore, quo hic ſphæram ſemel circumagit, eandem ille per ſpatium multò eiuſdem circumferentiâ minus trahendo promouerit. Atque ita tandem intellexi, fieri poſſe vt etiam in materiali plano vnius volutionis ſemita, ſit quantumcunque maior vel minor circumferentia ſphæræ; ac proinde negotium hoc omne non ex alterutrius horum motuum celeritate aut tarditate ſigillatim ſpectata, ſed ex vtriſque inter ſe comparatis, atque ex mutua eorumdem ad inuicem proportione pendere.

His præmiſſis, aggredior propoſitum, & primis quidem theorematis volutiones conſiderabimus in planis Geometricis factas. Quæ deinde volutionum ratio in plano materiali communi ſit, quæ in materiali perfecto diſquiremus. Tandem ipſam illam curuam lineam, quam ſingula voluti circuli puncta deſcribunt, aliaque nonnulla volutionum ſymptomata contemplabimur.

THEO-

THEOREMA II.

Si motus plano parallelus, quo circuli centrum, adeóque ipſe circulus defertur, & motus circularis, quo ſuper ſuo centro circulus circumagitur, ſint æquè celeres; linea, quam vnâ per planum volutione circulus percurrit, circumferentiæ æqualis erit.

Si motus parallelus lationis fuerit velocior circulari; vnâ volutione percurret lineam ſuâ circumferentiâ maiorem; minorem verò, ſi parallelus motus circulari ſit tardior.

QVoniam, per hypotheſim, lationis motus & circularis ſint æquè celeres, quæ eodem tempore percurrent ſpatia, per axioma I æqualia erunt. Atqui ſpatium, quod vnius volutionis tempore lationis motu à centro percurritur, eſt æquale illi lineæ, quam in plano circulus vnâ volutione continenter tangendo percurrit; ſpatium verò, quod eodem vnius volutionis tempore motu circulari conficitur, eſt ipſa circumferentia, vt patet ex definit. quinta. Ergo linea recta, quam in plano circulus vnâ volutione continenter tangendo peragrat, circumferentiæ æqualis eſt. Quod erat demonſtrandum.

Secundæ partis demonſtratio ex ſequenti theoremate vniuerſali, deducetur.

Corollarium.

Si recta, quæ vnâ volutione percurritur, æqualis ſit circumferentiæ, motus parallelus centri, & circularis æquè celeres erunt.

THEOREMA III.

Vniuerſim vt velocitas motus paralleli, quo centrum fertur, ad velocitatem motus circularis; ita linea, quam vnâ per planum volutione circulus percurrit, erit ad eiuſdem circuli circumferentiam.

SPatium, quod tempore vnius volutionis motu parallelo centri percurritur, eſt æquale el lineæ, quam in plano circulus vnâ volutione tangendo percurrit: ſpatium autem, quod eodem volutionis vnius tempore circulari motu conficitur, eſt ipſa circumferentia; hæc enim per *definit.* 5. vnâ volutione ſemel integrè circumagitur. Atqui per axioma 2. demonſtratum à Galilæo Theor. 2. de motu æquabili, vt velocitas eſt ad velocitatem, ita ſunt ſpatia eodem tempore abſoluta; proindeque etiam in caſu dato, vt celeritas motus latiui ad celeritatem motus circularis, ita ſpatium quod vnius volutionis tempore abſoluitur latiuo motu, eſt ad ſpatium, quod eodem volutionis vnius tempore circulari motu conficitur. Ergo vt velocitas motus latiui ſeu paralleli eſt ad velocitatem motus circularis, ita eſt recta linea quam in plano circulus vnâ volutione tangendo percurrit, ad ipſam circuli circumferentiam. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA IV.

Ex his iam facile licebit deducere, datâ quâcumque concentricorum circulorum infinitorum per plana Geometrica volutione, quiſnam ille ſit, qui vnus ex omnibus vnâ volutione abſoluat lineam ſuæ circumferentiæ æqualem. *Schematiſmus* 18 *Fig.* 2.

IS ſanè erit, qui eâdem velocitate ſuper communi centro circumagitur, quâ idem centrum motu ad planum parallelo defertur. Atque hic non incommodè primarius ſiue deferens vocabitur.

Quod autem datâ volutione quacumque ſemper aliquis, & vnus tantum reperiatur, qui eâdem velocitate ſuper centro circumagitur, quâ centrum motu parallelo defertur, ſic demonſtro. Quoniam omnes concentricos vnâ volutione æquales rectas lineas, ſiue eamdem percurrere demonſtratum eſt theor. 1. (vide fig. 2.) ea ſit BM. Poſſibile eſt circa centrum A deſcribere peripheriam æqualem rectæ BM. Ea ſit, Q. Quia igitur omnes concentrici percurrunt vnâ volutione lineas ęquales ipſi BM, etiam concentricus AQ, vnâ volutione percurret BM, ſuæ circumferentiæ æqualem. Ergo per Coroll. Theor. 2. concentricus AQ eâdem celeritate ſuper centro A vertitur, quâ centrum A motu ad planum parallelo defertur; atque inde etiam patet eiuſmodi circulum non niſi vnicum exiſtere.

THEOREMA V.

Schematiſmus 18 *Fig.* 2.

Quare concentrici primario minores, percurrant vnâ volutione lineas maiores ſuis circumferentiis; concentrici verò maiores primario, rectas abſoluant ſuis circumferentiis minores.

PRimarius, qui nimirum percurrit lineam ſuæ circumferentiæ æqualem, ſit AQ; & aſſumatur quiuis illo minor concentricus AN. Quoniam ſimul omnes circa commune centrum A rotantur, manifeſtum eſt minorem AN tardius circumagi, quam maiorem AQ. Atqui, cum ex hyp. AQ percurrat lineam ſuæ circumferentiæ æqualem, rotatio, ſiue circularis motus circuli AQ eſt æquè velox per Theor. 2. ac motus progreſſiuus centri communis A. Ergo motus circularis circuli AN tardior eſt motu progreſſiuo centri. Ergo per Theor. 3. circulus AN vnâ volutione percurrit lineam ſuâ circumferentiâ maiorem.

Aſſumatur deinde quicumque concentricus AR, maior quam AQ. Liquet maiorem AR circumagi celeriùs, quàm minorem AQ. Quare, cùm ipſius AQ circumactio ſit æquè celer, ac motus parallelus centri communis A, erit circumactio ipſius AR velocior parallelo motu centri communis A. Igitur per Theor. 3. circulus AR vnâ volutione percurret ſpatium ſuâ circumferentiâ minus. Data igitur eſt cauſa cur &c.

THEOREMA VI.

Schematiſmus 18 *Fig.* 2.

Vnde fiat, quod infiniti inæquales concentrici, vnâ volutione æqualem lineam percurrant?

COncentricus lineam BM percurrens ſuæ circumferentiæ æqualem, ſit AQ: & aſſumatur quicumque alius illo minor, maiorúe AP. Quoniam ex hypotheſi omnes concentrici eodem tempore integram circa commune centrum A rotationem abſoluunt, erit per axioma 2. vt circumferentia Q, ad circumferentiam P, ita velocitas quâ circumagitur Q ad velocitatem quâ circumagitur P. Atqui recta BM, ex hypotheſi æquatur circumferentiæ Q, & velocitas paralleli motus, quo in volutione centrum commune A defertur, æquatur per coroll. Th. 2. velocitati, quâ circumferentia Q circa centrum A circumagitur, cum ex hypotheſi recta BM, quæ vnâ volutione à circulo AQ percurritur, ſit æqualis circumferentiæ Q. Ergo vt recta BM eſt ad circumferentiam P, ita velocitas motus paralleli, quo centrum commune A defertur, eſt ad velocitatem, quâ circumagitur circumferentia P. Ergo per Theor. 3. recta BM ea eſt, quam concentricus quicumque AP vnâ volutione percurrit. Data igitur eſt cauſa, cur infiniti concentrici vnâ volutione eamdem lineam percurrant.

THEOREMA VII.

Vnde fiat, quod linea, quam infiniti concentrici, ſimul moti vnâ volutione omnes percurrunt, modò maior eſſe poſſit, modò minor, imò data quæcumque.

AD hoc certè nihil conferet, quod celeriùs tardiuſue, aut centrum commune deferatur, aut circuli circa centrum commune circumagantur. Verùm res tota pendet ex mutuâ horum motuum proportione.

Dati

Dati igitur ſint circuli quotcumque circa centrum commune A. Data item ſit quæcumque linea BM. Poſſibile eſt circa centrum A deſcribere peripheriam datæ rectæ BM æqualem. Hæc eſto, Q. Rurſum poſſibile eſt ita volui concentricos, vt motus circularis, quo circulus AQ ſuper communi centro A circumagitur, ſit æque velox, atque parallelus motus, quo commune omnibus centrum A defertur. Tum verò concentricus AQ. Per Theor. 2. vnâ volutione percurret rectam æqualem ſuæ peripheriæ Q; hoc eſt, ex conſtructione, lineam BM. At omnes concentrici æquales lineas percurrunt, vt demonſtratum eſt Theoremate 1. & 6. Ergo omnes concentrici vnâ volutione percurrunt lineas ipſi BM datæ æquales. Data igitur cauſa eſt vnde fiat &c. *Schematiſmus 18 Fig. 2.* *Schematiſmus 18 Fig. 2.*

Corollarium.

Ex omnibus hucuſque demonſtratis manifeſtum eſt, quantitatem lineæ, quæ à circulis vnâ volutione percurritur, pendere ex ſolâ duorum motuum, lationis nempe ac circularis, ex quibus volutio omnis componitur, proportione.

Nunc quando ſatis conſideraumus volutiones generaliter, nimirum factas in planis Geometricis, hoc eſt ab omni materia abſtractis, reliquum eſt, vt ad plana materialia tranſeamus.

THEOREMA VIII.

Vnde fiat, quod ſphæra, ſiue circulus, dum per commune planum materiale liberè voluitur, lineam percurrat ſuæ circumferentiæ æqualem.

HOc ita euenire, qui aliter, quam ab experientia, probet; & cur ita eueniat, cauſam qui aperiat, non inuenio. Quemcumque circulum, cum per planum Geometricum voluitur, vnâ volutione abſoluere ſpatium poſſe quantumlibet maius minuſue ſua circumferentia, ex iam demonſtratis perſpicuum eſt. Quid verò plani materialis contactus efficiat, vt illa perpetua inter circumferentiam circuli, & ſpatium vnâ volutione emenſum oriatur æqualitas? pro huius rei diſquiſitione eſto principium:

Natura, cum nihil agit fruſtra, quemadmodum breuiſſimâ agit viâ, ita modo etiam facillimo.

Datus iam ſit circulus AQ, ſuſtentatus à plano communi BM, qui impellatur versùs M. Igitur per principium iam conſtitutum, circulus modo facillimo per planum progredietur versùs M. Itaque non procedet per planum ſolo motu recto; ſic enim in plani BM, quod ex hypotheſi eſt commune (hoc eſt per definitionem 6. aſperum & ſcabrum) minutas inæqualitates impinget offenſabitque. Facillimus igitur modus procedendi versùs M, is erit, quo fiet, vt quàm minimè circulus in plani aſperitatem impingat. Atqui impinget quam minimè, ſi eadem celeritate ſe circa centrum ſuum A circumagat, qua progreditur versùs M: quod ſic oſtendo. Statuamus circulum versùs M progredi, hoc eſt eius centrum latione parallela moueri versùs M, celeritate, vt 6; atque interim circumagi circa centrum celeritate, vt 2. Quoniam igitur circulus ſe circumagit, ac proinde vna parte, quæ MH ſpectat, deſcendendo ſuam circumferentiam ſponte demittit in planum, altera verò parte aſcendendo eamdem ſuam circumferentiam è plano ſubducit; manifeſtum eſt offenſare iam minùs atque impingere in exſtantes plani particulas. Quia tamen latio versùs MH, quæ dum omnis adhuc aberat circularis motus, adæquata fuit impingendi cauſa, adhuc velocior eſt, quam circumactio, hoc eſt quàm ſummiſſio atque ſubductio ſpontanea circumferentiæ; tantùm adhuc impedimenti relinquitur, quantùm velocitas lationis versùs MH excedit velocitatem circumactionis. Quare ſi circumactio circuli circa centrum eadem omnino velocitate fiat, qua fit latio versùs MH; iam omne ſublatum erit progreſſionis impedimentum. Nam eadem velocitate circulum circumagi, qua progreditur, ſiue defertur versùs M, eſt prorſus, circumferentiæ partes ſucceſſiuè omnes in planum ſponte ſummitti, iterumque ſubduci eadem celeritate, qua fit progreſſio versùs M. Tum verò nulla iam pars circumferentiæ in planum poteſt impingere; cum enim æquè celeres ſint circumactio & progreſſio, partes circumferentiæ eodem inſtanti ſubducuntur è plano, quo deberent impingere. *Schematiſmus 18 Fig. 1.*

Quod ſi circumactio velocior fiat motu lationis versùs MH, rurſus impingere circulum ſic demonſtro. Intelligatur circulus communi plano inſiſtens circa centrum A circumagi ſecundum ordinem litterarum CQBD, abſque vllo motu lationis versùs MH. Manifeſtum eſt circulum iam continenter impingere in minutas plani aſperitates, circa contactum poſitas; quemadmodum impingebat prius, cum deferebatur versùs MH. abſque vlla circa A centrum conuerſione. Quod ſi deinde ad circularem motum accedat aliquis motus lationis versùs MH, quam-

Digitized by Google

H, quamuis nondum æquè velox ſit ac circularis, efficiet ille nihilominus, vt circulus tendendo versùs MH, ſubducatur nonnihil, ac proinde iam impingat minus, quam dum eodem hærens loco, tantum circa centrum A rotabatur. Impinget nihilominus adhuc etiam tum, quòd motus circumactionis, qui, dum aberat omnis motus lationis versùs MH, adæquata erat impingendi cauſa, adhuc celerior ſit motu lationis versùs MH: quo fit vt circuli partes velocius in plani aſperitates deſcendant, quàm inde per motum lationis ſubducantur. Quod ſi motus lationis, ſiue progreſſio centri versùs MH fiat æquè velox, ac motus circumactionis, euidenter patet, qua celeritate circumferentia per circularem motum deſcendit in plani aſperitates, eadem prorſus per motum lationis inde ſubduci. Quare iam omnis rurſum ceſſat impactio. Non tantum igitur circularis motus tardior motu lationis, ſed etiam illo velocior cauſa impingendi erit; vtriſque verò inter ſeſe adæquatis ceſſabit omnis.

Itaque modos omnium facillimus eſt, cum circuli circumactio & progreſſio, centri eadem velocitate fiunt. Igitur per principium ſupra poſitum, circulus eò modò decurrit per planum versùs M. Atqui per 2. Theorem. dum circumactio, ſiue motus circularis & centri progreſſio eadem celeritate fiunt, circulus vnâ volutione lineam percurrit æqualem ſuæ circumferentiæ. Circulus igitur, cum per materiale planum commune liberè voluitur, vna volutione abſoluit lineam æqualem circumferentiæ. Quod igitur erat propoſitum, & quòd fiat, & cur fiat demonſtrauimus.

THEOREMA IX.

Quamuis ſphæra, ſiue circulus per materiale planum commune liberè volutus, abſoluat ſemper vnâ volutione lineam ſuæ circumferentiæ æqualem: fieri tamen poteſt vt tantum ſemel circumactus, ſucceſſiuè tangendo abſoluat in eodem plano materiali lineam, ſuâ circumferentiâ quantumcumque maiorem vel minorem.

Schematiſmus 18 *Fig.* 2. PLanum materiale BM tangat circulus aut ſphæra AQ, in puncto B. Vnus circumagat ſphæram circa centrum A: alius interim ſphæram trahat latione ad planum parallelâ, ſic vt centrum non excedat parallelam AH. Tum verò ſic per planum BM ſphæra mouebitur, ac ſi volueretur: Et per 3. Theorema, vt erit velocitas tractionis ad velocitatem rotationis, ita erit linea poſt vnam ſphæræ rotationem peractam in plano decurſa ad circumferentiam. Quare cum is, qui ſphæram trahit, eam poſſit in quâcumque proportione trahere celeriùs tardiuſue, quam alter circumagat; poterit linea, quæ decurſa erit poſt vnam ſphæræ rotationem, quacumque proportione eſſe maior vel minor, quam circumferentia. Quod erat demonſtrandum.

THEOREMA X.

Expenditur coni volutio recta per planum Geometricum.

Schematiſmus 18 *Fig.* 7. PLanum Geometricum tangat conus infinitus (hoc eſt indefinitus) in latere FE. Secetur deinde conus infinitis planis, quæ in cono producant circulos infinitos, D, B &c. in plano autem, quod tangit conus, rectas DG, BH. Voluatur deinde conus per planum volutione rectâ, ſic nimirum, vt circulus, D, non excedat rectam DG; quo poſito, omnes reliqui ſuas quoque tangentes BH &c. non excedent. his poſitis Dico

1. Omnes circuli volutiones ſuas pariter & incipiunt, & finiunt: omnes enim tangunt planum in punctis eiuſdem lateris EF.

2. Ex infinitis circulis tantum vnus percurrit vnâ volutione, longitudinem ſuæ circumferentiæ æqualem; is nimirum, qui eadem celeritate circa communem axem FP circumagitur, quâ axis ipſe motu recto progreditur.

3. Reliqui circuli infiniti percurrunt lineas huic æquales.

4. Communis illa longitudo, quam omnes circuli vnâ volutione percurrunt, poteſt eſſe quælibet.

Horum omnium demonſtrationes & cauſæ ex 7 primis Theorematibus deducuntur.

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA XI.

Poſſibilis eſt recta coni volutio in plano materiali communi.

POnantur eadem quæ Theoremate præcedentis ſed pro Geometrico plano ponatur materiale planum commune.

Quæritur, an conus commune planum materiale tangens in latere, moueri poſſit volutione recta? cum enim omnes circuli in cono poſſibiles, materiale planum commune contingant, deberent ſinguli iuxta Theorema 8, vna volutione lineas ſuis circumferentiis æquales percurrere. Quod fieri non poteſt, eum per Theor. præced. eandem omnes longitudinem abſoluant.

Nihilominus demonſtrabitur poſſibilis coni per materiale planum commune volutio recta, eodem fere diſcurſu, quo vſi ſumus Theor. 9. vnus conum circa axem rotet, alter trahat latione recta, ſic vt nunquam deſinat tangere, & circuli D, B, D per ſuas ferantur rectas parallelas DG, BH, DG. Tum verò ſic per planum conus mouebitur, atque ſi volueretur. Quòd ſi velocitas tractionis par ſit velocitati, qua circa axem FP rotatur, exempli grat. circulus B, is decurret vna volutione rectam ſuæ æqualem circumferentiæ. Infiniti autem reliqui rectas huic æquales abſoluent. *Schematiſmus* 18 *Fig.* 7.

THEOREMA XII.

Vnde fiat quod conus difficulter, ac violentè volutione rectâ per materiale planum commune moueatur.

RAtionem ſic aperio. Aſſumatur quiuis in cono circulus B. Hic ſi volueretur ſolus per lineam BH, eadem ſe velocitate circa centrum, ſiue axem FP circumageret, qua progreditur versùs H: hunc enim modum eſſe facillimum, quo versùs H promoueri circulus poteſt, ex demonſtratis Theoremate 8 manifeſtum eſt. Nunc verò quoniam B circulus circumagi nequit, quin ex hypotheſi reliqui omnes pariter circumagantur; ſi B circuli circumactio ſit æquè velox, atque motus rectus, quo eius centrum defertur, circumactio reliquorum omnium erit velocior tardiorue, motu recto, quo defertur centrum circuli B; & ea quidem proportione velocior aut tardior, qua reliquorum circulorum peripheriæ, ipſius B peripheriam excedunt, vel ab eadem exceduntur, vt patet ex 2. axiomate. Omnes igitur circuli (hoc eſt tota coni ſuperficies,) præter vnum B, in minutas communis plani inæqualitates impingent, vt in diſcurſu demonſtrationis, 8. Theorematis demonſtrauimus. Data igitur eſt cauſa vnde fiat &c. *Schematiſmus* 18 *Fig.* 7.

Corollarium.

Hactenus dicta de cono facilè erit Cylindris circa eundem axem poſitis, & diuerſam habentibus latitudinem, ſuo modo applicare. *Schematiſmus* 18 *Fig.* 3.

THEOREMA XIII.

Vnde fiat, quod circa verticem conus in orbem facillimè & ſuâ ſponte per commune planum voluatur.

CAuſa hæc eſt. Cùm per principium Theoremate 8. aſſumptum natura ſemper agat modo facillimo, impetus cono ab impellente impreſſus, eum deferet ea ratione, qua quam facillimè communis plani aſperitatem ſuperet. Atqui in demonſtratione Theorematis 8 oſtenſum eſt, tum à circulo facillimè ſuperari plani communis aſperitatem, cum circulus eadem celeritate circumagitur, qua centrum progreditur motu ad planum parallelo. Igitur & conus, qui eſt quaſi quædam infinitorum circulorum decreſcentium congeries, tum facillimè aſperitatem planorum communium ſuperabit, eum omnes in eo dabiles circuli eadem celeritate pariter circumagentur, qua omnium centra motu ad planum parallelo deferuntur. Eo igitur & ſolo motionis genere impreſſus impetus ciebit conum, quà fiet, vt circulares motus *Fig.* 7.

tus

tus omnium, parallelis centrorum motibus velocitate æquentur. Hanc autem & ſolam eſſe volutionem orbicularem ſic demonſtro:

Schematiſmus 18 *Fig.* 7. Manente vertice F, voluatur in orbem conus, ſic vt latus, FO, quod prius erat in ſublimi, iam in plano exiſtat in FVS. Vnus autem circulorum coni, exem. gra. B, ponatur æquali celeritate circumagi, qua centrum ipſius fertur motu ad planum parallelo. Igitur per Theor. 2. arcus B4Q parti circumferentiæ BS, æqualis erit. Atqui arcus B4Q eſt ad arcum DIO, vt tota peripheria B ad peripheriam totam D; hoc eſt vt diameter BB ad diametrum DD; hoc eſt vt FB ad FD; & ſimiliter arcus BS eſt ad arcum DV, vt FB ad FD. Ergo arcus B4Q eſt ad arcum DIO, vt arcus BS eſt ad arcum DV. Quare cum arcus B4Q, BS æquales ſint, etiam DIO, DV æquales erunt. Ergo centrum circuli D parallelo motu percurrit lineam, arcui DV æqualem eo tempore, quo circumferentiæ pars DIO fuit circumacta. Ergo per Corollar. Theor. 2. motus parallelus quo circuli D centrum progreditur, & circularis eiuſdem D circuli motus, quo circa centrum vertitur, æquè veloces ſunt. Idipſum de reliquis omnibus pari diſcurſu demonſtrabitur. Quare, ſi in orbem conus voluatur, omnes poſſibilium in cono circulorum motus circulares, parallelis centrorum motibus velocitate æquantur. Quod verò id ſola orbiculari circa verticem volutione obtineri poſſit, ex iam demonſtratis facilè colligitur.

Data igitur cauſa eſt, cur conus à motore impulſus, dum ſibi relinquitur, ſemper fixo vertice in orbem voluatur; pateтque vnà vnde fiat, quod ſingulis eiuſmodi orbicularibus volutionibus, ſingulorum in cono circulorum circumferentiæ percurrant in plano communi arcus ſibi æquales, rotaque coni ſuperficies ſibi in plano ſectorem emetiatur æqualem.

Sphæra per commune planum materiale voluta naturaliter, percurrit lineam maximi circuli circumferentiæ æqualem, vt oſtenſum Theor. 8. *At longè aliter res euenit, cum per materiale planum perfectum voluetur: pro cuius rei diſquiſitione, ſequentia quinque Theoremata ſubiungemus. In quibus ſiquid occurrat in quo eruditus lector à nobis diſſentiat, is intelligat non eâdem illa certitudine à me proponi, quâ præcedentia, neque ſemper me demonſtrationes, ſed cogitationes etiam Phyſico-Mathematicas, magnorum exemplo virorum conſcribere voluiſſe.*

Nota: *in ſequentibus, per planum materiale perfectum me intelligere partem ſuperficiei ſphæricæ perfectæ, habentis idem centrum cum centro terræ.*

THEOREMA XIV.

Si ſphæra à materiali plano perfecto ſuſtentata, ſecundum lineam plano parallelam impellatur, ſolo motu lationis abſque vllâ circa centrum rotatione defertur.

Fig 10. IMpellat motor ſecundum FO rectam, plano XM parallelam, ſiue ea tranſeat per centrum A, ſiue non. Quoniam ſphæra à plano omnino ſuſtentatur, & impulſus ſecundum parallelam FO factus perfectam illam ſuſtentationem prorſus illibatam relinquit, patet ſphæram tali impulſui nullo modo reſiſtere: ſed neque planum reſiſtit impulſui, cum ex hypotheſi, & planum ipſum omni inæqualitate careat, & impulſio, vtpote parallela, plano non opponatur. Igitur punctum O, in quod impulſio primariò dirigitur, ſecundum ipſam impulſionis parallelam defertur. Ex quo liquet propoſitum.

THEOREMA XV.

Si circulus ſiue ſphæra à materiali plano perfecto in B ſuſtentata, obliquè deorſum impellatur ſecundum rectam aliquam DOE, occurrentem plano in E; voluetur ſphæra: & ſpatium vnâ volutione confectum ad ſphæræ circumferentiam eam habebit rationem, quam linea BE ad arcum BO.

Schematiſmus 18 *Fig.* 10. PRob. I. *Pars*: quoniam impulſio deorſum fit ſecundum rectam DOE, impetus eò fertur, vt punctum O dirigat in E. Sed ob plani ſoliditatem nequit, O punctum dirigi ac deſcendere versùs E, niſi ſphæra circumagatur circa centrum A, atque vnà progrediatur versùs M; neque circumactionem ſphæræ circa centrum, aut eius lationem versùs M, quidquam impedit, cum & planum careat omni aſperitate, & grauitatio ſphæræ per ſuſtentationem plani perfectam

ſectam elidatur. Impetus igitur ab impellente impreſſus, vt dirigat punctum O in E, ſphæram circa centrum A circumagendo promouet verſus MH, hoc eſt ſphæra voluitur. Quod erat primum.

Prob. II. Pars. Ducatur per O, recta FOK parallela plano XM. Quoniam igitur circulus (vt iam oſtendi) voluitur, ſecabunt ſe mutuò circumferentia & FK parallela. In punctis alijs, atq; alijs, eruntq; ſemper arcus à parallela, ad contactũ intercepti (exemp. grat. LR) æquales arcui BO. Et quoniam eadem ſemper, quæ à principio fuit, perſeuerat impetus directio; toto volutionis tempore ſemper impetus impellet circulum ſecundum rectas exem. gra. PLS, primæ DOE parallelas, tranſeuntes per puncta, in quibus parallela FK & peripheria ſe interſecant, & abſcindentes in plano vſque ad contactum rectas, exemp. gr. SR, pares priori EB. Impetus igitur toto volutionis tempore, omnia ſucceſſiuè puncta circumferentiæ, vbi attigerint parallelam FK, hoc eſt, cum diſtant à contactu, qui tum eſt, arcu æquali ipſi OB, dirigit in alia atque alia plani puncta (ex. gr. in S) diſtantia ſemper ab contactu, qui tum eſt, interuallo æquali ipſi EB. Eiuſmodi autem perpetua & nunquam interrupta directio poſtulat, vt punctum O, deferatur in E, & L in S; & ſic de omnibus. *Fig. 10.*

Quamuis enim punctum O, tantum inſtantaneè dirigatur immediatè ab impetu in punctum E; mediatè tamen dirigitur continenter. Sumatur enim quoduis inſtans volutionis, iſtud exem. gr. cum circulus ex B peruenit in R, ſecans iam FK parallelam ſecundum aliud circumferentiæ ſuæ punctum L. Iam igitur impetus, vt oſtenſum ſupra, agit ſecundùm rectam PLS, priori DOE parallelam; ideoque punctum L, dirigit in S; ac proinde, cum aliter nequeat punctum L deferre in S; & tali volutiuni, nec grauitas ſphæræ à plano ſuſtentatæ, nec ipſius plani inæqualitas vlla officiat, ſic intendit voluere circulum, vt arcus RL circumactus, qui ipſi BO æqualis eſt, percurrat RS æqualem ipſi BE. Atque ita toto volutionis tempore eò tendit impetus, vt arcus ipſi BO æquales, percurrant ſpatia ipſi BE æqualia. Quod, quia fieri nequit, niſi etiam arcus ipſe BO percurrat rectã BE (ſemper enim in volutione vniformi, vt vnus arcus ad ſpatium à ſe percurſum, ita eſt alter arcus ad ſpatium à ſe percurſum) manifeſtum eſt punctum O, etiam poſtquam deſcẽdit infra parallelam FK, mediantibus alijs, atq; alijs peripheriæ punctis in parallelam deſcendentibus, continenter ab impetu dirigi in E. Quare cum nihil ſit, quod delationem puncti O in E, impediat; non plani ſoliditas, huic enim occurrit circuli circa centrum conuerſio; non plani aſperitas, eſt enim perfectum ex hyp. non circuli aut ſphæræ grauitas, perfectè enim à plano ſuſtentatur; impetus punctum O deferet in E, ac proinde arcus BO circumactus percurret rectam BE. Sed vt arcus BO ad rectam à ſe ſemel circumacto percurſam, ita tota circumferentia eſt ad rectam à ſe ſemel circumacta percurſam. Ergo circumferentia ſemel circumacta, eſt ad rectam, quam percurrit; vt arcus BO ad rectam BE. Quod erat propoſitum.

Corollarium.

Sphæræ igitur ac circulo tam naturale eſt, per materiale planum perfectum, à quo ſuſtentatur, voluendo ferri, quàm non voluendo; &, ſi voluitur, lineam vna volutione percurrere ſua circumferentia maiorem minoremúe, quam æqualem.

Pendet quippe horum omnium determinatio ex impulſus directione: vt in Theoremate oſtenſum eſt.

THEOREMA XVI.

Circulus plano materiali perfecto ipſum ſuſtentanti inſiſtens in puncto B, certâ directione impulſus, vnâ volutione naturaliter percurret ſpatium quantumcunque maius ſuâ circumferentiâ.

SVmatur in circumferentia punctum quoduis C, per quod ponatur OP parallela plano BE. Ducatur per idem punctum alia recta NCE, occurrens plano in E. Poteſt EB in quacumque proportione eſſe maior arcu BC. Quod ſi impellatur circulus ſecundum rectam NCE, erit per *Theor.* 15. vt BE eſt ad arcum BC, ita ſpatium à circulo ſemel circumacto confectum, ad circuli circumferentiam. Ergo & ſpatium, à circulo ſemel circumacto confectum, poteſt eſſe in quâcunque proportione maius circumferentiâ. Quod erat propoſitum. *Schematiſmus 18 Fig. 8.*

THEOREMA XVII.

Et ſic impelli ſphæra poterit, vt vnâ volutione abſoluat in plano minus ſpatium ſuâ circumferentiâ. Nunquam tamen impulſu recto ita impelles, vt ſpatium percurrat duplo, vel ampliùs, circumferentiâ minus.

Schematiſmus 18 *Fig.* 8. IMpellatur circulus ſecundùm quamuis rectam occurrentem circulo in N & C, plano autem in E. Tangat deinde circulum in C recta IC, & occurret plano in D. Tangentes BD, CD æquales, & ſimul ſumptæ ſemper maiores erunt arcu BC, quamuis exceſſus fiat dato minor, ſi contactus ſemper propiùs ad ſe inuicem accedant. Ergo & BD ſemper eſt maior ſemiſſe arcus BC. Ergo BE ſemper etiam erit maior arcus BC ſemiſſe. Sed per *Theor.* 15. vt BE ad arcum BC, ſic ſpatium confectum à circulo ſemel circumacto ad circumferentiam. Ergo etiam ſpatium à circulo ſemel circumacto confectum ſemper erit maius ſemiſſe circumferentiæ.

THEOREMA XVIII.

Schematiſmus 18 *Fig.* 10. Sit ſphæra à plano materiali perfecto ſuſtentata in B: eandem tangat ſuperius aliud planum DZ non materiale, ſed geometricum.

Si ſphæra obliquè ſurſum impellatur ſecundum rectam aliquam EGD occurrentem ſuperiori plano in D, ſed eâ vi, quæ non ſufficiat vt ſphæram attollat; ſic voluetur ſphæra, vt circumactio fiat ex C in O, & latio ex B versùs X, D. Spatium verò vnâ volutione percurſum, erit ad circumferentiam, vt recta CD ad arcum CG.

PRobatur I. *Pars.* Quoniam impulſio fit ſurſum ſecundum rectam EGD, impetus à motore impreſſus, punctum G dirigit in punctum D. Sed, quoniam impetus, ex hypotheſi, nequit ſphæram attollere, non poteſt punctum G dirigere in D, niſi ſphæra circumagatur ex C in O, & ſimul progrediatur versùs X, D. Quare, cum neque dictam ſphæræ circa centrum conuerſionem, ex C versùs O, neque delationem ſphæræ versùs D, X, quidquam impediat, (ex hypotheſi enim & planum, cui inſiſtit ſphæra, eſt perfectum, & grauitatio ſphæræ per ſuſtentationem plani omnino eliditur.) Impetus vt dirigat G in D, circumagendo ſphæram ex C in O, eam promouet versùs X, D. Quod erat primum.

Pars II. Simili diſcurſu declarabitur, quo probauimus partem 2 Theorematis 15. Iam enim lubet hic manum tollere de tabula. Quare & Theoremata 16. 17. impulſioni ſurſum directæ lectori applicanda relinquo.

Ipſas deinceps curuas lineas à ſingulis voluti circuli punctis deſcriptas, ſpatiaque ijs comprehenſa, aliaque nonnulla volutionum ſymptomata expendimus.

THEOREMA XIX.

Dum circulus per planum voluitur, punctum contactus curuam lineam deſcribit, quam cycloïdem dicimus. Reliqua circumferentiæ puncta huic æquales ac ſimiles cycloïdes, ſed diuerſo partium ordine, deſcribunt.

Schematiſmus 18 *Fig.* 6. COnſideretur circulus in primo ſitu, 2. 3. 4. 5. & volui incipiat. Quando circulus peruenerit in E, iam punctum contactus 2 eſt in O: cum verò volutio peruenerit vſque in K, 2 erit in L. Atque ita tandem 2 per T deſcendet in P. Liquet igitur punctum contactus Z deſcribere curuam lineam cycloïdem.

Deinde

Deinde punctum 5 in Z, in prima nimirum circuli poſitione, eumdem habet ſitum, quem punctum contactus 2, poſitum in O. Ergo qualem punctum 2 poſitum in O, interim dum circulus voluitur ex E in P, deſcribit lineam, nempe OLTP, talem deſcribet punctum 5, dum circulus ex A voluitur in Q, lineam nimirum ZFNQ. Tunc autem punctum 5, erit in Q. Sed 5 in Q eodem ſe habet modo, ſicut 2 in A. Ergo 5 poſitum in Q, dum circulus pergit volui ex Q in P, talem deſcribit curuam QX lineam, qualem punctum 2, dum fit volutio circuli ex A in E, lineã nempe AO. Sed OLTP cum AO conficiunt totam cycloïdem AOLTP. Ergò etiam ZFNQ, cum QX æqualem ac ſimilem ipſi AOLTP cycloïdem conficient. Eodem diſcurſu idem de reliquis punctis circumferentiæ probabitur.

Licebit autem ſingulorum punctorum vias in appoſita figura deſignare. 5 fertur ex Z per F, N, in Q, & ex Q in X. 4 ex D fertur per G in K, tum ex K per R in α. 3 fertur ex C in E, tum ex E per M & S, in β.

Cæterùm, cum linea, quæ à circulo vna volutione percurritur & cycloïdis ipſius baſis eſt, poſſit eſſe non ſolum æqualis circumferentiæ, ſed etiam quantumcumque eadem maior & minor; inde nimirum fit, vt infinitæ cycloïdium ſpecies exiſtant. Primaria non incommodè ea dicetur, quæ baſim genitoris circuli circumferentiæ æqualem habet; reliquæ ſecundariæ.

Spatij cycloïdalis primarij dimenſionem tradit Torricellius in appendice poſt quadraturam parabolæ. Deinde aſſerit demonſtratione prætermiſſâ, reliquorum cycloïdalium ſpatiorum, quorum baſes vel maiores ſunt vel minores ſui genitoris circuli peripheria, eam eſſe rationem ad ſuos genitores circulos, quam habet dupla baſeos cum peripheria ſui genitoris circuli, ad eandem peripheriam. Nos vtrumque vna demonſtratione infra complectemur. Idem deinde auctor ſtrictim atque aliò quaſi properans, modum inſinuat tangentes ducendi ad datum cuiuſlibet cycloïdis punctum. Verùm ſubobſcurè & ſine demonſtratione.

Vberiùs hoc problema abſoluit Carteſius; cuius constructionem ac demonſtrationem doctiſſimis ſuis in eiuſdem Carteſij Geometriam commentarijs Franciſcus à Schooten inſeruit, Pag. 223. Et ſequentibus.

Nunc, quod paulò ante promiſimus exequamur; & Nobiliſſimi Theorematis nouam atque vniuerſalem demonſtrationem à nobis excogitatam ſubiungamus.

Lemmata.

1. Si æquales circulos EGθ, BVS tangat recta EB, & eoſdem ſecet GK, æquales auferens arcus EG, BK; erit ſecans GK tangenti EB parallela. *Schematiſmus 17 Fig. 127.*

Demonſtrabitur ex 27. & 32. l. 3. & ex 28. l. 1.

2. Si æquales circulos tangat CB, atque huic parallela ſit IK inter circulorum peripherias interiecta: IK tangenti CB æqualis erit.

Demonſtratur ex 27. l. 3. & ex 28. 34. l. 1.

3. In progreſſione Arithmetica numerorum imparium, ſecundum ſeriem naturalem incipiendo ab vnitate 1. 3. 5. 7. 9. 11. &c. Extremi ſiue æqualiter diſtantes, conficiunt bis numerum terminorum, 1. & 11. faciunt 12. hoc eſt bis 6, qui eſt numerus terminorum. Similiter 3. & 9. faciunt 12. Et ſic deinceps. Ratio eſt quia in aggregato quolibet tot ſunt binarij, quot termini progreſſionis.

THEOREMA XX.

Data ſit quæcumque cycloïs dimidia FTS, eiuſque baſis dimidia FB; altitudo autem ſit BS, circa quam ponatur genitoris circuli ſemiſſis BOVS. *Fig. 127.*

Dico ſpatium mixtilineum cycloïde primariâ STF, baſi FB, & circumferentiâ BOVS comprehenſum, duplum eſſe ſemicirculi genitoris BVSA.

In reliquis autem cycloïdibus eam habet rationem mixtilineum dictum ad genitorem ſemicirculum, quam duplum baſeos FB ad ſemiperipheriam BOVS.

INſcribantur ſemicirculi circumferentiæ quotcumque numero pari, (exem. grat. quatuor) æqualia latera BK, KO, OR, RS; inque totidem æquales BC, CD, DE, EF ſeca FB.

Deſcribantur deinde ſemicirculi æquales genitori BVS, qui tangant baſim in punctis C, D, E, & cycloidem ſecent in punctis P, M, G.

Per geneſim cycloidis EF, percurſa ab arcu EG, eſt ad arcum EG, vt FB percurſa à ſemiperipheria, EGθ ſiue BVS eſt ad ſemiperipheriam EGθ, ſiue BVS. Ergo permutando EF eſt ad FB, vt arcus EG eſt ad ſemiperipheriam EGθ, ſeu BVS. Sed per conſtructionem, etiam EF eſt ad FB, vt arcus BK eſt ad ſemiperipheriam BVS. Arcus igitur EG, BK æquales ſunt. Pari modo oſtendam arcus DM, BO, item arcus CP, BR æquales eſſe. Ergo
a Lem. 1. ſi ducantur rectæ GKL, MO, PRQ, erunt ad FB tangentem [a] parallelæ; ac proinde ſingu-
a Lem. 2. læ interceptæ KI, IH, HG, & ON, NM, & RP, æquales [a] erunt tangentibus BC, CD, DE, ſiue earum vni BC.

Inſcribantur deinde cycloïdi latera FG, GM, MP, PS: & ducantur rectæ EG, DH, CI, EH, DI, CK: item HM, IN, HN, IO: item rectæ NP, NR.

His peractis conſtructum erit rectilineum, FGMXPSRZOKB, lateribus circulo ac cycloïdi inſcriptis, & baſi FB comprehenſum, atque diuiſum in quatuor triangulorum ſeries; in tot nempe, quot ſunt latera peripheriæ BVS inſcripta. Suprema in ſerie vnum tantùm eſt triangulum PSR: in ſecunda MPRO, ſunt tria: in tertia GMOK quinque: in quarta & infima FHKB, ſeptem; ſic vt progreſſio conſtituatur numerorum imparium 1.3.5.7. Et quidem triangula ſerierum æqualiter à parallela media AOM diſtantium conficiunt bis numerum laterum peripheriæ BVS inſcriptorum. In ſumma enim & ima ſunt 8 triangula, & in duabus reliquis PROM, GMOK etiam 8. Atque hæc ſemper euenient, quotcumque lateribus cycloïdi ac circulo inſcriptis rectilineum fuerit comprehenſum: cum enim ſemper triangulorum ſeries procedant ſecundum numeros impares 1.3.5.7. &c. per lemma 3 ſemper triangula ſerierum æqualiter à media diſtantium, conficient bis numerum ſerierum, hoc eſt bis numerum laterum peripheriæ BVS inſcriptorum, ſiue bis numerum partium, in quas ſecta fuit baſis FB.

Iam verò baſes horum omnium triangulorum, in quæ reſoluitur rectilineum, ſunt lineæ BC, CD, EF; KI, IH, HG; ON, NM; RP; quas eidem omnes BC æquales eſſe ſupra oſtendimus. Communis autem altitudo 8 triangulorum ſeriei ſummæ PSR ac infimæ FGKB eſt BL; æquantur enim SQ, BL. Triangulorũ verò 8 ſerierum mediarum, altitudo communis eſt LA, rurſum enim QA, LA æquales ſunt. Quoniam igitur omnium triangulorum baſes rectæ BC æquantur, erunt 8 triangula ſeriei ſummæ ac infimæ æqualia triangulo habenti baſim rectæ BC octuplam, altitudinem verò BL. 8 autem triangula ſerierum PROM, GMOK, æqualia erunt triangulo habenti baſim octuplam rectæ BC, altitudinem verò LA. Ergo ſimul omnia, hoc eſt totum rectilineum, æquantur triangulo baſim habenti octuplam rectæ BC, altitudinem verò radium BA; hoc eſt triangulo habenti baſim duplam ipſius FB, altitudinem verò parem radio BA. Sed tale triangulũ, ſi cyclois data ſit primaria, baſim nimirùm
a Ex Archim. p. 1. dim. circ. b 2. l. 1. Cylindricorum & Annularii BF æqualem habens ſemiperipheriæ BVS, duplum [a] eſt ſemicirculi BVSA; aut certè, ſi data cyclois primaria non ſit, baſim nempe habens peripheriã BVS maiorem vel minorem, tale triangulum erit ad ſemicirculum, vt [b] dupla FB eſt ad peripheriam BVS. Ergo rectilineum in cycloide primariâ, duplum eſt ſemicirculi BVSA; in reliquis verò cycloïdibus, ad ſemicirculum eam habet rationem, quam dupla BF ad peripheriam BVS. Atque hoc ipſum de alijs omnibus eiuſmodi rectilineis, quantumcumque multis lateribus circulo ac cycloïdi inſcriptis, modò ea binarius metiatur, fuerint comprehenſa, eôdem prorſus diſcurſu demonſtrabimus. Quæ ſanè mirifica & ſingularis cycloïdium proprietas eſt.

Quare cum latera circulo ac cycloïdi inſcripta tandem in BVS peripheriam, & cycloïdem FTS euaneſcant; ac proinde rectilineum tandem tranſeat in mixtilineum; ipſum quoque mixtilineum in cycloïde primariâ ſemicirculi duplum erit: in reliquis autem, ad ſemicirculum eam habebit rationem, quam dupla BF ad ſemiperipheriam BVS. Quod erat demonſtrandum.

Omitto deductionem ad impoſſibile, quę cuiuis vel medioeri Geometræ in promptu erit.

Manifeſtum.

Spatium igitur cycloïdale primarium, genitoris circuli triplum eſt. Cycloïdalia verò ſpatia ſecundaria ad ſuos genitores circulos eam habent rationem, quam dupla baſeos cum peripheria genitoris circuli habet ad eandem peripheriam.

Scholium.

Schematiſmus 18 Fig. 127. *A Primâ editione huius diſſertationis fuit nonnemo, qui clauſulam huius demonſtrationis erroris argueret, diceretque me in eundem paralogiſmum incidiſſe, quem in ſcholio primi theorematis in Galilæo damnaueram. At longè aliter*

ſe

ſe res habet. Cum enim dixi latera circulo ac cycloïdi inſcripta, tandem in peripheriam BVS & cycloïdem FTS euaneſcere, ac proiude rectilineum tandem tranſire iu mixtilineum, non aliud inſinuani, quam ſpatia FG, GM, MP, PS, item BK, KO, OR, RS, fieri taudem dato ſpatio minora: hincque adeo, demonſtratione priori ſuppoſitâ, in promptu eſſe deductionem ad impoſſibile, quam lectoribus Geometris breuitatis ſtudio reliqueram. Nihilominus, vt omnibus ſatisfiat, hanc ipſam deductionem ad impoſſibile hic ſubijcio hunc in modum.

Si uegas mixtilineum FTSVB eſſe ad ſemicirculum BVSA, vt dupla FB ad ſemiperipheriam BVS, erit vel in maiori ratione, vel in minori. Sit primo in maiori. Ergo alia quæpiam quantitas ω minor quam mixtilineum, exempli gr. defectu δ, erit ad ſemicirculum BVSA, vt dupla FB ad peripheriam BVS. Inſcribantur ſemicirculo tot æqualia latera, ac totidem ijs reſpondeutia cycloïdi iuxta conſtructionis modum in demonſtratione vſurpatum, vt ſpatia FG, GM, MP, PS, fiaut minora quam δ, quod fieri poſſe infra oſtendam. Erit ergo ſpatium peripheria BVS, baſi FB, ac lateribus SP, PM, MG, GF contentum maius quam ω. Vnde rectilinenm lateribus SR, RO, OK, KB, baſi FB, & lateribus SP, PM, MG, GF contentum, multò maius erit quam ω. Sed ω ad ſemicirculum BVSA volebas eſſe, vt dupla FB eſt ad peripheriâm BVS. Ergo rectilineum ad ſemicirculum eſt in maiori, quam dupla BF ad BVS: quod ſupra demonſtratis repugnat.

Sit iam, ſi fieri poteſt mixtilineum FTSVB ad ſemicirculum DVSA in minori, quàm dupla BF ad BVS. Ergo iuuerſim ſemicirculus eſt ad mixtilineum in maiori, quàm BVS ad duplam FB. Igitur ſemicirculus ad quantitatem aliquam λ maiorem quam mixtilineum, exem. gr. exceſſu ζ, erit vt BVS ad duplam FB. Inſcribantur ſemicirculo tot æqualia latera, vt ſpatia BK, KO, OR, RS fiant minora quam ζ (quod factum ab Euclide 2.12.) & perficiatur rectilineum vt ſupra. Erit ſpatium lateribus SR, RO, OK, KB, baſi BF, ac cycloïde FTS contentum minus, quam λ. Quoniam igitur ſemicirculum volebas eſſe ad λ, vt BVS ad duplam FB, erit ſemicirculus ad ſpatium lateribus SR, RO, OK, KB, baſi FB, & cicloïde conteutum in maiori, quam BVS ad duplam FB. Ergo ſemicirculus ad rectilineum lateribus SR, RO, OK, KB, baſi FB, ac lateribus GF, FM, MP, PS conteutum eſt in multò maiori, quam BVS ad duplam BF. Quod iterum repugnat ijs quæ ſupra demouſtrauimus.

Quod autem ſegmenta FG, GM, MT, PX, PS, fiant tandem dato ſpatio minora, ſic oſtendo. Diuidatur FB in tot partes æquales, donec rectangulum CBS fiat dato ſpatio minus, & totidem lateribus tum circulo tum cycloïdi inſcriptis, rectilineum, vt ſupra, perficiatur: ducaturque Cδ diameter ſemicirculi CNδ, ſecaus BVS iu α, & β; & iunge Sδ. Si ab æqualibus ſemicirculis SOB, δNC auſers commune αβO, & reſiduis addas mixta ſpatia Sαδ, BβC, erit ſpatium SδNCBOVS æquale rectangulo CBSδ, ac proinde etiam dato minus. Deiude ſegmentulum πS minus eſt ſegmento SR, hoc eſt ſegmento PN. Ex quo patet totum ſpatium SδNCBVS rectis Sδ, BC, & peripherijs BVS, CNδ comprehenſum, maius eſſe ſegmento cycloïdico PπSP. Quare cum oſtenſum ſit ſpatium SδNCBVS eſſe dato minus, etiam PπSP dato minus erit. Simili diſcurſu oſtendam ſingula ſegmeuta reliqua PM, MG, GF fieri tandem dato minora. Manifeſtum eſt igitur omnia ſimul ſumpta fore tandem dato minora.

Lemma.

Ad ſequens Theorema.

Circulum BLHD interius tangat circulus BFAQ, tranſiens per maioris centrum A. Si ex centro A ducatur recta AQR; hæc abſcindet arcus BQ, BR æquales. Fig. 9.

Ex minoris centro Z ducatur ZQ, cui parallela ſit Aα. Patet arcus αB, QB fore ſimiles cum æquales [a] angulos centri BAα, BZQ ſubtendant. Quare cum [b] totæ peripheriæ BLHD, BFAQ ſint in ratione duplâ, etiam arcus Bα ipſius QB duplus erit. Deinde quoniam [c] angulus centri BZQ ſit duplus anguli BAQ, etiam BAα par ipſi BZQ, anguli BAQ, ſiue BAR duplus erit. Ergo [d] arcus αB duplus quoque eſt arcus BR. Arcus igitur QB, BR æquales ſunt. Quod erat demonſtrandum.

a 29. 1.
b Pappus l. 5 p 41.
c 20. 3.
d 33. 6.

Idem demonſtrabitur ductâ tangente AD, & rectâ OQ. Et rorſum aliter, ſi ducatur ex puncto H, parallela ad AC.

Sed & nullâ lineâ ductâ ex ipſis in lemmate datis. Quoniam angulus ad centrum duplus eſt eius, qui ad circumferentiam eidem aut ſimili arcui inſiſtens: idem angulus BAC ad circumferentiam circuli minoris BFAC & ad centrum maioris BLHD abſcindet arcum BR, ſimilem dimidio ipſius BQ. Sed quilibet arcus circuli maioris BLHD eſt alterius in circulo minori ſimilis duplus, ſunt enim ſimiles, vt circumferentiæ. Ergo arcus BR dimidij ipſius BQ duplus eſt. Igitur toti BQ æqualis.

THEOREMA XXI.

Schematiſmus 18 Fig. 9.

Datus eſto circulus BLHD, quem interiùs tangat circulus minor BFAC tranſiens per maioris centrum A.

Eo tempore, quo circulus minor ſemel voluitur versùs D, per circumferentiam cauam maioris, ſingula minoris circumferentiæ puncta deſcribunt diametros, quæ per ipſa tranſeunt.

Punctum contactus B percurrit diametrum BH.

Punctum quod in A centro eſt, percurrit radium AD bis, eundo ex A in D, & ex D redeundo in A.

Punctum F, (& eodem modo puncta reliqua ſemiperipheriæ BFA) primum aſcendit per diametri partem FG: deinde deſcendendo redit ad ſpatium GX ipſi FS æquale.

Punctum Q (& eodem modo quodlibet aliud in ſemicircumferētiâ BQA) primùm deſcendit per diametri partem QR. Tum aſcendendo regreditur per diametrum vſque in V, relinquens partem VK æqualem QR.

Centrum Z deſcribit peripheriam, cuius radius AZ.

SVme in peripheria minoris punctum quoduis C, & ex A centro per C, ſiue Q rectam due occurrentem peripheriæ maiori in R. Per lemma iam demonſtratum, erunt arcus OQ, OR æquales. Quare ſi circulus AQBF voluatur ex O in R, punctum C deſcendens ex Q incidet in R; circulus verò AQBF tum ſecabit AB in P: eruntque rurſum per lemma, arcus RP, RO æquales. Neceſſe igitur eſt vt punctum B, quod prius erat in O, iam ſit in P, quando volutio ex O peruenit in R. Pari modo oſtendam, quacumque volutionis parte in quadrante BD peractâ, ſemper punctum B eſſe in aliquo puncto radij OA.

Iam verò eodem tempore, quo punctum B ex O veniens percurrit ſemidiametrum OA, punctum quod eſt in centro A, percurrit radium AD; quod ſic oſtendo. Quoniam HO diameter dupla eſt radij AO, etiam circumferentia HDBL dupla eſt circumferentiæ ACBF. Ergo BD quadrans maioris æquatur dimidiæ minoris circumferentiæ ACO. Atqui per lemma, arcus OQ, OR ſunt æquales. Ergo & reliqui QA, RD æquantur. Sed per lemma RD, eſt æqualis RN. Ergo QA, RN æquantur. Eſt autem per lemma & arcus OQ æqualis arcui OR, hoc eſt per lemma arcui RP. Ergo ſi æqualibus QA, RN addas æquales OQ, RP, erunt toti OQA, PRN æquales. Dum igitur volutio peruenit vſque in R, punctumque B ex O venit in P; punctum, quod in A centro erat, ex A motum eſt in punctum N, quod exiſtit in radio AD. Eodem modo oſtendam punctum illud ſemper manere in radio AD; & quando B attinget centrum A, alterum futurum in D.

Porro vti iam oſtenſum eſt, dum circulus voluitur per quadrantem OD, punctum, quod in centro eſt, percurrere radium AD; eodem modo puncto B poſito in A, & eo, quod in A

fuit,

fuit, poſito in D, oſtendetur punctum B percurrere radium AH, interim dum circulus voluitur per quadrantem DH: punctum verò, quod in centro fuerat, remetiri ſemidiametrum ex D in A. Atque ita vnâ volutione peractâ, percurret contactus punctum B totum diametrum OAH; punctum vero, quod eſt in centro, ſemidiametrum AD bis.

Ex his iam facilè reliquæ aſſertionis partes demonſtrabuntur.

Theorema intellige de eâ tantum minoris circuli per eandem maioris peripheriam volutione, quâ ſpatium percurritur circumferentiæ minoris æquale. Poteſt enim, quemadmodum in plano ſupra demonſtrauimus, ita & hîc minor circulus ſic per maiorem volui, vt vnâ volutione ſpatium ſuâ circumferentiâ iam maius, iam minus percurrat.

THEOREMA XXII.

Quamuis omnium corporum regulariſſima ſit ſphæra; tamen, quando ipſa per planum vniformi celeritate voluitur, ſingulæ eius partes neceſſariò difformi celeritate mouentur.

SIt maximus ſphæræ circulus in 4. ſectus quadrantes in punctis, 2.3.4.5. longitudo autem, quam vna volutione ſphæra percurrit, ſit AP, eius circumferentiæ æqualis. Hæc ſi diuidatur in quatuor æquales partes in punctis E,K,Q, ſingulæ eius partes ſingulis circumferentiæ quadrantibus æquales erunt. Quoniam igitur quadrans AC par eſt rectæ AE; quo tempore voluitur ſphæra ex A in E, eodem 3 ex C fertur in E, & 2 ex A in O; ac proinde A percurrit curuam lineam AO. Rurſum quia EK æqualis eſt quadranti EG, quo tempore ſphæra voluitur ex E in K, eodem 4 ex G, fertur in K, ac proinde 2. diametraliter ipſi 4 oppoſitum, ex O fertur in L, percurrendo curuam lineam OL. Sed ſphæra ex hypotheſi vniformiter, hoc eſt per definitionem primam, temporibus æqualibus voluitur, per æqualia ſpatia, AE, EK. Ergo etiam punctum 2 æqualibus temporibus percurrit lineas curuas AO, & OL. Sed OL multò eſt maior quam AO. Ergo iuxta defin. 2. punctum 2 difformi celeritate motum eſt ex A in L. *Schematiſmus* 18 *Fig.* 6.

Verum altiùs huius phænomeni cauſa indaganda eſt. Dum ſphæra voluitur per planum, contactus punctum 2 ſiue A, fertur per cycloidem ALP motu quodam mixto, qui nimirum ex duobus componitur motibus, quorum vnus rectus eſt tendens ex A in P, alter circularis per peripheriam AZDC ex A versùs Z. Itaque dum ſphæra voluitur ex A in P ſecum deuehens punctum A, illud interim percurrit circumferentiam AZDC, qui motus priorem inæqualiter afficit.

Per ſemicirculum enim AZD aſcendendo, primum quidem aduerſatur aliquouſque, ſed minùs ſemper ac minùs: per reliquam deinde eiuſdem ſemicirculi partem continuè fauet magis magiſque. Per ſemicirculum verò DCA deſcendendo, fiunt eadem; ſed inuersè.

Motus enim per ſemicircumferentiam AZD aſcendens, fit ſurſum ſecundùm infinitas inclinationum differentias, quas habent infinitæ tangentes, quæ ad ſingula ſemicircumferentiæ puncta duci poſſunt: quæ quò in altiori puncto tangunt, eò motus per ipſas ſurſum factus, vel minùs opponitur motui recto ex A versùs F, vel magis eidem fauet. In fine quadrantis AZ fertur ſecundum tangentem ZB, quæ, ſi producatur, ad EF recta erit. In fine autem quadrantis ſecundi fertur ſecundum tangentem DH; quæ cum ad EF, ſit parallela, liquet in D motum circularem prorſus fauere motui recto ex A in F. In reliquis quadrantibus eadem, ſed ordine inuerſo contingent. Motus enim per DCA deſcendens, deorſum fertur ſecundum inclinationes infinitarum tangentium: quæ quò in punctis demiſſioribus tangunt, eò motus per ipſas deorsũ factus, motui recto ex A versùs F, vel minus fauet, vel magis aduerſatur. *Schematiſmus* 18 *Fig.* 14.

Atque hinc perſpicuum fit celeritatem puncti 2. per totam cycloidis ſemiſſem AOL perpetuò creſcere, quòd motui recto ex A in K ſemper minùs ac minùs opponatur circularis motus, qui per ſemicirculum AZD eodem tempore peragitur: per alteram vero ſemiſſem LIP celeritatem perpetuò eadem proportione minui, quâ antè creuerat, quòd motus circularis per ſemicirculum DCA motui recto ex A in P ſemper magis magiſque opponatur. *Schematiſmus* 18 *Fig.* 6.

Quæ autem de puncto contactus demonſtrauimus, eodem diſcurſu de quibuſlibet alijs datis in ſphærâ punctis demonſtrabimus.

Sed erit fortaſſe, qui quæret; in quo peripheriæ puncto, motus circularis fauere recto incipiat & deſinat aduerſari. Huius quæſtionis reſolutio neque aliena erit à propoſito, neque indigna, quæ inſtitutam de volutione circuli diſſertationem concludat. Sit igitur

Lemma.

Datum ſit parallelogrammum FC. Si latus BF feratur motu æquabili per BC donec congruat *Schematiſmus* 17

Fig. 123. gruat lateri CE, ſic vt in motu ſemper maneat ipſi CE parallelum : eodem autem tempore punctum B æquabili motu percurrat latus BE: Dico punctum B deſcribere diametrum BE.

Eſt Ariſtotelis in quæſtionibus mechanicis. Ego ſic demonſtro.

Ponatur latus BF perueniſſe in AM ſecans diametrum in O : & per O ducatur GN parallela ad BC. Quoniam ex hyp. motus ſunt æquabiles, qualis eſt proportio velocitatum vtriuſque motus, talis erit & ſpatiorum, quæ æqualibus temporibus vtroque motu abſoluuntur. Ergo vt BC, totum nempe ſpatium, quod latus BF percurrit toto tempore, eſt ad BF, ſiue CE, ſpatium totum, quod eodem toto tempore percurrit punctum B, ita BA, quam latus BF percurrit parte temporis, eſt ad longitudinem, quam eadem temporis parte percurrit punctum B. Sed ea eſt BG, ſiue AO; eſt enim vt BC ad BF, id eſt CE, ſic BA ad AO. Ergo quando latus BF peruenit in MA, punctum B eſt in O, quod eſt punctum in diametro BE. Eodem modo oſtendam quolibet alio eiuſdem motus inſtanti punctum B fore in diametro. Liquet ergo propoſitum.

DEFINITIO.

Vnus motus alteri aduerſari dicitur, cum motus ex vtroque compoſitus minus ſpatium percurrit, quam eodem tempore alteruter percurreret ſolus : fauere, cum maius.

THEOREMA XXIII.

Schematiſmus 17 *Fig.* 124. Eſto circulus EGDQ tangens planum in E, qui dum fertur versùs M, eodem tempore punctum E aſcendat per circumferentiam EGD; ac dein deſcendat per DQ in E. Sint autem motus rectus, & circularis æquè celeres, & æquabiles. Deinde abſcindantur vtrimque à contactu ſurſum EG, EQ ſextæ totius circumferentiæ partes.

Dico : circularem motum, in punctis G & Q motui recto nec fauere nec aduerſari.

Schematiſmus 17 *Fig.* 124. IN G tangat recta BS, ſumptiſque vtcumque æqualibus BF, BC, comple rhombum FBCN. Ex A circuli centro duc AB, item ad contactus G, E, rectas AG, AE. Quoniam tangentes GB, EB, itemque AG, AE, æquales ſunt, & AB communis, patet angulum GBE biſecari à rectâ BA. Quare BA producta tranſit per N, eſtque diameter rhombi. Quadrilateri autem GAEB quatuor anguli ſimul, 4 rectis æquales ſunt. Quare [a] cum duo AGB, AEB duo ſint recti, etiam reliqui GAE, GBE duos conficient rectos. Sed GAE eſt 2 ſextæ duorum rectorum, cum arcus EG ſit ſexta pars circumferentiæ. Ergo GBE eſt 4 ſextæ duorum rectorum. Ergo, quia BA biſecat GBE, ſinguli GBN, NBC ſunt 2 ſextæ duorum rectorum. Sed, quia NC, BF æquidiſtant CNB æquatur GBN. Ergo & CNB eſt duæ ſextæ duorum rectorum. Quare cum etiam oſtenderim NBC eſſe 2 ſextas, patet & reliquum BCN eſſe 2 ſextas. Æquantur igitur CNB, BCN, ideóque & BN diameter rhombi BC lateri æqualis [b] erit.

a 15. *Elem.* 3.

b 6. 1.

Iam verò quando punctum E aſcendens per peripheriam peruenerit in G, fertur ſecundum inclinationem tangentis BGF; & quidem ex hypotheſi eadem celeritate, qua interim progreditur motu recto versùs M. Sed motus, qui fit ſecundum inclinationé tangentis BGF, motui recto æquè veloci per tangentem BC nec fauet nec aduerſatur : quod ſic oſtendo.

Quoniam motus quo punctum B ambulat per BF, & is quo defertur ſecundum BC, ſunt æquè veloces; quo tempore punctum B abſolueret BF, eodem tempore delatio puncti B abſoluet BC æqualem BF. Punctum autem B gemino [c] eo motu deſcribit BN diametrum rhombi FC. Quare cum BN oſtẽſa ſuperiùs ſit æqualis eſſe BC, motus compoſitus ex motu lationis versùs M, & ex motu æquè celeri facto ſecundum inclinationem tangentis BF, longitudinem abſoluit BN æqualem ei (nempe ipſi BC) quæ percurritur motu ſolo lationis per BC. Itaque motus ſecundum inclinationem tangentis BGF, motui versùs M æquè celeri nec [a] fauet, nec aduerſatur.

c *Lem.*

a *Defin.*

Quare cum punctum E per circumferentiam EGD aſcendens, in fine arcus EG feratur ſecundum tangentem BGF; liquet in G motum circularem nec aduerſari, nec fauere motui recto ex E versùs C. Hinc iam idem quoque patet de puncto Q. Liquet ergo propoſitum.

THEO-

THEOREMA XXIV.

Iiſdem poſitis; Dico: circularem motum aduerſari motui recto ab E vſque ad G, per ſextam nempe partem circumferentiæ: fauere deinde per quatuor circumferentiæ ſextas GDQ: ac demum rurſus aduerſari per reliquam circumferentiæ ſextam QE. *Schematiſmus 17 Fig. 124. 125. 126.*

IN arcu EG ſume quoduis punctum K, in quo circulum tangat BKS. Abſciſſis vtrimque æqualibus BF, BC compleatur rhombus FNCB, & duc ex centro A rectam AB; ad contactus item K, E, rectas iunge AK, AE. *Fig. 125.* Iam oſtenſum in præcedenti eſt rectam AB biſecare angulum KBE, ac proinde tranſire per angulum rhombi N; item angulos KBE & KAE conficere duos rectos. Quoniam arcus EK eſt minor ſextâ parte circumferentiæ, erit angulus KAE minor ſexta parte 4 rectorum, hoc eſt 2 ſextis duorum rectorum. Ergo KBE maior eſt 4 ſextis duorum rectorum: ac proinde ſinguli NBK, NBC maiores 2 ſextis duorum rectorum. Sed, ob NC, BF parallelas, BNC par eſt NBK. Ergo etiam BNC maior eſt duabus ſextis 2 rectorum. Quare cum etiam NBC ſit maior duabus ſextis, reliquus BCN duabus ſextis minor erit; ac proinde minor quam BNC. Ergo BC maior eſt quam BN rhombi diameter.

Iam autem vbi punctum E circulariter aſcendens peruenerit in K, fertur ſecundùm inclinationē tangentis BKF & quia interim eâdem celeritate tendit versùs M; quo tempore motus per BKF abſolueret rectam BF, eodem motus per BM æque velox percurret BC parem ipſi BF. Motus autem ex vtroque compoſiti [a] ſemita eſt BN, quam iam oſtendi minorem eſſe rectâ BC, quæ motu recto ſolo fuiſſet percurſa. *a Lemma.* Igitur motus ſecundùm inclinationem tangentis BKF, hoc eſt motus ipſe circularis in puncto K aduerſatur [b] motui versùs M: ac proinde circularis motus per totum arcum EG delationi versùs M aduerſatur. *b Definit. ante theor. 13.* Quod erat primum. Ex quo id ipſum quoque patet de arcu QE.

Sumatur deinde vltra ſextam circumferentiæ partem EG, inter G & apicem D, punctum quoduis K. *Fig. 126.* Ductâque tangente BKS, ſumantur vtrimque æquales BF, BC, & rhombus cōpleatur BFNC. Ducantur deinde ex A centro, vt prius, rectæ AK, AB, AE. Quoniam iam arcus EK maior eſt ſextâ parte circumferentiæ, angulus EAK erit maior ſextâ parte 4 rectorum, adeoque maior 2 ſextis 2 rectorum. Vnde KBE minor erit 4 ſextis duorum rectorum, ac proinde ſinguli æqualium ABK, ABE minores 2 ſextis 2 rectorum. Sed ob CN, BF parallelas, BNC par eſt ABK. Ergo & BNC minor eſt 2 ſextis. Quare cum etiam ABC duabus ſextis minor ſit, reliquus BCN, duabus ſextis maior erit, ac proinde maior quam BNC. Vnde BC minor eſt quam BN rhombi diameter. Atqui BN ſemita [c] eſt motus compoſiti ex motu ſecundum inclinationem tangentis BKF, & ex motu æquè celeri lationis versùs M. *c Lemma.* BC verò eſt ſemita percurſa à motu lationis versùs M ſolo, quæ omnia patent ex primæ partis diſcurſu. Ergo motus ſecundum inclinationem tangentis BKF, hoc eſt motus ipſe circularis, in puncto K, motui versùs M [d] fauet. *d Defin.* Quare cùm punctum K aſſumptum fuerit quodlibet in arcu GD, liquet circularem motum per arcum totum GD fauere motui recto versùs M. Vnde iam idipſum quoque manifeſtum erit de arcu DQ.

Lemma I.

Parallelogrammum conſtruere, quód diametrum (AH) habet æqualem baſi (AB); latus verò (AF) ad baſim (AB) in ratione datâ (Q ad S.)

Deſcribantur duo æquales circuli per mutua tranſeuntes centra A, & O, & ſeſe interſecantes in E: per centra ducatur recta COAB. *Schematiſmus 17 Fig. 128.* Si iam ratio data Q ad S fuerit æqualitatis, duc AE, & EI parallelam AB, ac iunge AI: factumque erit quod petitur. Quia enim IE parallela eſt ad BC tranſeunti per centra A, O, ac proinde etiam parallela eſt ipſi DN vtrumque circulum tangenti; ergo tam IE quam BA ſunt [a] æquales DN, ac proinde & inter ſe. *a Lem. 2. Theor. 20.* Quare etiam AE, BI, quæ æquales ac parallelas IE, BA nectunt, ſunt parallelæ. Ergo AEIB eſt parallelogrammum, in quo latus AE, baſis AB, diameter AI æquales ſunt.

Quod ſi ratio data Q ad S fuerit minoris inæqualitatis, fiat vt Q ad S, ita quæpiam recta ad AB, quæ extremitatem habens in A circulo ANC inſcribatur & ſit AF; ductâque FH parallelâ AB, iunge rectas AH, BH. Oſtendam, vt ſupra, AFHB eſſe parallelogrammum; in quo FA ad AB habet datam rationē minoris inæqualitatis, & diameter AH eſt æqualis baſi AB.

Tandem ſi ratio data Q ad S, ſit inæqualitatis maioris, oportebit illam eſſe minorem duplâ. Fiat igitur vt Q ad S, ita recta quæpiam ad AB. Erit hæc iuxta determinationem iam poſitam, minor quam CA dupla AB; ac proinde circulo ANC inſcribi poterit, vt AK. Duc KG

parallelam

parallelam AB, & iunge BG, AG. Oſtendam rurſus, vt ſupra, AKGB iſte parallelogrammum, in quo latus AK ſit maius baſi AB in ratione data: diameter autem AG & baſis AB æquales ſint. Demonſtratio determinationis patet.

Lemma II.

Schematiſmus 17 *Fig.* 138. Parallelogrammum, exem.gr. AFHB, habens diametrum AH baſi AB æqualem, latus verò AF minus baſi, minorem habet angulum FAB angulo EAB rhombi AEIB, in quo baſis AB, diameter AI, & latus AE æqualia ſunt. Et quo latus AF minus fuerit, eò angulus FAB minus excedet rectum DAB, fietque exceſſus ille tandem dato acuto minor.

Quod ſi parallelogrammum, exem.gr. AKGB, diametrum habens AG æqualem baſi AB, latus habeat AK baſi maius; tunc angulus KAB maior eſt quam EAB angulus rhombi AEIB. Et quo latus AK propius acceſſerit ad magnitudinem ipſius AC duplæ AB, eò angulus KAB propiùs accedet ad quantitatem duorum rectorum; eritque defectus tandem dato acuto minor.

Quæ omnia patent conſideranti.

Lemma III.

Schematiſmus 17 *Fig.* 129. Datum ſit parallelogrammum ADCB habens diametrum AC parem baſi AB. Parallelogrammum habens eandem laterum rationem, quam DA, AB, ſi angulum maiorem habuerit angulo DAB, habebit diametrum baſi minorem; ſi angulum habeat ipſo DAB minorem, habebit diametrum baſi maiorem.

Centris A & B per D & C deſcribe circulos, & fac parallelogramma, quorum anguli E, H, F, G ad peripherias exiſtant. Erunt horum latera ipſis DA, BA, proportionalia, imo æqualia; & AH diameter eius, quod angulum habet EAB maiorem angulo DAB, minor eſt recta AC, hoc eſt baſi AB. Diameter autem AG, alterius habentis angulum FAB minorem angulo DAB, maior eſt baſi AB. Qualis autem eſt ratio diametrorum ad baſes in parallelogrammis AEHB, AFGB, talis eſt in omnibus aliis quæ his ſimilia ſunt. Liquet ergo propoſitum.

THEOREMA XXV.

Schematiſmus 17 *Fig.* 132. 133. Ponantur eadem quæ theoremate 23: ſed circularis motus EGDQE ſit iam tardior motu recto versùs M.

a Per lem. 1. Præced. Fiat [a] parallelogrammum XZ habens diametrum TV æqualem baſi TZ; latus verò XT ea proportione minus baſi TZ, quâ motus circularis eſt tardior recto. Tum ex centro A duc AR, quæ cum tangente PEC faciat angulum ARC parem angulo XTZ. Ad AR duc perpendicularem AK occurrentem circulo in K: & arcui EK abſcinde æqualem IE.

Dico: motum circularem tardiorem recto in ratione XT ad TZ aduerſari recto per arcum totum EK: fauere autem per KDI: ac rurſum per IE aduerſari.

DVcatur enim tangens SKP, Quoniam angulus AKP rectus eſt 18. 3, & KAR rectus ex conſtructione; erunt SKP, & AR parallelæ. Angulus igitur EPS par eſt angulo CRA; hoc eſt angulo XTZ. Quare ſi PS, PC abſcindantur lateribus XT, TZ proportionales, & compleatur PSNC parallelogrammum erit hoc ſimile ipſi XZ; in quo, quia diameter TV par eſt baſi TZ, etiam in illo diameter PN baſi PC æqualis erit. Si iam duo motus fiant alter per rectam PS, alter per PC, ſic vt is qui per PS, ſit eâ ratione tardior eo qui per PC, qua SP minor eſt quam PC; eodem tempore hic PS percurret quo ille PC. Ac proinde [a] motus ex vtroque compoſiti ſemita eodem tempore confecta erit diameter PN, diameter parallelogrammi. Quæ quia par eſt [b] baſi PC, quæ motu, qui fertur versùs C, conficitur, liquet motum ſecundum inclinationem tangentis PS non aduerſari motui lationis per PC. Quare cum circularis motus EKD in puncto K feratur ſecundum inclinationem tangentis PKS, is lationi rectæ versùs C nec aduerſatur, [c] nec fauet. Vnde id ipſum etiam patet de puncto I.

a Lemm. theor. 23
b Per conſtruc.
c Definit. ante theor. 23.
d Lemma 3 præced.
e probatur vt ſupra.

Sumpto deinde puncto quouis α in arcu EK in eo tangat recta ωα: ſi in angulo ωα C fiat parallelogrammum, latera habens ipſis SP, PC proportionalia, huius diameter baſi erit [d] minor, diameter autem illa eſt [e] ſemita, quam percurrit motus compoſitus ex motu ſecundum inclinationem tangentis ωα, & ex motu tempore eodem percurrente baſim, ac tendente verſus

sùs C. Liquet ergo motum ſecundum inclinationem tangentis ωα, hoc eſt motum circularem in puncto α, aduerſari ſ lationi versùs C. Quia ergo punctum α aſſumptum fuit quodlibet, motus circularis per totum arcum EK aduerſatur lationi rectæ versùs C. Vnde & id ipſum patet de arcu IE. f *defin. ante theor. 23.*

Sumatur deinde punctum quoduis θ inter K, & punctum ſummum D, in quo tangat δθ; & in angulo θδE fac parallelogrammum habens latera ipſis SP, PC proportionalia, huius diameter h maior baſi erit. Ex quo applicando diſcorſus hactenus factos, facile conſtat motum circularem in puncto θ, ac proinde & per totum arcum KD fauere g motui recto versùs C. Vnde id ipſum quoque patet de arcu DI. h *lemm. 3. præc.* g *defin. ante theor. 23.*

THEOREMA XXVI.

Iiſdem poſitis:

Si motus circularis fuerit recto tardior, circularis aduerſabitur vtrimque recto per arcus maiores circumferentię ſextantibus EG, QE. Et quo tardior fuerit circularis motus, eò per maiores vtrimque arcus recto aduerſabitur: ſemper tamen per minores quadrãtibus EO, HE, quantacunque fuerit tarditas motus circularis. *Schematiſmus 17 Fig. 132. 133.*

Conſtruantur eadem quæ in præcedenti, in qua oſtendimus, poſito quod circularis motus ſuperetur à recto, vt XT, ab TZ, hoc eſt a vt SP ab PC, circularem aduerſari recto per arcum EK, & ab altera parte deſcendendo per arcum IE ipſi EK æqualem. Ex demonſtratis autem *Theor.* 23. manifeſtum eſt, ſi à rectâ Bβ, quæ tangit in G termino ſextantis EG, & à tangente BM abſcindantur æquales, & compleatur rhombus, huius diametrum fore baſi æqualẽ. Parallelogrammi igitur PSNC habentis diametrum PN, baſi PC parem, latus verò SP baſi minus, angulus SPC b minor erit angulo rhombi GBC. Ergo punctum K in quo latus SP tangit, altius neceſſariò eſt quàm G, in quo tangit rhombi latus, ac proinde arcus EK maior eſt ſextante EG. Quod erat primum. a *Per conſtr. præc.* b *Lemma 2. theor. 25.*

Deinde quò motus circularis plus deficiet à recto, eò etiam (vt patet ex conſt. præcedenti) SP plus deficere debet ab PC. Ergo etiam angulus SPC eò fiet c minor rhombi angulo GBC, ac proinde contactus K eò fiet altior, arcuſque EK eò erit maior. Quod erat alterum. c *ibidem.*

Denique quia angulus parallelogrammi habentis diametrum baſi æqualem ſemper d manet maior recto; manifeſtum eſt latus SP, quod contactu ſuo determinat quantitatem arcus, per quem circularis motus impedit rectum, non poſſe tangere in O, fine quadrantis EO, aut ſupra O. Ex quo patet tertium. d *ibidem.*

THEOREMA XXVII.

Ponantur eadem quæ ſupra; ſed motus circularis ſit iam velocior motu lationis recto; minus tamen quàm duplo. *Schematiſmus 17 Fig. 130. 131.*

Fiat parallegrammum a XZ habens diametrum TV æqualem baſi TZ; latus autem XT eâ proportione maius baſi TZ, quâ circularis motus ponitur velocior motu recto. Ducatur deinde ex centro circuli AR, cum tangente EM faciens angulum ARM parem angulo XTZ. Tum ad AR duc perpendicularem AK occurrentem circulo in K: & arcui EK abſcinde æqualem EI. a *Lemm. 1. Theor. 25.*

Dico circularem motum qui eâ proportione recto velocior eſt, quâ XT ſuperat TZ, aduerſari recto per arcum EK: fauere autem per KDI, tum deſcendendo aduerſari rurſum per IE.

Demonſtratio eadem, quæ theorematis vigeſimi quinti.

THEOREMA XXVIII.

Iiſdem poſitis:

Si motus circularis fuerit recto velocior, ſed minus quam duplo, aduerſabitur vtrimque recto per arcus minores ſextantibus circumfe- *Schematiſmus 17 Fig. 130. 131.*

cumferentiæ EG, QE, & quo propius acceſſerit ad velocitatem duplam, eò per minores vtrimque arcus aduerſabitur, qui tandem fient datâ quantitate quâlibet minores.

a Conſtr. præced. *b Theor. 27.* *c Lemm. 2. Theor. 25.*

COnſtruantur eadem quæ in præcedenti, & circulum in K tangat SKP. Tum abſcindantur PS, PC proportionales ipſis TX, TZ, & cõpleatur parallelogrammum PSNC. Erit huius latus SP ad baſim PC, vt [a] motus circularis ad rectum, & diamerer PN erit par baſi PC. Erit enim SC ſimile ipſi XZ, in quo TV par eſt TZ. Iam verò demonſtratum ſupra [b] eſt poſito quod ita circularis motus ſuperet rectum, vt SP ſuperat PC, circularem aduerſari recto per arcum EK aſcendendo, deſcendendo autem per arcum huic æqualem IE. Deinde ex demonſtratis *Theor.* 23 manifeſtum eſt, ſi à recta Bβ, (quæ circulum tangit in G extremitate ſextantis EG) & à tangente BM abſcindantur æquales, rhombuſque compleatur, huius diametrum ſuæ baſi fore æqualem. Parallelogrammi igitur PSNC diametrum PN habentis PC baſi æqualem, latus autem PS baſi maius, angulus SBC maior, erit rhombi angulo GBC. Ergo punctum K, in quo latus PS tangit, eſt infra punctum G in quo tangit rhombi latus Bβ; ac proinde arcus EK minor eſt ſextante EK. Quod erat primum.

d Ibidem. *e Ibidem.*

Deinde quo motus circularis propius accedit ad velocitatem duplam, eò etiam vi constructionis latus SP accedet propius ad duplum baſeos ſuæ PC. Ergo etiam [d] angulus SPC eò fiet maior & accedet propius ad quantitatem duorum rectorum; ac proinde contactus K eò fiet demiſſior atque EK eo fiet minor, ac tandem minor dato: angulus enim SPC deficiet [e] tandem à duobus rectis angulo, qui ſit dato minor, vnde etiam arcum EK fieri tandem neceſſe eſt dato minorem. Quod erat alterum.

THEOREMA XXXIX.

Schematiſmus 17 Fig. 130.

Iiſdem poſitis:

Si motus circularis EGDQE ſit velocior duplo vel amplius motu lationis recto versùs C, per nullam circumferentiæ partem ipſi aduerſabitur, ſed fauebit totaliter.

DEmonſtratio ſatis patet ex ſecunda parte Theorematis præcedentis: Nihilominus, ſi ita placet, ſic demonſtro.

Præmiſſo hoc poſtulato: duos circulares motus, diuerſæ velocitatis, non poſſe eidem recto motui per æquales circumferentiæ partes aduerſari. Aduerſetur, ſi fieri poteſt, motus circularis duplo aut amplius velocior recto, per arcum aliquem EK. Ducatur tangens SKP, & in angulo SPE fiat parallelogrammum PSNC, habens diametrum PN baſi PC æqualem. Manifeſtum eſt ex demonſtratis *Theor.* 27. motum circularem cuius velocitas eſt ad velocitatem motus recti, vt SP eſt ad PC, aduerſari motui recto, per arcum EK. Atqui latus SP neceſſariò eſt minus quam duplum baſeos PC, vt patet ex determinatione *lemmatis* 1. *Theor.* 25: ac proinde & motus circularis, qui recto aduerſatur, per arcum EK, eſt minus quàm duplo velocior motu recto. Ergo duo inæquales motus circulares, vnus duplo velocior recto, alter minus quam duplo velocior, eidem recto motui per eundem arcum EK, aduerſantur, quod poſtulato repugnat.

Corollarium.

Ex ijs quæ ſeptem poſtremis Theorematis demonſtrauimus intelligitur, dum ſphæra per planum voluitur, quantum circularis motus cuiuſlibet in ſphæra puncti per cycloidem ſuam progredientis motum impediat vel iuuet. Si enim circularis motus ſit æquè velox ac rectus (quod ſemper ad ſenſum fit, dum ſphæra voluitur liberè per planum materiale) impediet puncti per cycloïdem ſuam progreſſionem tertia parte temporis, quo vna volutio integra abſoluitur: iuuabit autem per duas tertias partes temporis eiuſdem. Patet ex *Theor.* 24.

Quod ſi circularis motus ſit recto tardior impediet progreſſionem puncti per ſuam cycloïdem plus, quam per tertiam partem temporis integræ vnius volutionis: iuuat autem minus quam per duas tertias temporis. Et quo circularis motus plus ſuperabitur à recto, eo diutius impediet: ſemper tamen minus quam per temporis ſemiſſem. Patet ex *Theor.* 26.

Quod ſi motus circularis ſit recto (minus tamen quam duplo) velocior, impediet minus quam per temporis partem tertiam patet ex *Theor.* 28.

Denique ſi duplo aut amplius velocior exiſtat, non iam amplius impediet, ſed toto tempore iuuabit puncti per ſuam cycloidalem orbitam progreſſionem. Liquet ex 29. Theoremate.

FINIS.

AD COMPACTOREM.

SChematiſmi huius operis ita impreſſi ſunt, vt omnes ſimul iuncti ad calcem totius operis affigi poſſint, ita vt ſinguli folio albo affixi, ac deinde explicati, toti extra librum in conſpectum veniant, complicati autem ſemel, præcisè intra libri margines recipiantur, eo ſeruato ſchematiſmorum ordine, qui eſt librorum hoc opere contentorum. Quis ordo ſeruari debeat inter ſchematiſmos ſpectantes ad eumdem librum, ex ordine figurarum ſeſe numeraliter ſubſequentium facilè patebit. Vbi verò hic numeralis ordo interturbatus ſubinde eſt, quia aliter laminæ figuras non ſat commodè capiebant, quod in Opticâ accidit, tenendus eſt ordo in ipſo titulo ſchematiſmorum expreſſus.

Si tamen difficile iudicetur tot ſchematiſmos, operi ſimul ſubiungere, poterunt eodem ſeruato modo & ordine, ſuis quique libris ſubnecti.

Vel denique poterunt ſeorſim in libellum compingi. Emptor eligat.

Schematiſmi qui nullum titulum præferunt niſi SCHEMATISMVS, ad Cylindrica & Annularia ſpectant.

TOT DEN BINDER.

DE plaeten van deſen boeck ſijn ſoo ghedruckt, dat ſy allen te ſaemē gevoecht connen worden op het laeſte vanden boeck, in ſulcker voeghen, dat het blat open gevauden ſijnde de witte ſyde blyue binnen den boeck ende de andere met de figuren ganſch buyten den boeck gheſien worden: ende eens gevauden weſende effen binnen den boeck geſloten wordē: houdende dat ſelve oordre der plaeten, t'welck is der boecken alhier vervat. Wat oordre men moet volghen inde plaeten van jeder boeck, ſal men verſtaen uyt het oordre van de ghetallen der figuren; daer nochtans dit oordre der ghetallen onderbroken is (het welck geſchiedt is inde figuren van Optica, om dat de plaeten de figuren niet ghevoeghelyck en vervattede) ſal men volghen het oordre, het welck den tytel der plaeten aenwyſt.

In dien nochtans dat het moeyelyck ſchyndt, ſoo veele plaeten achter den boeck by een te binden, ſullen connen die van ieder boeck, achter ieder boeck, daer ſy toe hooren, gevoeght worden.

Ofte wel ten laeſten connen die alle te ſaemen in een beſonder boecxken gebonden worden.

Alles naer belieſte der coopers.

De plaeten daer gheenen anderen tytel en ſtaet dan SCHEMATISMVS, dienen voor de Cylindrica, en Annularia.

AV RELIEVR.

LEs Scematiſmes, ou lames de ce livre, ſont tellement imprimées, qu'elles puiſſent toutes enſembles, eſtre liées a la fin du livre, enſorte, que la fueille eſtant dépliée, toute la figure, paſſe la tranche du livre, & paroiſſ ainſi entierement: & la meſme n'eſtant qu'une fois pliée, ſe remette preciſee ment dans le livre. Obſervant en les lames l'ordre des livres en cette œuvre contenus. Quel ordre ſe doive obſerver, en les lames appartenantes au meſme livre, pourra t'on facilement remarquer, hors de l'ordre des figures, ſe ſui-

vantes en nombre. Mais, ou cet ordre des nombres eſt aucunement interrompu, a cauſe des lames, leſquelles autrement, ne comprendoient pas aſſez commodement les figures (ce qui eſt arriué en les figures de l'Optique) on doit obſeruer l'ordre preſcrit, en le tiltre meſme des lames.

Si on iuge neantmoins difficile de ioindre, à l'œuure enſemble, tant de figures : obſervant la meſme façon & ordre, on les pourra ioindre chaſque à ſon livre.

Ou enfin, on en pourra faire vn livre particulier.

Que l'acheteur choiſiſſe.

Les lames, leſquelles n'ont autre tiltre, que celuy de SCHEMATISMVS apartiennent aux Cylindriques & Annulaires.

		ERRATA	CORRIGE.
Aſtronomiæ fol. 34.	lineâ 12.	Simpliſſimus	Simpliciſſimus
35	21	partim	partium
35	39. 40.	temperatum	temperatam
36	30.	oblig. oblig.	obliq. obliq.
246	6.	♌ 22. 0. | ♌	♉ 22. 0. | ♉
246	9	♌ 5. 40. | ♌	♉ 5. 40. | ♉
246	17	♍ 25. 42. | ♍	♍ 25. 42. | ♍
Opticæ fol. 151	18	ſit maior	ſi maior
191	8	ac diurnum	ad diurnum
206	17	ac proiectionis	ad proiectionis
Catoptricæ fol. 218	39	THEOREMA VI	deleatur
222	16	extremitate	extremitates
262	44	XXVIII	XXXVIII
262	46	vt erat	vt vrat

A01146 1679

Digitized by Google

101 1461679
Digitized by Google

G. 87.

Digitized by Google